数学特別講義 XX（2015 年 12 月 18 日）
偏微分方程式と特異点論（福井敏純）

私は特異点論をテーマとして研究してきたが，最近，偏微分方程式の解の分岐の様子を特異点論を用いて研究できることに気がついた．内容は学部生でも理解できると思うので一寸背伸びすることになるかも知れないが，説明してみようと思う．

非線形楕円形偏微分方程式. $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω で定義された関数 u を未知関数とする，次の偏微分方程式を考える．

$$\Delta u + \lambda u + h(\lambda, u) = 0. \tag{1}$$

但し Δ はラプラシアン $\Delta u = u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n}$ を表し $h(\lambda, u) = a_k(\lambda)u^k + o(u^k)$, $a_k \neq 0$ $(k \geq 2)$ としておく．これは非線形楕円形偏微分方程式と呼ばれるもので，通常はこれに適当な境界条件を課して，解の存在や一意性がいつ帰結できるかを議論する．ここでは次の 2 つの境界条件を考える．

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ (Dirichlet 条件)}, \qquad \partial_n u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ (Neuman 条件)}.$$

ここで ∂_n は境界の法方向への方向微分を表す．

定式化. $X = \{u \in C^\infty(\Omega) : u \text{ は上の境界条件のいずれか}\}$ とおき，次の作用素を考える．

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \to X,\ (\lambda, u) \mapsto \Delta u + \lambda u + h(\lambda, u)$$

与えられた境界条件の下で偏微分方程式 (1) を解くことは $\Phi(\lambda, u) = 0$ を満たす u を求めることと同値である．今の場合 (1) には自明な解 $u = 0$ が存在するので，それ以外に解があるかどうかが問題になる．λ を固定して Φ が定める X から X への写像を考えよう．

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(\lambda, u+tv) - \Phi(\lambda, u)}{t} =& \frac{\Delta(u+tv) - \Delta u + \lambda(u+tv) - \lambda u + h(\lambda, u+tv) - h(\lambda, u)}{t} \\ \to& \Delta v + \lambda v + h_u(\lambda, u)[v] \quad (t \to 0)\end{aligned}$$

なので $(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ では，微分写像は $v \mapsto \Delta v + \lambda^* v$ で定まる線形写像となる．

もし λ^* が $-\Delta$ の固有値でなければ，線形写像 $v \mapsto \Delta v + \lambda^* v$ は可逆であり，逆写像定理より写像 $X \to X$, $u \mapsto \Phi(\lambda, u)$, は 0 の近傍で可逆となる．つまり自明解の近傍では，自明解以外に解を持たない事がわかる．従って自明でない解を探す立場からは λ^* が $-\Delta$ の固有値の場合が問題になる．

有限次元への還元. λ^* が $-\Delta$ の固有値であるとしよう．固有空間 $V = \mathrm{Ker}(\Delta + \lambda 1)$ は有限次元とし，その基底を $v_1, \ldots, v_m$ とする．V の直交補空間を $V^\perp$ と書くと，

$$X = V \oplus V^\perp$$

である．さて固有値が λ^* でない $-\Delta$ の固有ベクトル $\{w_j\}$ を可算個取って，X の任意の元 u が次の形に一意的に表せるとしよう．

$$u = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m + y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots \tag{2}$$

$w_j \in V^\perp$ に注意（固有空間の直交性）する．$-\Delta w_j = \lambda_j w_j$ $(\lambda_j \neq \lambda^*)$ と書くと，

$$\Phi(\lambda, u) = (\lambda - \lambda^*) \sum_{i=1}^{m} x_i v_i + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_j) y_j w_j + h(\lambda, \sum_{i=1}^{m} x_i v_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j w_j)$$

である．v_p^*, w_q^* を v_p, w_q の双対基底とすると，次が成り立つ．

- $\Phi(\lambda, u)$ の v_p の係数は $(\lambda - \lambda^*) x_p + v_p^* h(\lambda, \sum x_i v_i + \sum y_j w_j)$
- $\Phi(\lambda, u)$ の w_q の係数は $(\lambda - \lambda_q) y_q + w_q^* h(\lambda, \sum x_i v_i + \sum y_j w_j)$

$v_p^* h(\lambda, \sum x_i v_i + \sum y_j w_j)$ 及び $w_q^* h(\lambda, \sum x_i v_i + \sum y_j w_j)$ は x_i, y_j について 2 次以上の項から始まることに注意しよう．

