微分位相幾何学入門

2010 年度「数学特別講義」

福井敏純

目次

第 1 章

微分可能写像と多様体

1.1　微分可能写像

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．写像 $f : U \to \mathbb{R}^p$ のヤコビ行列 $J_f(x)$ を次で定める．

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- f が x で**はめ込み** (embedding) とは $\operatorname{rank} J_f(x) = n$ のときを言う．
- f が x で**沈め込み** (submersion) とは $\operatorname{rank} J_f(x) = p$ のときを言う．

$n = p$ のときははめ込みと沈め込みは同値であるが，さらに局所的に全単射で逆写像も微分可能であることが次の逆関数定理よりわかる．

定理 1.1.1 (逆関数定理)**.** U を $\mathbb{R}$ の開集合とする．C^∞ 写像 $f : U \to \mathbb{R}^n$ の点 x でのヤコビ行列 $J_f(x)$ 最大階数のとき，x の近傍 U' と $f(x)$ の近傍 V が存在して，f は U から V への全単射であり， 逆写像 f^{-1} は微分可能で，その点 $f(x)$ でのヤコビ行列は $J_f(x)$ の逆行列である．すなわち

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}$$

定理 1.1.2 (陰関数定理)**.** U を 原点 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_k) : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

を $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = 0$ なる C^r 写像 $(r = 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$ とする．原点 $\mathbf{0}$ において $\boldsymbol{f}$ のヤコビ行列

の階数が k であるとする．たとえば

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{0}) \end{vmatrix} \neq 0$$

が成り立つとする．すると $\mathbb{R}^n$ の原点のある近傍 V から $\mathbb{R}^n$ の原点のある近傍 W への C^r 同相写像 $\boldsymbol{h} : V \longrightarrow W$ が存在して

$$f_i(\boldsymbol{h}(x_1, \ldots, x_n)) = x_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

が V の各点 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対して成り立つ．さらに $\mathbb{R}^n$ のある原点近傍で定義された C^r 関数 $\phi_i(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, k$, で

$$\boldsymbol{f}(\phi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \phi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n) \equiv 0$$

を満たすものが存在する．

証明. 新たに写像

$$\boldsymbol{g} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x}), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

を考える． $\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = 0$ で 仮定よりヤコビ行列 $J_{\boldsymbol{g}}(\mathbf{0})$ の行列式は 0 でない．ゆえに定理 1.1.1 より $\boldsymbol{g}$ は $\mathbb{R}^n$ の原点のある近傍 V から $\mathbb{R}^n$ の原点のある近傍 W への C^r 同相写像を定義する．その逆写像を $\boldsymbol{h}$ とすると $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h}(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$ である．この式の最初の k 個の成分を見れば最初の主張を得る．さらに $x_1 = \cdots = x_k = 0$ として，

$$\phi_i(x_{k+1}, \ldots, x_n) = h_i(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

とおくと最後の主張を得る． □

陰関数定理を仮定すると，次のようにして逆関数定理を証明することが出来る．$\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^n$ を逆関数定理の仮定を満たす写像とし，写像 $\boldsymbol{F} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, に陰関数定理を適用すれば逆関数定理を得る．これを確かめよ．

定義 1.1.3 (ユークリッド空間の部分多様体)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が次の条件を満たすとき**ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の C^r 部分多様体** であるという．
条件 : X の各点 $\boldsymbol{x}_0$ に対し，$\boldsymbol{x}_0$ の $\mathbb{R}^n$ でのある開近傍 U と $\mathbb{R}^n$ の原点の開近傍 V, さらに $\boldsymbol{x}_0$ を原点に写すような C^r 同相写像 $\boldsymbol{h} : U \longrightarrow V$ が存在して，次を満たす．

$$\boldsymbol{h}(U \cap X) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in V \mid y_1 = \cdots = y_k = 0\}$$

k をこの部分多様体 X の点 $\boldsymbol{x}_0$ での**余次元**といい $\operatorname{cod}_{\boldsymbol{x}_0} X = k$ と書く．

例 1.1.4 (超曲面)**.** $f(\boldsymbol{x})$ を 0 でない $\mathbb{R}^n$ の C^r 関数とし

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

とする． X を $\mathbb{R}^n$ の**超曲面**という．X が 関数 $f(\boldsymbol{x})$ の特異点を含まないならば，定理 1.1.2 より，X は $\mathbb{R}^n$ の余次元 1 の C^r 部分多様体である．

例 1.1.5 (n 次元球面 S^n)**.**

$$S^n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\}$$

は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを示せ．また S^n はコンパクト[*1]であることを示せ．
ヒント：$f(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 - 1$ とおいて例 *1.1.4* を用いよ．

定義 1.1.6 (レベル曲面)**.** U を $\mathbb{R}^n$ の開集合， $f : U \to \mathbb{R}^p$ を C^r 写像 *(*$r \geq 1$*)* とする．$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^p$ としたとき，集合 $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{x} \in U \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\}$ を写像 f の**レベル曲面**という．定理 *1.1.2* より点 $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{c})$ が写像 $\boldsymbol{f}$ の臨界点でなければ $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍で余次元 p の C^r 部分多様体となることがわかる．

定義 1.1.3 と同様にして，複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体の概念も定義できる．例 1.1.4, 定義 1.1.6 も同様である．

定義 1.1.7 (代数集合)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の部分集合 X が**代数集合**[*2]であるとは，実係数多項式 $f_1, \ldots, f_p$ が存在して

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = f_p(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

と書けるときをいう．同様に $\mathbb{C}^n$ 内の有限個の複素多項式の零点集合を代数集合と言うこともある．

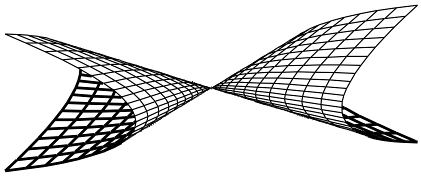
例 1.1.8. $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z^2\}$ とおくと， X は代数集合である．実際 X は多項式 $f(x, y, z) = xy - z^2$ の零点集合である．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

なので，X は陰関数定理より原点 $(0, 0, 0)$ 以外の X の点の近傍で解析多様体であることがわかる．

[*1] 任意の開被覆が有限部分被覆をもつ（すなわち，任意個の開集合で覆えたならば，じつはそのうちの有限個で覆えている）ような位相空間を**コンパクト**位相空間という．距離空間がコンパクトであることは，任意の点列が収束部分列をもつことと同値である．また，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合については，コンパクト性は有界閉集合と同値であることが知られている．

[*2] 代数的集合ということも多い．



領域 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 内の代数集合 $\{xy = z^2\}$

定義 1.1.9 (写像の正則点，特異点，臨界点)**.** U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$r \ge 1$ とし，C^r 写像 $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_p) : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ を考える．U の点 $\boldsymbol{x}$ が f の正則点，特異点，臨界点であるということを次で定義する

点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{f}$ の**正則点** $\iff$ $\operatorname{rank} J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \min\{n, p\}$
点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{f}$ の**特異点** $\iff$ $\operatorname{rank} J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) < \min\{n, p\}$
点 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{f}$ の**臨界点** $\iff$ $\operatorname{rank} J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) < p$

$\boldsymbol{f}$ の臨界点 $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{f}$ による像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{f}$ の**臨界値**

■$\mathbb{R}^n$ の部分集合上の微分可能写像　$\mathbb{R}^N$ の部分集合 X で定義された写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ が C^∞ であるとは，X の各点 x に対し x を含む開集合 U と C^∞ 写像 $F : U \to \mathbb{R}^m$ が存在して，$F|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$ とできる時をいう．

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 X から $\mathbb{R}^m$ の部分集合への写像 $f : X \to Y$ は X から $\mathbb{R}^m$ への写像と見る事ができる．$f : X \to Y \subset \mathbb{R}^m$ を X から $\mathbb{R}^m$ への写像と見て C^∞ のとき $f : X \to Y$ が C^∞ 級であるという．

f が全単射で，f と f^{-1} が C^∞ 級のとき，f は C^∞ **微分同相**（または単に**微分同相**であるという．

例 1.1.10. $B^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < 1\}$ とおくと，次の写像は微分同相写像である．

$$f : \mathbb{R}^n \to B^n, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{1 + |\boldsymbol{x}|^2}}$$

実際，次が逆写像である．

$$g : B^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{y} \mapsto \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{y}|^2}}$$

$$g\circ f(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{\sqrt{1 - |f(\boldsymbol{x})|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{x}|^2/(1 + |\boldsymbol{x}|^2)}} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{1 + |\boldsymbol{x}|^2}} = \boldsymbol{x}$$

$$f\circ g(\boldsymbol{y}) = \frac{g(\boldsymbol{y})}{\sqrt{1 - |g(\boldsymbol{y})|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\boldsymbol{y}|^2/(1 - |\boldsymbol{y}|^2)}} \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{y}|^2}} = y$$

1.2　多様体

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 X が**多様体**であるとは X の各点 x に対し，x のある近傍 U が存在して，$\mathbb{R}^n$ のある点の近傍への微分同相写像が存在するときを言う．

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 X が**境界付多様体**であるとは X の各点 x に対し，x のある近傍 U が存在して，$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0\}$ のある点の近傍への微分同相写像が存在するときを言う．

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 X が **角付き多様体**であるとは X の各点 x に対し，x のある近傍 U が存在して，

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0\}$$

のある点の近傍への微分同相写像が存在するときを言う．

■CW 複体　e が**胞体**であるとは D^n から e への連続写像があり D の内点に制限すると同相写像になるときをいう．特に次元を明示したいときは e を n 次元胞体と言う．

位相空間 X は次の条件を満たすとき**胞体複体**という．

- X は Hausdorff 空間である．
- X は胞体分割される．すなわち, X は互いに共通部分のない胞体の和集合である．$X = \bigcup_\lambda e_\lambda$, e_λ は胞体, $e_\lambda \cap e_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$, と書ける．
- k 次元以下の胞体の和集合を X^k で表すと k 次元胞体 e_λ に対し $\overline{e_\lambda} \setminus e_\lambda \subset X^{k-1}$.

