# 数学特別講義 XX（2017 年 11 月 17 日（金）担当　福井）
## 座屈の問題

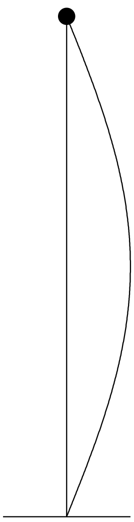
弾性を持った棒を両端から押すと，棒は少しずつ変形していくが，ある荷重で急に変形の模様が変化し，大きなたわみを生ずる．このような現象を**座屈**という．座屈は数学的に解析されているが特異点論的見地からも見ようというのが本稿の趣旨である．無限次元だって特異点論の対象なのさというお話である．

**■モデル**　長さ $\ell$ の棒を垂直に立て，上端に質量 $m$ の重りを載せる．棒の下端から長さ $s$ の点 $P$ を $(u(s), h(s))$ と書き，点 $P$ での棒の接線が垂直方向となす角を $\theta$ とすれば

$$(u'(s), h'(s)) = (\sin\theta, \cos\theta)$$

を得る．重りの高さは次の様に計算される．

$$h(\ell) = h(\ell) - h(0) = \int_0^\ell h'(s)ds = \int_0^\ell \cos\theta ds = \int_0^\ell \sqrt{1-\sin^2\theta}ds = \int_0^\ell \sqrt{1-(u')^2}ds$$



よって重りの位置エネルギー $P$ は $g$ を重力加速度として次で与えられる．

$$P = mgh(\ell) = mg\int_0^\ell \sqrt{1-(u')^2}ds$$

棒の曲率 $\kappa$ は $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}\sin^{-1}u' = \frac{u''}{\sqrt{1-(u')^2}}$ なので，棒の歪エネルギー $S$ は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\ell \kappa^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{(u'')^2}{1-(u')^2}ds$$

で与えられ，全エネルギー $E$ は次で与えられる．

$$E(u) = S + P = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{(u'')^2}{1-(u')^2}ds + mg\int_0^\ell \sqrt{1-(u')^2}ds$$

**■変分計算**　$X = \{u \in L^2[0, l] : u'' \in L_2, u(0) = u(\ell) = 0\}$ と置き $E$ を $X$ の $u = 0$ のある近傍で定義されていると見て，これの変分を求めてみる．

$$\begin{aligned}
&\frac{E(u+tv) - E(u)}{t} \\
=&\frac{1}{2}\int_0^\ell \Big(\frac{(u''+tv'')^2}{1-(u'+tv')^2} - \frac{(u'')^2}{1-(u')^2}\Big)ds + mg\int_0^\ell (\sqrt{1-(u'+tv')^2} - \sqrt{1-(u')^2})ds \\
=&\int_0^\ell \Big(\frac{u'(u'')^2v'}{(1-(u')^2)} + \frac{u''v''}{1-(u')^2} + O(t)\Big)ds - mg\int_0^\ell \Big(\frac{u'v'}{\sqrt{1-(u')^2}} + O(t)\Big)ds
\end{aligned}$$

なので, $\lambda = mg$ と置いて，変分 $\delta E \in X^*$ が次で定まる．但し $X^*$ は $X$ の双対空間.

$$\Phi(u,\lambda)[v] = \delta E[v] = \int_0^\ell \Big(\frac{u'(u'')^2v'}{(1-(u')^2)} + \frac{u''v''}{1-(u')^2} - \lambda\frac{u'v'}{\sqrt{1-(u')^2}}\Big)ds \tag{1}$$

■零点集合を調べる　そこで

$$\Phi : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X^*, \quad (u,\lambda) \mapsto \big[v \mapsto \Phi(u,\lambda)[v]\big]$$

と置いて，$\Phi(u,\lambda) = 0$ で定義される集合を $u = 0$ の近傍で調べたい．$u_n = \frac{1}{\sqrt{\ell/2}} \sin \frac{n\pi s}{\ell}$ として $X$ は $u_n$ 達の張るベクトル空間の閉包と見る．$X$ の元 $u$ を $u = \sum_{n=1}^\infty x_n u_n$ と表すことにすれば，要は次の写像の零点集合を調べれば良い．

$$\widehat{\Phi} : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\infty, \qquad (x_1, x_2, \ldots, \lambda) \mapsto (\Phi(u,\lambda)[u_1], \Phi(u,\lambda)[u_2], \ldots)$$

(1) を用いて，計算すると

$$\Phi(u,\lambda)[v] = \int_0^\ell [(u''v'' - \lambda u'v') + (u''(u')^2 v'' + u'(u'')^2 v' - \frac{\lambda}{2}(u')^3 v') + (u')^3 O(u', u'')^2] ds \tag{2}$$

なので

$$\begin{aligned}\Phi_u(0,\lambda)[u] \cdot u_n &= \int_0^\ell (u''\phi'' - \lambda u'u_n')ds = \int_0^\ell (u'' + \lambda u)u_n'' ds \\ &= \sum_{m=1}^\infty x_m \int_0^\ell (u_m'' + \lambda u_m)u_n'' ds = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\Big(\lambda - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\Big)x_n\end{aligned}$$

を得る．$c_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\big(\lambda - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\big)$ と置けば

$$\widehat{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, \lambda) = (c_1 x_1 + O(x_i^2), c_2 x_2 + O(x_i^2), \ldots)$$

なので，$\lambda \neq \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ ならば（逆写像定理より）$u = 0$ の近傍では $u = 0$ のみが解である．

■解の分岐　$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ なる点では, 自明解 $u = 0$ から分岐する解が現れる．例えば $\lambda = n^2\pi^2/l^2$ のとき，$c_n = 0$ で

$$\Phi(u,\lambda)[u_n] = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\Big(\lambda - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\Big)x_n + \frac{n^6\pi^6}{4l^7}x_n^3 + \cdots$$

と書ける．この計算は微分計算を用いたテイラーの展開の係数決めの議論である．テイラー展開の係数を見て零点集合の様子を解析しようというのは（有限次元での）特異点論的アイデアである．今の場合は無限次元であるが同様の解析が可能で $\lambda > \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ のとき $x_n = \pm\frac{2l^{5/2}}{n^2\pi^2}\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{l^2}} + \cdots$ を満たす解が存在する事がわかる．なお、この部分は議論が雑で、正確にはリアプノフ=シュミット還元という方法を使う．

レポート課題（1 は必須、2 と 3 は任意）

1. (1) を用いて (2) を導け．
2. 上の議論で用いた逆写像定理を述べよ．
3. リヤプノフ=シュミット還元とは何かを調べてまとめ，上の説明を合理化せよ．