よって $(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ の近傍では，$w_q^* \Phi(\lambda, u) = 0$ で y_q を λ と x_i たちの関数と見ることができる（陰関数定理）．これを $y_q = \varphi_q(\lambda, x_i)$ と書くと，

$$v_p^* \Phi(\lambda, \sum_i x_i v_i + \sum_j \varphi_j(\lambda, x_i) w_j) = 0, \ p = 1, \ldots, m \tag{3}$$

を解けば (1) の解が求まることになる．この方程式は（しばしば解の分岐を記述するので）**分岐方程式**と呼ばれる．

ここまでは，特異点論は登場しない．解の分岐の様子をモデルを用いて記述する事ができることを主張するのに，特異点論を用いる．

分岐モデル. $H = \frac{1}{k+1} \int_\Omega (x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m)^{k+1} dx$ は $x_1, \ldots, x_m$ の $k+1$ 次斉次多項式である．もし H が次の条件 (a), (b) を満たせば，

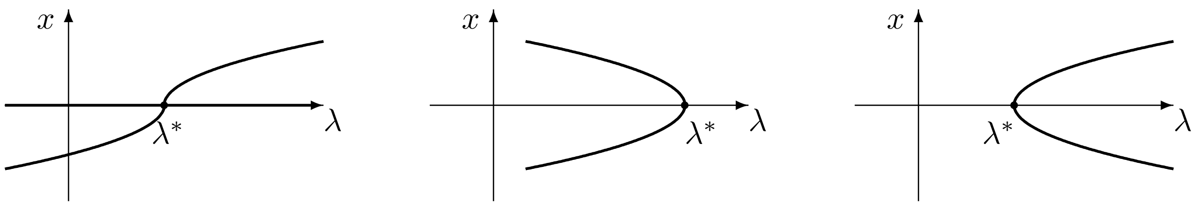
$$\{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : (\lambda - \lambda^*) x_i + H_{x_i} = 0, i = 1, \ldots, m\}$$

が分岐方程式 (3) のモデル（すなわち $(\lambda^*, 0)$ の近傍での解の分岐の様子は同じ）となる．

(a) H を球面 $S : x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1$ に制限して得られる関数はモース関数

(b) H を球面 S に制限して得られる関数は 0 を臨界値としない．

例 1. $\Omega = [0, \pi]$, 単純固有値 $(m = 1)$ の時，$(\lambda - \lambda^*)x + ax^k = 0$ が分岐モデルとなる．



遷臨界分岐点
(k 偶数).

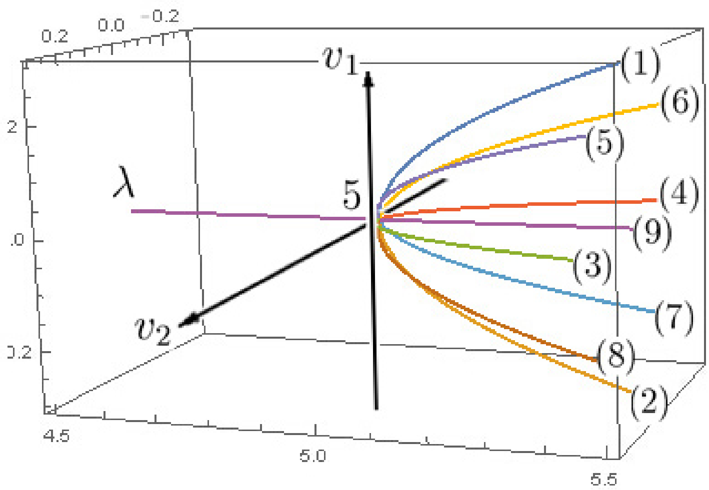
劣臨界分岐点
(k 奇数, $a < 0$).

優臨界分岐点
(k 奇数 $a > 0$).

例 2. $\Omega = [0, \pi]^2$ のとき Dirichlet 問題では $\lambda^* = 5$ が重複度 2 の固有値である．$(m, k) = (2, 3)$ のときは，$H = 3x^4 + 8x^2y^2 + 3y^4$ と置けば．

$$(\lambda - \lambda^*)x + aH_x = (\lambda - \lambda^*)y + aH_y = 0$$

が分岐モデルとなる．分岐図は次図のようである．



課題（2016 年 1 月 8 日締切） 2 つ以上選択，但し * が解ければ他はやってなくても自動的に最高点.