有限個の胞体分割を持つ胞体複体を**有限胞体複体**という．胞体複体が次の条件を満たすとき **CW 複体**という．

(C) X の各点 x に対し $x \in Y$ となる有限部分複体 Y が存在する．

(W) X の部分集合 F は各胞体 e_λ に対し $F \cap \overline{e_\lambda}$ が閉集合ならば F も閉集合である．

Lagrange の未定乗数法

1.3　接ベクトルと接写像

定義 1.3.1 (接空間と写像の微分)**.** $(x_1, \ldots, x_n)$ を座標系にもつユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内に開集合 U を考える．$i = 1, \ldots, n,$ に対し，点 $\boldsymbol{x}$ を始点とする x_i 軸に平行な単位ベクトルを $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\boldsymbol{x}}$ で表す．またこれらの一次結合で表されるベクトル

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{x}} = c_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\boldsymbol{x}} + \cdots + c_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{x}}, \quad c_i \text{ は実数}$$

を $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}$ での**接ベクトル**という．点 $\boldsymbol{x}$ での接ベクトル全体のなすベクトル空間を $\boldsymbol{x}$ での $\mathbb{R}^n$ の**接空間**といい記号 $T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n$ で表す．

$$T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n = \left\{ c_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\boldsymbol{x}} + \cdots + c_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{\boldsymbol{x}} \,\middle|\, c_i \text{ は実数，} i = 1, \ldots, n \right\}$$

接ベクトルは本来ならば始点 $\boldsymbol{x}$ を明記して

$$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{x}} = c_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{\boldsymbol{x}} + \cdots + c_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{\boldsymbol{x}}$$

と書くべきであるが，特別に始点を明記することが必要な場合を除いては，記号を単純にするため，始点 $\boldsymbol{x}$ を省略して

$$\boldsymbol{\xi} = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

のように書くことにする．

C^r 写像 $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_p) : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ を考え $\mathbb{R}^p$ の座標を $(y_1, \ldots, y_p)$ で表す．点 $\boldsymbol{x}$ の写像 $\boldsymbol{f}$ による像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ でも，同様にして接空間 $T_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\mathbb{R}^p$ を考える．これは次のように表示される．

$$T_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\mathbb{R}^p = \left\{ c'_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + c'_p \frac{\partial}{\partial y_p} \,\middle|\, c'_i \text{ は実数，} i = 1, \ldots, p \right\}$$

このとき U の点 $\boldsymbol{x}$ を固定すれば線形写像

$$d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}} : T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n \to T_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\mathbb{R}^p$$

が次で定義される．

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} c_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

この写像は行列を用いて次のように書くこともできる．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

この写像を 点 $\boldsymbol{x}$ での**写像 $\boldsymbol{f}$ の微分** または 点 $\boldsymbol{x}$ での $\boldsymbol{f}$ の**接写像**という． 正則写像の接写像の定義も同様であるが詳細は省略する．もし 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{f}$ の特異点でなければ接写像 $d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{f}$ の挙動をよく近似していると考えられる．

定義 1.3.2 (曲線とその速度ベクトル)**.** 開区間 (a, b) から $\mathbb{R}^n$ への C^r 写像

$$\boldsymbol{\alpha} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

を C^r **曲線**という[*3]．このときベクトル

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right)$$

を $t \in (a,b)$ での曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ の**速度ベクトル**と言う．速度ベクトルを $\frac{\partial}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial}{\partial x_n}$ を用いて，次のように表すことも多い．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \frac{dx_1}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{dx_n}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

例 **1.3.3.** 速度ベクトルは次のように表せることを示せ．

$$d\boldsymbol{\alpha}_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)$$

定理 1.3.4. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_p) : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ を C^r 写像とする．$\boldsymbol{x}$ を U の点とし，$T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{\xi} = c_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ を考える．$\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{x}$ なる C^r 曲線 $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ の $t = 0$ での速度ベクトルが $\boldsymbol{\xi}$ であれば，$d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi})$ は曲線

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

の $t = 0$ での速度ベクトルである．　つまり

$$d\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{d(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\alpha})}{dt}(0).$$

証明. 曲線 $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ の $t = 0$ での速度ベクトルが $\boldsymbol{\xi} = c_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ なので，

$$c_i = \frac{dx_i}{dt}(0), \quad i = 1, \dots, n$$

が成り立つ．曲線 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ を成分を使って $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\alpha}(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))$ と書いておけば

$$y_j(t) = f_j(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad j = 1, \dots, p$$

となる．よって連鎖法則を使えば証明が終る．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{d(f\circ\boldsymbol{\alpha})}{dt}(0) &= \sum_{j=1}^{p}\frac{dy_j}{dt}(0)\\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{\alpha}(0))\frac{dx_i}{dt}(0)\end{aligned}$$

[*3] 写像 α の像を曲線と呼ぶ方が初学者には抵抗ないであろう．しかし，一般にはこのように曲線を与える写像を曲線と言う事が多い．以後，C^r 曲線と言うときは開区間で定義された C^r 写像のことを意味する．

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) c_i \\
&= df_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}
$$

□

定義 1.3.5 (部分多様体の接空間)**.** 定義 *1.1.3* の記号の下で

$$(d\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{x_0}})^{-1}\left\{ c_{k+1}\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial y_n} \;\middle|\; c_i \in \mathbb{R},\ i = k+1, \ldots, n \right\}$$

を $\boldsymbol{x}_0$ での X の**接空間**といい $T_{\boldsymbol{x}_0}X$ で表す．これは $T_{\boldsymbol{x}_0}\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である．

補題 1.3.6. 部分多様体 X が，点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ の $\mathbb{R}^n$ での近傍 U で，写像 $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_p) : U \to \mathbb{R}^p$ のレベル曲面で，$\boldsymbol{x}_0$ が写像 $\boldsymbol{f}$ の臨界点でないならば，

$$T_{\boldsymbol{x}_0}X = \{\boldsymbol{\xi} \in T_{\boldsymbol{x}_0}\mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{\xi}, \nabla f_i \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, p\}$$

ただし，$\langle\ \ ,\ \ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積で $\nabla f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$.

証明. $\subset$ を示す．$\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{x}_0}$ を初速度とする X 内の C^1 曲線 $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ をとる．$f_i \circ \boldsymbol{\alpha} \equiv 0$ より，この両辺 t で微分して $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{d\alpha_k}{dt} \equiv 0$ を得る．$t = 0$ とすれば $\langle \boldsymbol{\xi}, \nabla f_i \rangle = 0$ を得る．さらに，両辺はベクトル空間としての次元は等しいので，一致しなければならない． □

例 1.3.7 (S^n の接束)**.** 演習 1.1.5 で定義した n 次元球面 S^n の点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ での S^n の接空間を $T_{\boldsymbol{x}}S^n$ で表すと，

$$T_{\boldsymbol{x}}S^n = \{(c_1, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c_1x_1 + \cdots + c_{n+1}x_{n+1} = 0\}$$

と表される． $T_{\boldsymbol{x}}S^n$ 達の和集合 $TS^n = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in S^n}\{\boldsymbol{x}\} \times T_{\boldsymbol{x}}S^n$ を考える[*4] と

$$TS^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}, c_1, \ldots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} \;\middle|\; \begin{array}{c} {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1 \\ c_1x_1 + \cdots + c_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{array} \right\}$$

となる．TS^n が $\mathbb{R}^{2n+2}$ の部分多様体であることを示せ．TS^n は S^n の接束と呼ばれる多様体である．

1.4　サードの定理

ミルナーによる次の定理の証明を紹介する．

[*4] これを $\amalg_{\boldsymbol{x}\in S^n} T_{\boldsymbol{x}}S^n$ と書くことがある．$\mathbb{R}^n$ の部分多様体 X に対し，$TX = \amalg_{\boldsymbol{x}\in X} T_{\boldsymbol{x}}X$ を X の接束という．これも部分多様体である．

定理 1.4.1 (サードの定理)**.** M を n 次元多様体とする．C^∞ 写像 $f: M \to \mathbb{R}^p$ の像の集合は測度 0 である．

M を立方体 $[0,1]^n$ として証明すれば十分である．まず予備的な考察をする．

C^1 写像 $f: [0,1]^n \to \mathbb{R}^p$ に，平均値の定理

$$f(y) - f(x) = df(z)(y-x),\ z \in [x,y]$$

より，$df(z)$ の線形写像としてのノルムの $[0,1]^n$ での最大値を L とおけば，次を得る．

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$$

$T_x(t) = f(x) + df(x)(y-x)$ とおけば

$$f(y) - T_x(y) = (df(z) - df(x))(y-x)$$

であり，次を満たす連続関数 $b(\varepsilon)$ で $b(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ を満たすものが存在する．

$$|f(y) - T_x(y)| \leq b(|y-x|)|y-x| \tag{1.4.1}$$

定理 1.4.2. $n < p$ のとき C^1 写像 $f: [0,1]^n \to \mathbb{R}^p$ の像の集合は測度 0 である．

証明. T_x の像は高々 n 次元であり，T_x の像を含む n 次元部分空間 P_x をとる．(1.4.1) より

$$|y-x| < \varepsilon \implies d(x, P_x) \leq b(\varepsilon)\varepsilon$$

であり，

$$\mathrm{Vol}\, f(B_\varepsilon(x)) \leq (2L\varepsilon)^n (2b(\varepsilon)\varepsilon)^{p-n} = 2^p b(\varepsilon)^{p-n} \varepsilon^p$$

$[0,1]^n$ の各辺を N 等分して得られる N^n 個の小立方体の直径は $\sqrt{n}/N$ なので，その立方体の像の体積は

$$2^p b\Big(\frac{n^{1/2}}{N}\Big)^{p-n} \frac{n^{p/2}}{N^p}$$

を超えない．このような立方体は N^n 個しかないから，体積の総和は

$$2^p b\Big(\frac{n^{1/2}}{N}\Big)^{p-n} \frac{n^{p/2}}{N^{p-n}}$$

を超えず $N \to \infty$ とすると右辺は 0 に近づくので結果を得る．□

定理 1.4.3. C^1 写像 $f: [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ の臨界値の集合は測度 0 である．

証明. C を臨界集合とする．$x \in C$ のとき，T_x の像はある超平面 P_x に含まれているので，(1.4.1) より

$$|y-x| < \varepsilon \implies d(f(y), P_x) \leq b(\varepsilon)\varepsilon$$

となり，次がわかる．

$$\mathrm{Vol}(f(B_\varepsilon(x))) \leq (2L\varepsilon)^{n-1}(2b(\varepsilon)\varepsilon) = 2^n L^{n-1}\varepsilon^n b(\varepsilon)$$