1. 次の各場合に逆写像定理を述べよ．
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して
   (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して
   (c) バナッハ空間 X, Y と写像 $f : X \to Y$ に対して
2. 次の各場合に陰関数定理を述べよ．
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

（b）$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ に対して

（c）バナッハ空間 X, Y, Z と写像 $f : X \times Z \to Y$ に対して

3. 固有値問題とは何かを述べよ．

（a）行列に対して

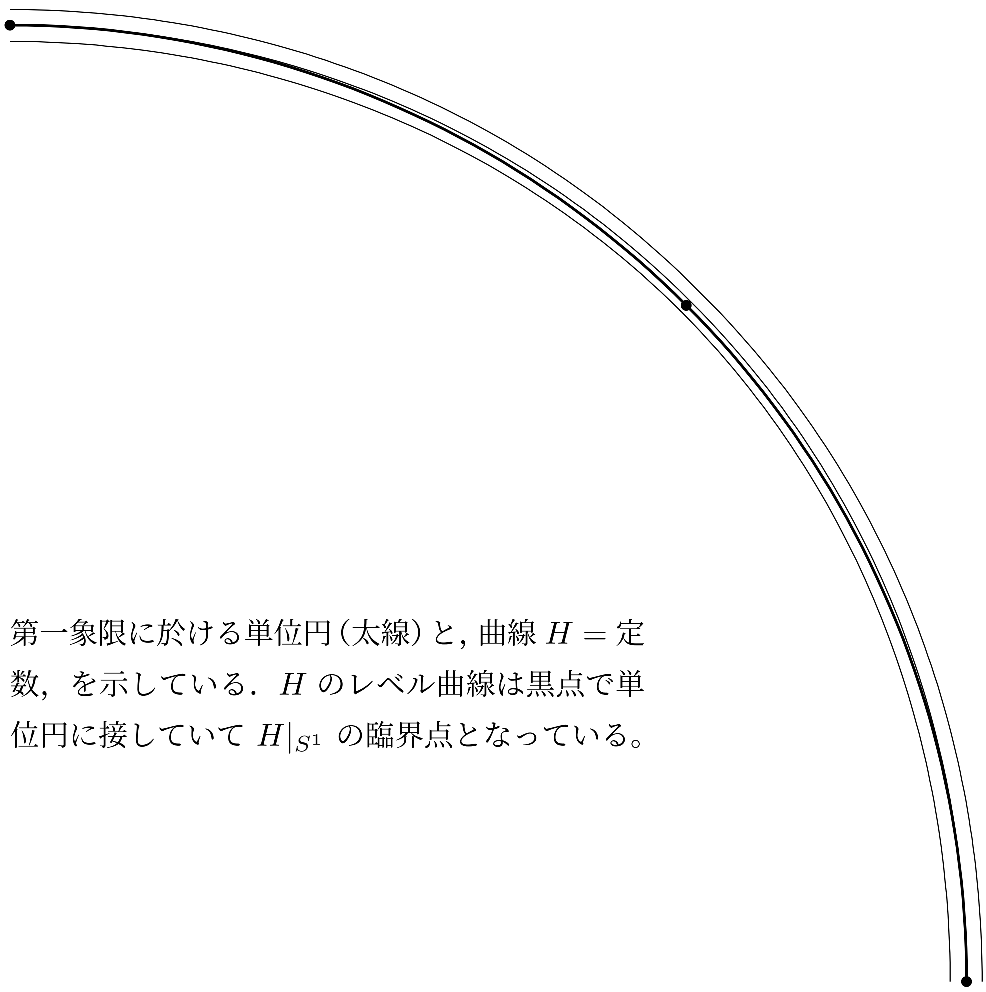
（b）ベクトル空間の間の線形写像に対して

（c）線形の微分作用素に対して

4. 臨界値の定義を述べよ．関数 $H = 3x^4 + 8x^2y^2 + 3y^4$ を単位円 S^1 に制限して得られる関数の極大極小を調べよ．

5*．例 1，例 2 を解析せよ．

関数 $H = 3x^4 + 8x^2y^2 + 3y^4$ を単位円 S^1 に制限して得られる関数の臨界点の絵.



第一象限に於ける単位円（太線）と, 曲線 $H =$ 定数，を示している．H のレベル曲線は黒点で単位円に接していて $H|_{S^1}$ の臨界点となっている。