$[0,1]^n$ の各辺を N 等分して得られる N^n 個の小立方体の直径は $\sqrt{n}/N$ なので，その小立方体が臨界点を含めば，その立方体の像の体積は

$$2^n L^{n-1}\Big(\frac{\sqrt{n}}{N}\Big)^n b(\frac{1}{N})$$

を超えない．そのような立方体は高々 N^n 個しかないので体積の総和は

$$2^n L^{n-1} n^{\frac{n}{2}} b\frac{1}{N})$$

を超えず，$N \to \infty$ とすると結果を得る． □

定理 1.4.4. $n > p$ のとき，n, p によって定まる自然数 $k(n,p)$ が存在して $r > k(n,p)$ のとき，C^r 写像 $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^p$ の臨界値の集合は測度 0 である．

実は $k(n,p) = n - p$ として定理は正しい事が知られているが，ここではこのような $k(n,p)$ が存在することのみ証明する．

証明. ここで $n \leq p$ のときは $k(n,p) = 0$ とおいて，定理が成り立つ事は既に見た．$k(n-1,p)$ まで定義されたとして，$k(n,p)$ を定めるプロセスを示す．

C を f の臨界点集合とする．$d^j f(x) = 0$ $(j \leq i)$ なる x 全体の点を C_i とおくと，次の減少列がある．

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k$$

$f(C)$ が測度零である事を示すには，k を $\frac{n}{p} - 1$ を超える最小の整数として，次を示せばよい．

(i) $f(C_k)$ は測度零．

(ii) $i = 1, 2, \ldots, k-1$, に対し $r - i > k(n-1,p)$ ならば $f(C_i \setminus C_{i+1})$ は測度零．

(iii) $r > k(n-1, p-1)$ ならば $f(C \setminus C_1)$ は測度零．

定理の証明を終えるには，

$$k(n,p) \geq \frac{n}{p} - 1, \qquad k(n,p) - \lfloor\frac{n}{p}\rfloor + 1 \geq k(n-1,p), \qquad k(n,p) \geq k(n-1,p-1)$$

を満たすように整数 $k(n,p)$ を定めればよい．即ち

$$k(n,p) = \max\{k(n-1,p) + \lfloor\frac{n}{p}\rfloor - 1, k(n-1,p-1)\}$$

実際，$k(n,p) \geq k \geq \frac{n}{p} - 1$ で，$k-1 \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1$ より $i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対し，次の不等式より (ii) の仮定が成り立つ．

$$r - i \geq k(n,p) - i \geq k(n,p) - (k-1) \geq k(n,p) - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + 1 \geq k(n-1,p)$$

参考のため，いくつかの (n,p) について $k(n,p)$ を求めてみる．

$$k(p+1,p) \geq \max\{k(p,p) + \lfloor \frac{p+1}{p} \rfloor - 1, k(p,p-1)\} = \begin{cases} 1 & (p=1) \\ k(p,p-1) = 1 & (p \geq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k(p+2,p) &\geq \max\{k(p+1,p) + \lfloor \frac{p+2}{p} \rfloor - 1, k(p+1,p-1)\} \\ &= \begin{cases} k(2,1) + 2 = 3 & (p=1) \\ \max\{k(3,2)+1, k(2,1)\} = 2 & (p=2) \\ \max\{k(4,3), k(4,2)\} = 2 & (p=3) \\ \max\{k(p+1,p), k(p+1,p-1)\} = 2 & (p \geq 3) \end{cases} \\ k(p+3,p) &\geq \max\{k(p+2,p) + \lfloor \frac{p+3}{p} \rfloor - 1, k(p+2,p-1)\} \\ &= \begin{cases} k(3,1) + 3 = 6 & (p=1) \\ \max\{k(4,2)+1, k(4,1)\} = 3 & (p=2) \\ \max\{k(5,3)+1, k(5,2)\} = 3 & (p=3) \\ \max\{k(p+2,p), k(p+2,p-1)\} = 3 & (p \geq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

(i) の証明: $x \in C_k$ のとき，テーラーの定理より，定数 $c > 0$ が存在して，次が成り立つ．

$$f(x+t) = f(x) + R(x,t), \qquad |R(x,t)| \leq c|t|^{k+1}$$

$[0,1]^n$ を N^n 個の小立方体に分割すると，x を含む小立方体 I の点は $x+t$ $(|t| \leq \sqrt{n}/N)$ と表せ，$f(x+t)$ は $f(x)$ を中心とする一辺の長さ $2c(\frac{\sqrt{n}}{N})^{k+1}$ の立方体内にある．立方体は全部で高々 N^n 個なので，そのような立方体の体積の総和は

$$N^n \left(2c\frac{\sqrt{n}}{N}\right)^{(k+1)p} = \frac{(2c\sqrt{n})^{p(k+1)}}{N^{pk+p-n}} = \frac{(2c\sqrt{n})^{p(k+1)}}{N^{p(k-\frac{n}{p}+1)}}$$

を超えない．$N \to \infty$ とすると右辺は 0 に近づき結果を得る．
(ii) の証明: $x \in C_i \setminus C_{i+1}$ とする．$s_1, s_2, \ldots, s_{i+1}$ をうまく選ぶと $\frac{\partial^{i+1} f_1}{\partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_{i+1}}}(x) \neq 0$. 仮定より，関数 $w = \frac{\partial^i f_1}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{i+1}}}$ は x で零である．$s_1 = 1$ とすると

$$h = (w, x_2, \ldots, x_n)$$

は，x の近傍で C^{r-i} 級局所微分同相で $h(C_i) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$．つまり，$x$ の近傍では，C_i は $n-1$ 次元部分多様体 $M = h^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ の部分集合で，写像 $g = f|_M$ の臨

界集合は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

の階数が落ちる M の点の集合であり C_i を含む．$g{\circ}h^{-1}|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}$ は，C^{r-i} 級写像でその臨界値は $r-i \geq k(n-1,p)$ ならば測度零となる．よって，n に関する帰納法で証明が終わる．

(iii) の証明: $x \in C \setminus C_1$ を取る．$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ とする．

$$h = (f_1, x_2, \ldots, x_n)$$

は，x の近傍で C^k 級局所微分同相で x の近傍で f の臨界点と $g = f{\circ}h^{-1}$ の臨界点は対応している．$g(x) = (x_1, g_2(x), \ldots, g_p(x))$ であり，

$$g_t : (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \to \mathbb{R}^{p-1}, \qquad x' = (x_2, \ldots, x_n) \mapsto (g_2(t,x'), \ldots, g_p(t,x'))$$

と置く．g の臨界値の集合は $\bigcup_t \{t\} \times g_t(C(g_t))$ なので，$g_t(C(g_t))$ が測度零ならばフビニの定理より証明が終わる．□

1.5　1 の分割

次の関数が C^∞ 関数である事はよく知られている．

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

この関数を使って $\alpha_1(t) = \alpha(t)\alpha(1-t)$ とおくとこれは区間 $(-\infty, 0]$ と $[1, \infty)$ で恒等的に 0 で，区間 $(0,1)$ では正である C^∞ 関数である．

$$\beta(t) = \frac{\int_0^t \alpha_1(s)ds}{\int_0^1 \alpha_1(s)ds}$$

とすると，$\beta(t)$ は単調増加で次を満たす．

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

さらに関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x) = 1 - \beta(|x| - 1)$$

で定めると，次を満たす．

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 2 \end{cases}$$

関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ に対し，その台 $\operatorname{supp}\varphi$ を次で定める．

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$$

定理 1.5.1. $\mathbb{R}^N$ の任意の部分集合 X の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対し，次を満たす $\{\varphi_i(x)\}$ が存在する．これを $\{U_\alpha\}$ に従属する **1 の分割**という．

- $\varphi_i(x)$ は $0 \le \varphi_i(x) \le 1$ なる C^∞ 関数
- 任意の $x \in X$ に対しある x の近傍 U が存在して $\{i : \varphi_i|_U \not\equiv 0\}$ は有限集合
- 各 i に対し $\operatorname{supp}\varphi_i$ は，ある U_α 内の閉集合に含まれる．
- $\sum_i \varphi_i(x) \equiv 1$.

証明. $U_\alpha = X \cap W_\alpha$ なる $\mathbb{R}^N$ の開集合 W_α をとる．$W = \bigcup_\alpha W_\alpha$ とおき，コンパクト集合の増大列 $\{K_i\}$ で W を覆う．

$$W = \bigcup_j K_j \qquad K_j \subset \operatorname{Int}(K_{j+1})$$

例えば $K_j = \{z \in W : |z| \le j, \operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^N \setminus W) \ge \frac{1}{j}\}$ とおく．

閉包が少なくとも 1 つの W_α に含まれる $\mathbb{R}^N$ のすべての開球体の集合は W の開被覆であるが，集合 K_2 を含む有限個のこのような球体 $B_1, \ldots, B_{r_2}$ を選ぶ．B_i 上恒等的に 1 であり B_i を含む U_{α_i} の閉集合の外側で 0 であるような非負 C^∞ 関数 η_i をとる．

$j \ge 3$ のとき，コンパクト集合 $K_j \setminus \operatorname{Int}(K_{j-1})$ は開集合 $W \setminus K_{j-2}$ の内側に含まれる．閉包が $W \setminus K_{j-2}$ とある W_α に含まれるすべての開球体の集合は $K_j \setminus \operatorname{Int}(K_{j-1})$ の開被覆をなす．$K_j \setminus \operatorname{Int}(K_{j-1})$ の有限部分被覆 $B_{r_{j-1}+1},\ldots,B_{r_j}$ を抜き出し開球体 B_i 上 1 に等しく，$W \setminus K_{j-2}$ と W_{α_i} 双方に含まれる閉集合上 0 になる関数 $\eta_{r_{j-1}+1},\ldots,\eta_{r_j}$ を付け加える．

構成より各 j に対し $\{i : \eta_i|_{K_j} \neq 0\}$ は有限なので $\sum_i \eta_i$ は有限和であり，0 ではない．よって

$$\varphi_i(x) = \frac{\eta_i(x)}{\sum_{j=1}^\infty \eta_j(x)}$$

が求めるもの．　□

1.6　固有写像

写像 $f : X \to Y$ が**固有写像** (proper map) であるとは，Y のコンパクト部分集合の逆像がコンパクトとなるときを言う．

X がコンパクトならば，連続写像 $f : X \to Y$ は固有写像である．

定理 1.6.1. 距離空間 X, Y 間の連続写像 $f : X \to Y$ について次は同値．

(i) f が固有写像

(ii) f は閉写像で 1 点の逆像はコンパクト

(iii) 任意の X の点列 $\{x_n\}$ に対し，$\{f(x_n)\}$ が収束すれば $\{x_n\}$ は収束部分列を持つ．

証明． (i)⇒(ii): (i) を仮定する．一点はコンパクトなので任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクト．次に f が閉写像であることを示す．$C \subset X$ を閉集合とする．$y \in \overline{f(C)}$ をとると C の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ で $(f(x_n))_{n=1,2,\dots}$ が y に収束するものが存在する．

$$K = \{y\} \cup \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$$

とおくと $((f(x_n))$ は収束するので) K はコンパクトよって $f^{-1}(K)$ もコンパクトである．$(x_n)_{n=1,2,\dots}$ はコンパクト集合 $f^{-1}(K)$ の点列なので収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ を持つ．この部分列の収束先を x と書くと，$\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は閉集合 C の点列でもあるので C は x を含む．よって

$$y = \lim_{k\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(C).$$

よって $f(C)$ は閉集合である．

(ii)⇒(iii): (ii) を仮定する．次を満たすような X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ と $y \in Y$ があったとして矛盾を導けばよい．

(1) $f(x_n) \longrightarrow y \in Y$ $(n \longrightarrow \infty)$

(2) $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ は収束する部分列を持たない．

(2) より $E = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は閉集合である．よって $f(E) = \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ も閉集合である．(1) より $y \in f(E)$．したがって $f(x_n) = y$ となる 番号 n が存在する．(x_n) の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ に対しても，同様の議論ができて，$f(x_{n_k}) = y$ なる番号 k が存在する．よって有限個の n を除いては $f(x_n) = y$ となる事がわかる．よってある番号 n_0 があって

$$n \geq n_0 \quad ならば \quad y = f(x_n)$$

よって $f^{-1}(y)$ は集積点を持たない点列 $(x_n)_{n=n_0,n_0+1,\ldots}$ を含むので コンパクトになり得ず矛盾.

(iii)⇒(i): 対偶を示す. K を Y のコンパクト部分集合とし, $f^{-1}(K)$ がコンパクトでないとする. すると集積点を持たない $f^{-1}(K)$ の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ が存在し, $(f(x_n))_{n=1,2,\ldots}$ は コンパクト集合 K の点列なので, 収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ をもつ. $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ は集積点を持たないので, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ のどんな部分列も収束しない. □

例 1.6.2 (固有写像の例)**.** Y を距離空間, K をコンパクト距離空間とする. 射影 $p : Y \times K \to Y$ は固有写像である. X を $Y \times K$ の閉部分集合とすると射影 $p : Y \times K \to Y$ の X への制限 $f : X \to Y$ も固有写像である.

最後の条件は次のように局所化される．連続写像 $f : X \to Y$ と Y の点 y に対し，次の条件を満たすとき，y は $f : X \to Y$ の**固有点**であるという．

$\{f(x_n)\}$ は y に収束するなら $\{x_n\}$ は収束部分列を持つ．

連続写像 $f : X \to Y$ に対し，次を満たす点列 $\{x_n\}$ が存在する Y の点 y を f の非固有点という．

- $\{x_n\}$ は収束部分列を持たない．
- $\{f(x_n)\}$ は y に収束する部分列を持つ．

非固有点全体を非固有軌跡と呼び $Z(f)$ で表す．

定理 1.6.3 (Ehresmann のファイバー束定理)**.** $f : X \to Y$ を多様体間の固有沈めこみとする．すると f は局所自明ファイバー束である．すなわち，任意の $y \in Y$ に対し，ある y の近傍 U が存在して微分同相写像 $\varphi : f^{-1}(y) \times U \simeq f^{-1}(U)$ が存在して，$p = f \circ \varphi$. ただし，$p : f^{-1}(y) \times U \to U$ は第 2 成分への射影を表す．

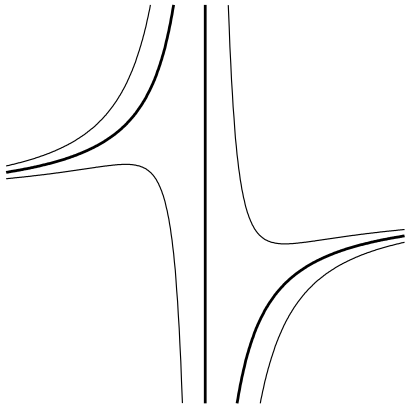
$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[d, "f"'] & f^{-1}(y) \times U \arrow[l, "\simeq"', "\varphi"] \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

略証. $Y = \mathbb{R}^p$ と仮定してよい．p に関する帰納法．$\mathbb{R}^p$ の座標方向のベクトル場を，1 の分割を上手に使って X のベクトル場に持ち上げる．固有性より，$\mathbb{R}^p$ のベクトル場の積分曲線が X のベクトル場の積分曲線に持ち上がる．これで p の次元が 1 つ落とせる． □

例 1.6.4 (Broughton [**?**])**.** 関数 $f(x, y) = x(xy + 1)$ を考える．f の臨界点集合は空集合である．$t \neq 0$ のとき

$$f^{-1}(t) = \{y = (t - x)/x^2\}.$$

なので $f^{-1}(t) = \mathbb{R}^*$, $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^*$．よってこの写像は局所自明なファイバー束でない．$-1/2, 0, 1/2$ での f のレベル曲線は次のようである．$f^{-1}(0)$ は太線で書いてある．



定理 1.6.5. 多様体 X 上に固有関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在する．

有界閉区間の f による逆像が X 全体であれば X はコンパクトである．つまり X がコンパクトでないときは，f の像は有界ではない．

証明. コンパクトな閉包を持つ X の開集合の集まりを $\{U_\alpha\}$ とし，それに従属する 1 の分割 $\{\varphi_i\}$ をとる．$x \in X$ を固定すれば $\varphi_i(x)$ は有限個を除いて 0 であるから

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\varphi_i(x)$$

は有限和として定義された関数である．任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ に対し $K \subset [-j, j]$ なる j をとる．$f(x) \leq j$ ならば，$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_j(x)$ のうち 1 つは 0 でない．なぜなら，それらがすべて 0 なら

$$f(x) = \sum_{i=j+1}^{\infty} i\varphi_i(x) \geq (j+1) \sum_{i=j+1}^{\infty} \varphi_i(x) = j+1$$

となるからである．f は連続なので $f^{-1}(K)$ は閉集合であり

$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}[-j, j] \subset \bigcup_{i=1}^{j} \operatorname{supp} \varphi_j$$

で， 右辺はコンパクト閉包を持つ集合である．よって $f^{-1}(K)$ はコンパクトである事がわかる． □

1.7　ホイットニーの埋込定理

まず次の定理を示そう．

定理 1.7.1 (Whitney)**.** m 次元多様体 X は $\mathbb{R}^{2m+1}$ に単射に嵌め込める．

証明. $X \subset \mathbb{R}^N$ $(N > 2m+1)$ とし，あるベクトル $\boldsymbol{a}$ への直交補空間 H への直交射影が X 上単射な嵌め込みである事をいう．$\iota : X \to \mathbb{R}^N$ を包含写像とし

$$g : TX \to \mathbb{R}^N, \quad (x, v) \mapsto d\iota_x(v), \qquad h : X \times X \times \mathbb{R}, \quad (x, y, t) \mapsto t(x - y)$$

とおくと，$N > 2m + 1$ なので，サードの定理より，どちらの像にも属さない点 $a \in \mathbb{R}^N$ が存在する．$a \neq 0$ に注意する．H を a の直交補空間とし $p : \mathbb{R}^N \to H$ 　を直交射影とする．

$p{\circ}\iota$ **は単射である事の証明** $p{\circ}\iota(x) = p{\circ}\iota(y)$ とすると，$\iota(x) - \iota(y) = ta$ となる t が存在する．$t \neq 0$ ならば $h(x, y, 1/t) = a$ となるので a のとり方に矛盾するので $t = 0$ がわかる．よって $x = y$ つまり $p{\circ}\iota$ は単射．

$p{\circ}\iota$ **は嵌め込みである事の証明** $d(p{\circ}\iota)(v) = 0$ なる $v \neq 0$ があったとすると，p は線形なので $p{\circ}d\iota_x)v = 0$ であり，$d\iota_x(v) = ta$ となる．ι は嵌め込みなので $t \neq 0$ であり，$g(x, 1/t) = a$ となり a の選び方に反する． □

X がコンパクトなら構成した，単射嵌め込みは自動的に固有写像になる．しかしながら，固有でない単射嵌め込みは存在する．

例 1.7.2. 写像 $(0, 1) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 0)$, は単射な嵌め込みであるが固有写像ではない．

例 1.7.3. a を無理数とすると，写像 $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, $t \mapsto (t, at)$ は単射な嵌め込みである．しかし固有写像でない．

定理 1.7.4 (Whitney)**.** m 次元多様体 X は $\mathbb{R}^{2m+1}$ に固有に埋め込める．

証明. X から $\mathbb{R}^{2m+1}$ への単射な固有嵌め込みが存在する事を示す．$\iota : X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ を単射な嵌め込みが存在する事はすでに見た．$\mathbb{R}^{2m+1}$ と単位球を (例えば微分同相写像 $z \mapsto z/(1 + |z|^2)^{1/2}$ で) 同一視して $|\iota(x)| < 1$ となるように出来る．ここで定理 1.6.5 の証明で構成した固有関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を取り，単射な嵌め込み

$$F : X \to \mathbb{R}^{2m+2}, \qquad x \mapsto (\iota(x), f(x))$$

を得るが，これを a に垂直な超平面 H に射影すると，定理 1.7.1 の証明より，ほとんどすべての a に対し $p{\circ}F : X \to H$ は単射な嵌め込みである．$p{\circ}F$ が固有写像である事を

示す．

主張: 任意の $c>0$ に対し，次を満たす $c'>0$ が存在する．

$$\{x\in X:|p{\circ}F(x)|\le c\}\subset\{x\in X:|f(x)|\le c'\}$$

この主張を認めると，f は固有なので右辺はコンパクトであり，各閉球体の $p{\circ}F$ による逆像は，コンパクトである事がわかる．これは F が固有写像である事を意味する．主張を証明するには，X の点列 $\{x_n\}$ で，$|p{\circ}F(x_i)|\le c$ かつ $x_i\to\infty$ なるものがあるとして，矛盾を導けばよい．$|\iota(x_i)|<1$ より

$$\frac{F(x_i)}{f(x_i)}=\Big(\frac{\iota(x_i)}{f(x_i)},1\Big)\to(0,1)\qquad\Big|\frac{p{\circ}F(x_i)}{f(x_i)}\Big|<\frac{c}{f(x_i)}\to 0$$

なので

$$w_i=\frac{1}{f(x_i)}(F(x_i)-p{\circ}F(x_i))\to(0,1)$$

がわかる．定義より w_i は a の倍数であるから，その極限も a の倍数である．よって a は北極か南極である事が帰結できる．a にそんな制限ははなかったから矛盾．　□

X が境界付多様体の時も，同様の手法で固有な埋込が構成できる．

1.8　ホモトピー

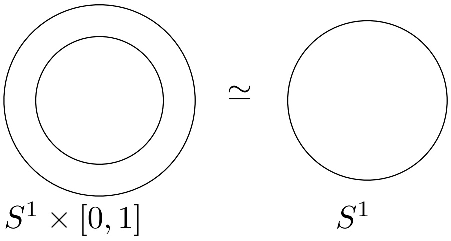
■ホモトピーの定義　2 つの C^∞ 写像 $f_0:X\to Y$ と $f_1:X\to Y$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，$f_0(x)=F(x,0)$, $f_1(x)=F(x,1)$ を満たす連続写像 $F:X\times[0,1]\to Y$ が存在するときを言う．写像 F を f_0 と f_1 を結ぶ**ホモトピー** (homotopy) という．

f_0 と f_1 がホモトピックという関係は同値関係であり，その同値類を**ホモトピー類**と呼ぶ．位相空間 X から位相空間 Y への連続写像の同値類全体を $[X,Y]$ で表す．

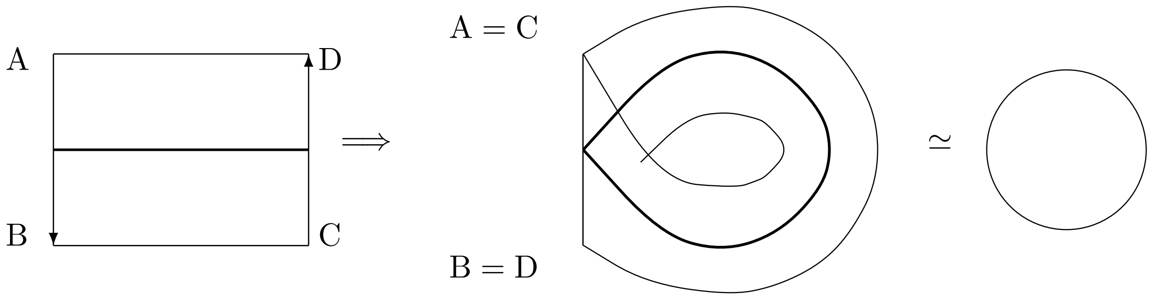
注意 X がコンパクトの時は，ホモトピーの定義で連続写像 $F:X\times[0,1]\to Y$ を C^∞ 写像に変えても同値となる．

■ホモトピー型　X,Y が**同じホモトピー型**を持つとは連続写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ があって $f{\circ}g$ が Y の恒等写像にホモトープで $f{\circ}g$ が X の恒等写像にホモトープとなるときを言う．X と Y がホモトープの時 $X\simeq Y$ と書く．

例 1.8.1. アニュラス $S^1\times[0,1]$ は S^1 と同じホモトピー型を持つ．



例 1.8.2. メビウスの帯 M は S^1 と同じホモトピー型を持つ．



■可縮空間　1 点と同じホモトピー型を持つ空間を**可縮**であるという．位相空間 X が可縮であるとは，$x_0 \in X$ に対し，写像 $g_0 : X \to \{x_0\}$ が存在し g_0 が恒等写像にホモトープであるときを言う．すなわち，次を満たす連続写像 G が存在する時を言う．

$$G : X \times [0,1] \to X,\ G(x,0) = g_0(x) = x_0,\ G(x,1) = x$$

連続写像 $f : X \to Y$ に対し，次が成り立つ．

- X が可縮なら f は 1 点からの写像にホモトープで，定値写像にホモトープである．
- Y が可縮なら f は定値写像にホモトープである．

■相対ホモトピー　位相空間対 (X,A), (Y,B) に対して，連続写像 $f : X \to Y$ が $f(A) \subset B$ を満たすとき f を (X,A) から (Y,B) への位相空間対の写像である と言い，

$$f : (X,A) \to (Y,B)$$

と書く．位相空間対の連続写像 $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ の間の対のホモトピーとは，連続写像

$$F : (X,A) \times [0,1] \to (Y,B)$$

で $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ を満たすものの事である．

位相空間対 (X,A) から位相空間対 (Y,B) への連続写像の同値類全体を $[(X,A),(Y,B)]$ で表す．

■**固有ホモトピー**　位相空間対の固有連続写像 $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ の間の対の**固有ホモトピー** (proper homotopy) とは，固有連続写像

$$F : (X, A) \times [0, 1] \to (Y, B)$$

で $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ を満たすものの事である．

■**イソトピー**　2 つの微分同相写像 f_0 と f_1 が**イソトピック** (isotopic) であるとは，$f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$ を満たす連続写像 $F : X \times [0, 1] \to Y$ で，各 $t \in [0, 1]$ に対し

$$f_t : X \to Y, \qquad x \mapsto F(x, t)$$

が微分同相写像であるようなものが，存在するときを言う．写像 F を f_0 と f_1 を結ぶ**イソトピー** (isotopy) という．f_0 と f_1 がイソトピックという関係は同値関係であり，その同値類を**イソトピー類**と呼ぶ．イソトピー f_t がコンパクト集合の外側で恒等写像に等しいとき，**コンパクト台**を持つという．

補題 1.8.3 (イソトピー補題)**.** 連結多様体 X の任意の 2 点 x, y が与えられたとき，$f(x) = y$ となる微分同相写像 f で恒等写像にイソトピックのものが存在する．さらに，イソトピーはコンパクト台を持つ様にできる．

証明. コンパクト台を持つイソトピーで恒等写像にイソトピックな微分同相写像で　2 点 x, y が移りあうとき，同値であるとする．これは同値関係で，同値類は開集合になることを示せれば，X の連結性より定理は証明された事になる．

$\mathbb{R}^n$ の原点に近い点 z を原点を移す $\mathbb{R}^n$ の微分同相写像で，コンパクト台を持つイソトピーで恒等写像にイソトープなものを構成すればよい．

まず $n = 1$ のとき示す．$(-\varepsilon, \varepsilon)$ に台を持つ C^∞ 関数 $\rho(x)$ で $\rho(0) = 1$ なるものをとる．コンパクト台をもつホモトピー

$$f_t(x) = x + t\rho(x)z$$

は $f_0(x) = x$, $f_1(0) = z$ をみたす．$\rho'(x)$ は $(-\varepsilon, \varepsilon)$ に台を持つ連続関数なので $|\rho'(x)|$ は最大値 M をもつ．よって $|z| < 1/M$ ならば

$$|f_t'(x)| = |1 + t\rho'(x)z| \geq 1 - |t\rho'(x)z| ge 1 - |\rho'(x)z| > 0$$

となり，f_t はイソトピーであることがわかる．

一般の n のとき，座標軸を回転させて原点に近い z が x_1 軸上にあると仮定してよい．原点で 1 で半径 δ の球体の外で 0 となる $\mathbb{R}^{n-1}$ の関数 $\sigma(y)$ をとる．$0 \leq \sigma(y) \leq 1$ とす

る．コンパクト台を持つホモトピー

$$f_t(x,y) = (x + t\rho(x)\sigma(y)z, y)$$

を考える．

$$\det f_t'(x,y) = \begin{vmatrix} 1 + t\rho'(x)\sigma(y)z & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + t\rho'(x)\sigma(y)$$

なので，$|z| < 1/M$ のとき，h_t はイソトピーである． □

定理 1.8.4. 次元が 2 以上の連結多様体 X の任意の $2n$ 点 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n$ が与えられたとき，$f(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる微分同相写像 f で恒等写像にイソトープのものが存在する．さらに，イソトピーはコンパクト台を持つ様にできる．

証明. $n = 1$ の時は前定理である．$n - 1$ の時正しいとする．

$X \setminus \{x_n, y_n\}$ は連結多様体なのでコンパクト台をもつイソトピー f_t で f_0 は恒等写像, $f_1(x_i) = y_i$ $(1 = 1, \ldots, n-1)$ なるものが存在する．コンパクト台を持つ事より，x_n, y_n の近傍では恒等写像である．よって イソトピー f_t は x_n, y_n の近傍にまで拡張される．

$X \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ も連結多様体なのでコンパクト台をもつイソトピー g_t で g_0 は恒等写像, $g_1(x_n) = y_n$ なるものが存在する．コンパクト台を持つ事より，x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ の近傍では恒等写像である．よって イソトピー g_t は x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ の近傍にまで拡張される．$h_t = f_t \circ g_t$ が求めるイソトピーである． □

1.9　近似定理

距離空間 (X, d) の実有界連続関数全体の集合を $C(X)$ と表す．集合 $C(X)$ においては，和，積および実数倍が定義でき，$C(X)$ を距離空間 (X, d) 上の実連続関数環という．

$C(X)$ の元 f に対して，$\|f\|$ を次で定める．

$$\|f\| = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

$C(X)$ の 2 元 f, g に対して

$$\delta(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

とおく．一般に，関数 δ は $C(X)$ の上の距離関数ではないが，距離関数に近いものである．$C(X)$ の元 f および正数 ε に対して

$$N(f;\varepsilon) = \{g \in C(X) : \delta(f,g) < \varepsilon\}$$

とおき，この形の集合を近傍基底とする $C(X)$ の位相を考える．

定理 1.9.1 (ワイエルシュトラスの多項式近似定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f と任意の正の数 ε に対して，次を満たす多項式 P が存在する．

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (x\in[a,b])$$

まず，恒等式をいくつか注意する．

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{1.9.1}$$

を x で微分して x をかけると

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k y^{n-k} \tag{1.9.2}$$

となり， x で 2 回微分して x^2 をかけると次を得る．

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k y^{n-k} \tag{1.9.3}$$

補題 1.9.2.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Bigl(x-\frac{k}{n}\Bigr)^2=\frac{x(1-x)}{n}$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Bigl(x-\frac{k}{n}\Bigr)^2\\
=&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Bigl(x^2+(\frac{1}{n^2}-\frac{2x}{n})k+\frac{k(k-1)}{n^2}\Bigr)\\
=&x^2+(\frac{1}{n^2}-\frac{2x}{n})nx+\frac{n(n-1)}{n^2}x^2 \qquad ((1.9.1),\ (1.9.2),\ (1.9.3)\text{ で } y=1-x \text{ とおく})\\
=&x^2+(\frac{1}{n}-2x)x+\frac{n-1}{n}x^2=x^2+\frac{x}{n}-2x^2+x^2-\frac{x^2}{n}=\frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

□

定理 1.9.1 の証明. $[a,b]=[0,1]$ として証明すれば十分．$\varepsilon>0$ を任意に取る．

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)$$

とおく．十分大きな n に対し P_n が求める多項式 P である事を示す．$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$ より，次の評価はすぐわかる．

$$|f(x)-P_n(x)| \le \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \tag{1.9.4}$$

$f(x)$ の一様連続性より $\delta>0$ が存在して，次を満たすようにできる．

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta \implies \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$|f(x)|\le K$ $(x\in[0,1])$ とする．A, B を次で定める．

$$A=\left\{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta\right\},\qquad B=\left\{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta\right\}.$$

式 (1.9.4) の右辺の和を $k\in A$ と $k\in B$ に分けて評価しよう．まず $k\in A$ のときは

$$\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

がわかる．$k\in B$ のときは $1\le\frac{1}{\delta^2}(x-\frac{k}{n})^2$ なので

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &\le 2K\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\le \frac{2K}{\delta^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \le \frac{2K}{n\delta^2}x(1-x) \le \frac{K}{2n\delta^2}\end{aligned}$$

となる．最後で $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ である事を使っている．よって $n>\frac{K}{\varepsilon\delta^2}$ とすれば，

$$|f(x)-P_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{K}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となる． □

定理 1.9.3 (ストーン-ワイエルシュトラス)**.** (X,d) をコンパクト距離空間とする．$C(X)$ の部分多元環 S が次の 2 条件を満たす場合，S は距離空間 $(C(X),\delta)$ において稠密である．すなわち S の閉包が $C(X)$ に一致する．

1. S は X の任意の 2 点を分離する．すなわち，X の相異なる任意の 2 点 x, y に対して，$f(x)\neq f(y)$ となる S の元 f が存在する．
2. S は X の各点で消滅しない．すなわち，X の任意の点 x に対して $g(x)\neq 0$ となる S の元 g が存在する．

系 1.9.4. $\mathbb{R}^N$ のコンパクト部分集合 X 上の連続関数 f と 任意の正の数 ε に対し，次を満たす多項式 P が存在する．

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad x \in X$$

補題 1.9.5. $C(X)$ の閉部分多元環 S に対し

(a) $f \in S$ ならば $|f| \in S$.

証明. 定理 1.9.1 より，連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$, は $[-\|f\|, \|f\|]$ で多項式で近似でき

$$||t| - P_1(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad |t| \leq \|f\|$$

を満たす多項式 P_1 が存在する．P_1 の定数項を 0 に変えた多項式を P とすれば

$$||t| - P(t)| \leq \varepsilon \qquad |t| \leq \|f\|$$

$f \in S$ とすると S は多元環なので $P(f) \in S$. S は閉集合なので $|f| \in S$. □

$f, g \in C(X)$ に対し

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

とおく．

補題 1.9.6. X がコンパクトで $C(X)$ の閉部分多元環 S が次を満たせば $S = C(X)$.

(b) 2 点 $x, y \in X$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = a$, $f(y) = b$ を満たす $f \in S$ が存在する．

証明. 補題 1.9.5 より条件 (a) が成り立ち $f \vee g$, $f \wedge g$ の定義より，次が成り立つ．

(c) $f, g \in S$　ならば　$f \vee g \in S$, $f \wedge g \in S$

条件 (b), (c) を満たす，部分集合 S は $C(X)$ で稠密である事を示す．任意の正の数 ε に対し次を満たす $g \in S$ が存在する事を示す．

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

$x \in X$ を固定する．仮定より，任意の $y \in X$ に対し次を満たす $f_{x,y}$ が存在する．

$$f_{x,y}(x) = f(x), \qquad f_{x,y}(y) = f(y)$$

開集合 $U_{x,y}$ を $U_{x,y} = \{z \in X : f_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$ で定めると $x, y \in U_{x,y}$.

$$\text{よって}\quad X = \bigcup_{y:y\neq x} U_{x,y} \quad \text{であり，} X \text{ のコンパクト性より } X = U_{x,y_1} \cup \cdots \cup U_{x,y_n}$$

なる $y_1, \ldots, y_n$ が存在する．$g_x = f_{x,y_1} \wedge \cdots \wedge f_{x,y_n}$ とおくと

$$g_x(x) = f(x), \quad g_x(z) < f(z) + \varepsilon.$$

である．開集合 $V_x = \{z \in X : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$ は $x \in V_x$ より，X の開被覆をなす．X のコンパクト性より

$$X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$$

なる $x_1, \ldots, x_m$ が存在する．$g = g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_m}$ とおくと $g \in S$ で

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon, \quad z \in X.$$

よって定理は証明された． □

定理 1.9.3 の証明．2 点 $x, y \in X$ に対し $g(x) \neq g(y)$ となる $g \in S$ をとる．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(z) = a\frac{g(z) - g(y)}{g(x) - g(y)} + b\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

とおくと $f \in S$, $f(x) = a$, $f(y) = b$ である． □

補題 1.9.7. U, V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$\overline{U} \subset V$ かつ U の閉包がコンパクトであるとする．このとき次を満たす C^∞ 関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する．

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus V \\ 1 & x \in \overline{U} \end{cases}$$

証明．$\overline{U}$ を覆う有限個の直方体 D_i をとる．D_i は閉包が V には入っているように取れる．D_i' を D_i の閉包を含み，V には入る直方体とする．C^∞ 関数 $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次を満たすようにとる．

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1, \qquad \varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin D_i' \\ 1 & x \in D_i \end{cases}$$

$1 - \varphi = \prod_i (1 - \varphi_i)$ を満たす φ が求めるものである． □

補題 1.9.8. U, V, W を $\mathbb{R}^n$ の開集合で，$\overline{U} \subset V$, $\overline{V} \subset W$, $\overline{V}$ はコンパクトとする．W の開集合 U' 上 C^∞ である連続関数 $f : W \to \mathbb{R}$ と，$\varepsilon > 0$ に対し，次を満たす連続関数 $g : W \to \mathbb{R}$ が存在する．

- $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ $(x\in W)$.
- g は $U\cup U'$ 上 C^∞ 級
- $g(x)=f(x)$ $(x\in W\setminus\overline{V})$.

証明. 次を満たす多項式 $P(x)$ が存在する．

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (x\in\overline{V})$$

前補題より C^∞ 関数 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ で

$$0\le\varphi(x)\le 1, \qquad \varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in\overline{U}\\ 0 & x\notin V\end{cases}$$

を満たすものが存在するので，

$$g(x)=\varphi(x)P(x)+(1-\varphi(x))f(x)$$

とおけばこれが求めるものである．実際

$$|f(x)-g(x)|=|\varphi(x)||f(x)-P(x)|\le\begin{cases}0 & (x\notin V)\\ |f(x)-P(x)|<\varepsilon & (x\in V)\end{cases}$$

である． □

定理 1.9.9 (連続写像の C^∞ 写像による近似)**.** 多様体 X 上定義された連続写像 $f:X\to\mathbb{R}^p$ が X の閉部分集合 A 上で C^∞ 級であるとする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，次を満たす C^∞ 級写像 $h:X\to\mathbb{R}^p$ が存在する．

$$|h(x)-f(x)|<\varepsilon\ (x\in X), \qquad h(x)=f(x)\ (x\in A)$$

C^∞ 関数を解析関数で近似する同様の問題を考える事により，ナッシュというカテゴリが定義され，いつ近似可能か研究されている．

証明. コンパクト集合列 $\{K_i\}$ で

$$X=\bigcup_i K_i, \qquad K_i\subset\operatorname{Int}K_{i+1}$$

なるものをとる．$x\in S_i=\overline{K_i\setminus K_{i-1}}$ に対し x を内点に含む直方体を S_j $(j=i-1,i,i+1)$ と交わらないようにとる．S_i はコンパクトなのでこのような直方体のうち有限個が S_i を覆う．この有限個の直方体の合併を D_i と書くと次が成り立つ．

$$\overline{K_i\setminus K_{i-1}}\subset D_i$$

$A_0=A$, $A_i=A_{i-1}\cup D_i$ $(i=1,2,\dots)$ として，次を満たす f_i を順に構成する．

1. $j < i,\, x \in A_j$ ならば $f_i(x) = f_j(x)$.
2. $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon\ (x \in A_i)$.
3. f_i は A_i で C^∞ 級

$f_0 = f$ とおけば条件を満たす．$i \le k$ なる i に対し f_i が構成されたとする．A_k を含むある開集合 U' で f_k は C^∞ 級で

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon\ (x \in U')$$

とする．$D = D_{k+1} \setminus U'$ と置くと，$D \cap A_k = \emptyset$ なので，次を満たす開集合 U, V, W が存在する．

$$D \subset U,\ \overline{U} \subset V,\ \overline{V} \subset W,\ W \cap A_k = \emptyset$$

$\overline{V}$ はコンパクトで W は D_i のうち有限個とのみ交わる．前補題より，次を満たす連続関数 $g : W \to \mathbb{R}^p$ が存在する．

- $|g(x) - f(x)| < \varepsilon\ (x \in W)$.
- g は $U \cup U'$ 上 C^∞ 級
- $g(x) = f(x)\ (x \in W \setminus \overline{V})$.

ここで，次のように置けば求める f_{k+1} が得られる．

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f_k(x) & x \notin W \\ g(x) & x \in W \end{cases}$$

$X = \bigcup_k A_k$ であり $h(x) = f_k(x)\ (x \in A_k)$ とおけば定理の証明が終わる． □

1.10 写像空間の位相

1.10.1 写像空間の点収束位相とコンパクト開位相

X, Y を位相空間とし，X から Y への連続写像全体を $C(X, Y)$ で表す．$C(X, Y)$ に位相を入れるのが目的である．

定義 1.10.1 (点収束位相)**.** $C(X,Y)$ は Y^X の部分集合である．Y^X の位相から，$C(X,Y)$ に自然に位相空間の構造が入る．この位相を**点収束位相**と言う．定義より点収束位相は，すべての $x \in X$ について

$$\mathrm{ev}_x : C(X,Y) \to Y, \qquad f \mapsto f(x)$$

を連続にするような最弱の位相である．

$x_1, \ldots, x_k \in X$, U を Y の開集合として

$$W(x_1, \ldots, x_k; U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(x_i) \in U, \imath = 1, \ldots, k\}$$

と置く．点収束位相は $\{W(x_1, \ldots, x_k; U) \mid x_1 \ldots, x_k \in X, U \in \mathrm{Open}(Y)\}$ を開基底とする位相である．点収束位相は単純であるが，後で述べるように，写像

$$\Phi : C(X,Y) \times X \longrightarrow Y \qquad \Phi(f,x) = f(x)$$

は一般には連続とは限らない．これを連続にするには点収束位相より強い位相を考える必要がある．

定義 1.10.2 (コンパクト開位相)**.** X のコンパクト部分集合 K と Y の開部分集合 U に対し

$$W(K,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$$

とおく．

$$\{W(K,U) \mid K \subset X, \text{コンパクト}, \ U \subset Y, \text{開}\}$$

は部分開基底の公理を満たすので，これを部分開基底とするような位相を $C(X,Y)$ に入れることができる．この位相を**コンパクト開位相** (または**弱位相**) という．$C(X,Y)$ にコンパクト開位相を入れた位相空間を $C_W(X,Y)$ であらわす．W は weak の頭文字である．

定理 1.10.3. X を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする．写像

$$\Phi : C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

を $\Phi(f,x) = f(x)$ で定義すれば，コンパクト開位相から誘導された位相に関して Φ は連続である．さらに，Φ を連続にするような最も弱い $C(X,Y)$ の位相はコンパクト開位相である．

証明. 任意の $(f_0, x_0) \in C(X,Y) \times X$ に対し $f_0(x_0) \in U$ なる開集合 $U \subset Y$ をとる．このとき x_0 のコンパクト近傍 K をとり $x \in K$, $f \in W(K,U)$ とすれば $\Phi(f,x) = f(x) \in U$. よって $W(K,U) \times K \subset \Phi^{-1}(U)$.

$C(X,Y)$ のある位相 $\mathcal{T}$ に関し，Φ が連続であれば，Y の開集合 U と X のコンパクト集合 K に対し，$W(K,U)$ が $\mathcal{T}$ 開集合である事を示そう．Φ が連続なので，

$$V = (C(X,Y) \times K) \cap \Phi^{-1}(U)$$

は $C(X,Y) \times K$ の開集合である．$f \in W(K,U)$ ならば $\{f\} \times K \subset V$ であり $\{f\} \times K$ がコンパクトなので $N \times K \subset \Phi^{-1}(U)$ となる f の $\mathcal{T}$ 近傍が存在する[*5]．よって f の $\mathcal{T}$ 近傍の各点が $W(K,U)$ に属する事がわかり $W(K,U)$ は $\mathcal{T}$ 開集合である．□

[*5] 位相空間 X, Y とそのコンパクト部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ があるとき，$A \times B$ の任意の近傍は，$U \times V$ （U, V はそれぞれ X, Y の開集合）という形の集合を含む．

定理 1.10.4. X が σ コンパクト位相空間で Y が距離空間ならコンパクト開位相による収束はコンパクト一様収束である．さらに X が第二可算公理を満たし, Y が完備距離空間ならば $C_W(X,Y)$ は完備距離空間になる．

略証. X がコンパクトのときは Y の距離関数 d_Y を用いて

$$d(f,g) := \sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$$

とおけば $C(X,Y)$ は距離空間となり, この距離空間から定まる位相が弱位相になる．さらに Y が完備距離空間なら $C_W(X,Y)$ も完備距離空間となる．

X がコンパクトでないとき, 仮定より X は可算個のコンパクト集合 $(X_n)_{n=1,2,\dots}$ の和集合として書ける．$C_W(X_n,Y)$ は完備距離空間である．

$$\rho : C_W(X,Y) \longrightarrow \prod_n C_W(X_n,Y), \quad f \mapsto (f|_{X_n})_n$$

は上への同相写像でその像は閉集合である．可算個の完備距離空間の直積は完備距離空間で $C_W(X,Y)$ はその閉集合と同相なので $C_W(X,Y)$ にも完備距離空間の構造が入る． □

1.10.2　写像空間の強位相

写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し, その**グラフ** Γ_f を次で定義する．

$$\Gamma_f := \{(x,f(x)) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

定義 1.10.5 (強位相)**.** 直積位相空間 $X \times Y$ の開部分集合 V に対し

$$W(V) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset V\}$$

とおく．$\{W(V) \mid V \subset X, \text{開集合}\}$ は開基底の公理を満たすのでこれを開基底とするような位相を考える事ができる．この位相を**強位相**といい, $C(X,Y)$ に強位相を入れた位相空間を $C_S(X,Y)$ であらわす．X がパラコンパクトで, Y が距離空間のとき, $f \in C(X,Y)$ と 正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ に対し

$$B_\delta(f) = \{g \in C(X,Y) \mid d(g(x),f(x)) < \delta(x),\ \forall x \in X\}$$

とおけば, この形の集合全体が f の近傍基底をなす．局所有限な X のコンパクト被覆 $\{K_\alpha\}$ と Y の開被覆 $\{V_\alpha\}$ に対し，次の形の集合が部分開基底になる．

$$\{f : X \to Y : f(K_\alpha) \subset V_\alpha\ \forall \alpha\}$$

補題 1.10.6. 強位相は弱位相より強い．

証明. X のコンパクト部分集合 K と, Y の開部分集合 U に対して $W(K,U)$ が強位相の意味での開集合である事を示す. $f \in W(K,U)$ を任意にとるとき,

$$f \in W(V) \subset W(K,U)$$

を満たすような $X \times Y$ の開集合 V が存在すればよい. $V = X \times U$ が求めるものである. □

注意 1.10.7. X がコンパクトならば弱位相と強位相は一致するが, X がコンパクトでないときは強位相は弱位相より真に強い位相である.

以後 X, Y は距離空間とする.

定理 1.10.8. *X がコンパクトでないとき $C_S(X,Y)$ は第一可算公理を満たさない. したがって $C_S(X,Y)$ は距離空間にならない.*

証明. $f \in C(X,Y)$ として f の可算個の近傍基底 W_1, W_2,... があったとして矛盾を導く.

正値連続関数 $\delta_m : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ で $B_{\delta_m}(f) \subset W_m$ なるものをとる. X はコンパクトでないので集積点を持たない X の点列 (x_n) が存在する. そこで正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ で

$$\delta(x_n) < \delta_n(x_n),\ \forall n$$

なるものをとる. $\{W_m\}$ は近傍基底であったからある番号 m が存在して

$$W_m \subset B_\delta(f).$$

ところが $B_{\delta_m} \subset W_m$ であったから $\delta_m(x) \leq \delta(x)$ となり矛盾. □

定理 1.10.9. *X は σ コンパクトな距離空間とする. 関数列 $\{f_n\}$ が強位相に関して f に収束する事は次の条件と同値である: あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して次の条件を満たす.*

- $\{f_n|_K\}$ は $f|_K$ に一様収束.
- ある番号 N があって $n \geq N$ ならば $f_n|_{X-K} \equiv f|_{X-K}$

証明. この条件を満たせば $\{f_n\}$ が強位相の意味で f に収束するのは明らかだから, 強位相の意味で $\{f_n\}$ が f に収束していて条件を満たすコンパクト集合がないと仮定して矛盾を導く.

X のコンパクト部分集合 $\{K_i\}, i = 1, 2, \ldots$ で

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad K_i \subset \mathrm{Int}(K_{i+1})$$

なるものをとる．このとき「$\{f_n\}$ のうち 無限個が $B_\delta(f)$ に属さない」ような連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が存在する事を示せばよい．まず

- ℓ_1 を $f_{\ell_1} \neq f$ なるようにとる．
- x_1 を $d(f_{\ell_1}(x_1), f(x_1)) = a_1 > 0$ なるようにとる．
- m_1 を $x_1 \in K_{m_1}$ なるようにとる．

ここで K_{m_1} 上 $\delta := a_1$ で関数 δ を定義する．

次に $\ell_1, \ldots, \ell_s$ $(\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_s)$ と m_s が既にきまっていて δ が K_{m_s} 上の連続関数として定義されていると仮定する．

- ℓ_{s+1} $(> \ell_s)$ を $X - K_{m_s+1}$ 上 $f_{\ell_{s+1}} \neq f$ なるようにとる．
- $x_{s+1} \notin K_{m_s+1}$ を $d(f_{\ell_{s+1}}(x_s), f(x_s)) = a_{s+1} > 0$ なるようにとる．
- m_{s+1} を $x_{s+1} \in K_{m_{s+1}}$ なるようにとる．

ここで δ を次の条件を満たすように $K_{m_{s+1}}$ 上に連続に拡張する．

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta(x) & x \in K_{m_s} \\ a_{s+1} & x \in K_{m_{s+1}} - K_{m_s+1} \end{cases}$$

このプロセスを無限回繰り返せば $f_{\ell_1}, f_{\ell_2}, \ldots$ と正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が構成できて

$$f_{\ell_j} \notin B_\delta(f), \quad j = 1, 2, \ldots$$

となる．よって f_n は f に収束しない． □

任意の開被覆が局所有限な細分を持つ位相空間をときパラコンパクト位相空間という．

次の定理は証明をしない．

定理 1.10.10. パラコンパクト空間 X と完備距離空間 Y に対して $C_S(X, Y)$ は Baire 空間になる．

定理 1.10.11. 固有写像全体 $\mathrm{Prop}^r(M, N)$ は $C^r_S(M, N)$ の開集合である．

証明. 写像 $f : M \to N$ に対し，M のコンパクト被覆 $\{K_i\}$ と $f(K_i) \subset V_i$ を満たす $f(M)$ の開被覆 $\{V_i\}$ をとる．f が固有写像ならば N の局所有限なコンパクト被覆 $\{L_i\}$ に対し $K_i = f^{-1}(L_i)$ とおき V_i を L_i の小近傍と取る事により $\{V_i\}$ は局所有限に取れる．

$$\mathcal{N} = \{g \in C^r(M, N) : g(K_i) \subset V_i\}$$

は固有写像からなる f の近傍である．実際 $L \subset N$ をコンパクトとすると L は有限個

の V_i としか交わらず，$g^{-1}(L)$ は M の閉集合であり，有限個の K_i で覆われる．よって $g^{-1}(L)$ はコンパクトである． □

第 2 章

横断性と交点数

2.1 横断性

$f; X \to Y$ が Y の部分多様体 S に**横断的**である ($f \pitchfork S$) とは次の条件が成り立つときをいう.

$f(x) \in S$ ならば $df_x(T_xX) + T_{f(x)}S = T_{f(x)}Y$

定理 2.1.1. $f : X \to Y$ が Y の余次元 k の部分多様体 S に横断的ならば $f^{-1}(S)$ は X の余次元 k の部分多様体である.

証明. 仮定より $f(x) \in S$ ならば, 次が成り立つ.

$$df_x(T_xX) + T_{f(x)}S = T_{f(x)}Y$$

局所沈め込み $g : (Y, y) \to \mathbb{R}^k$ を $S = g^{-1}(0)$ なるように取る.

$$\begin{tikzcd}
 & & T_xX \arrow[r, "d(g\circ f)"] \arrow[d, "df"'] & T_0\mathbb{R}^k & \\
0 \arrow[r] & T_{f(x)}S \arrow[r] & T_{f(x)}Y \arrow[r] \arrow[ur, "dg"'] & T_{f(x)}Y/T_{f(x)}S \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & 0
\end{tikzcd}$$

横断性の仮定より T_xX から $T_{f(x)}X/T_{f(x)}S$ への自然な写像が全射なので $d(d\circ f)$ も全射である. $g\circ f$ は沈めこみで $(g\circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(S)$ なので証明が終わる. □

証明を反省すると次のような可換図式がある事がわかる.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} df \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T_x f^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d] & T_x X \arrow[r] \arrow[d, "df"'] & T_x X / T_x f^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{f(x)} S \arrow[r] & T_{f(x)} Y \arrow[r] & T_{f(x)} Y / T_{f(x)} S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

2.1.1　横断性定理

定理 2.1.2 (横断性定理)．X を境界付多様体，Y, U を境界のない多様体，S を境界のない Y の部分多様体とする．写像

$$F : X \times U \to Y,\ (x,u) \mapsto F(x,u) \quad と \quad \partial F : \partial X \times U \to Y,\ (x,u) \mapsto F(x,u)$$

が S に横断的ならば，ほとんどすべての $u \in U$ に対して

$$f_u : X \to Y,\ x \mapsto f_u(x) = F(x,u), \qquad \partial f_u : \partial X \to Y,\ x \mapsto f_u(x) = F(x,u)$$

は S に横断的である．

証明．$W = F^{-1}(S)$ は境界 $\partial W = W \cap \partial(X \times U)$ を持つ多様体である．$\pi : X \times U \to U$ を自然な射影とする．以下の議論より

- $\pi : W \to U$ が正則値 u を持つときは $f_u \pitchfork S$ であり
- $\pi : \partial W \to U$ が正則値 u を持つときは $\partial f_u \pitchfork S$ である．

よってサードの定理より証明される．□

$F \pitchfork S$ at x より次の可換図式がある．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{(x,u)} F^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d] & T_{(x,u)}(X \times U) \arrow[r] \arrow[d, "dF"'] & T_{(x,u)}(X \times U)/T_{(x,u)} F^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{F(x)} S \arrow[r] & T_{F(x)} Y \arrow[r] & T_{F(x)} Y / T_{F(x)} S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

よって，次を得る．

$$
\begin{aligned}
& f_u \pitchfork S \text{ at } x \\
\Longleftrightarrow & \ [\forall x\ f_u(x) \in S \Longrightarrow df_u(T_x X) + T_{f(x)} S = T_{f(x)} Y]
\end{aligned}
$$

$$\iff [\forall x\ f_u(x) \in S \Longrightarrow [df_u] : T_xX \to T_{f_u(x)}Y/T_{f_u(x)}S \text{ が全射}]$$
$$\iff [\forall x\ f_u(x) \in S \Longrightarrow T_{(x,u)}(X \times \{u\}) \to T_{(x,u)}(X \times U)/T_{(x,u)}F^{-1}(S) \text{ が全射}]$$
$$\iff [\forall x\ (x,u) \in F^{-1}(S) \Longrightarrow T_{(x,u)}(X \times \{u\}) + T_{(x,u)}F^{-1}(S) = T_{(x,u)}(X \times U)]$$
$$\iff [\forall x\ (x,u) \in F^{-1}(S) \Longrightarrow d\pi : T_{(x,u)}F^{-1}(S) \to \frac{T_{(x,u)}(X \times U)}{T_{(x,u)}(X \times \{u\})} \simeq T_uU \text{ が全射}]$$
$$\iff [\forall x\ (x,u) \in F^{-1}(S) \Longrightarrow \pi : (F^{-1}(S),(x,u)) \to (U,u) \text{ が沈め込み}]$$

この同値な言い換えが横断性定理の鍵となる事実である．

例 2.1.3. $f : X \to \mathbb{R}^N$ を任意の C^∞ 写像とするとき

$$F : X \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad (x,u) \mapsto f(x) + u$$

と定めると F は沈め込みであり，F は $\mathbb{R}^N$ の任意の部分多様体 S に横断的である．よって，ほとんどすべての $u \in \mathbb{R}^N$ に対し，写像

$$f_u : X \to \mathbb{R}^N, \quad x \mapsto f(x) + u$$

は，S に横断的である．

2.1.2　管状近傍定理

定理 2.1.4 (ε 近傍定理)**.** $\mathbb{R}^M$ における部分多様体 Y と Y 上定義された正値関数 ε に対し

$$Y^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^M : \exists y \in Y\ \ \mathrm{dist}(x,y) < \varepsilon(y)\}$$

とおく．$x \in Y^\varepsilon$ に対し $\pi(x) \in Y$ を $d(x,\pi(x)) = \mathrm{dist}(x,Y)$ なるように取る．ε を十分小さくとれば，このような $\pi(x)$ は一意に定まり，$\pi : Y^\varepsilon \to Y$ は沈め込みである．

$\mathbb{R}^M$ の部分多様体 Y と Y の点 y に対し，T_yY の $T_y\mathbb{R}^M$ における直交補空間を y での Y の**法空間**と言い，N_yY であらわす．法空間を集めたものを**法束**といい NY で表す．具体的には，法束は次のように表される．

$$NY = \{(x,v) \in Y \times \mathbb{R}^m : v \in N_yY\}$$

Y の開集合 U に対し $U = Y \cap \widetilde{U}$ なる $\mathbb{R}^M$ の開集合を取り，沈め込み $\phi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$ の零点集合が U であるとする．$d\phi_y : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^k$ は全射であり，その核は T_yY である．したがって $d\phi_y$ の転置行列の定める写像は，その像が N_yY である．したがって，写像

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to NY|_U, \quad (y,v) \mapsto (y, {}^t d\phi_y(v))$$

が NY の径数表示を与える．ただし

$$NY|_U = \{(x, v) \in Y \times \mathbb{R}^m : y \in U, v \in N_y Y\}$$

と書いている．自然な写像 $\sigma : NY \to Y$, $(y, v) \mapsto y$ は沈め込みである．なぜなら $\sigma \circ \psi(y, v) = y$ が沈め込みだからである．

定理 2.1.4 の証明. $h : NY \to \mathbb{R}^M$ を $h(y, v) = y + v$ で定める．
h は $Y \times 0$ を Y に写し，$\{y\} \times N_y Y$ を $N_y Y$ に写す．よって $dh_{(y,0)}$ は

- $T_{y,0}(Y \times \{0\})$ を $T_y Y$ に写し
- $T_{y,0}(\{y\} \times N_y Y)$ を $N_y Y$ に写す．

したがって，$dh_{(y,0)}$ は同型であり，h は $Y \times \{0\}$ の近傍から Y の近傍への同型写像を定める．Y の任意の近傍はある Y^ε を含むので $\pi = \sigma \circ h^{-1} : Y^\varepsilon \to Y$ が求める沈め込みである． □

例 2.1.5. C^∞ 写像 $f : X \to Y$ に対し

$$F : X \times \mathbb{R}^M \to Y, \qquad (x, u) \to \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))u)$$

と置く．$x \in X$ を固定すると

$$\mathbb{R}^M \to Y, \qquad u \to \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))u)$$

は $u = 0$ のある開近傍で沈め込みで，よって F, ∂F もその開近傍で沈め込みである．よって任意の部分多様体に横断的であるような f_u, $f_u(x) = F(x, u)$, が f にいくらでも近く取れる．

定理 2.1.6 (拡張定理)**.** X を境界のある多様体，Y を境界のない多様体，S を Y の部分多様体とする．写像 $f : X \to Y$ が X の閉部分集合 C 上 $f \pitchfork S$, $\partial f \pitchfork S$ とすると f にホモトープである写像 $h : X \to Y$ が存在して $h \pitchfork S$, $\partial h \pitchfork S$ かつ C の近傍上 $f = h$ と出来る．

補題 2.1.7. X の閉集合 C の開近傍を U とする．U の外側で恒等的に 1, C のある近傍上 0 である C^∞ 関数 $g : X \to [0, 1]$ が存在する．

証明. C' を U の閉集合とし $C \subset \mathrm{Int}(C')$ とする．開被覆 $\{U,\ U \setminus C'\}$ に従属する 1 の分割 $\{\varphi_i\}$ をとる．

$$g(x) = \sum_i \varphi_i(x) : \mathrm{supp}\,(1 - \varphi_i) \subset C'$$

とおくとこれが求めるもの． □

定理 2.1.6 の証明. C の近傍で $f \pitchfork S$ である事に注意する．

補題の $g : X \to [0,1]$ を取り，

$$F : X \times \mathbb{R}^M \to Y, \qquad (x,u) \mapsto \pi(f(x) + \varepsilon(f(x))g(x)^2 u)$$

で F を定めると，$u=0$ の近傍で $F \pitchfork S$ であり，$\partial F \pitchfork S$ である．
$u=0$ で沈めこみになる事が鍵である． □

∂X は X の閉集合なので C として ∂X をとれば，次を得る，

系 2.1.8. $f : X \to Y$ の境界写像 $\partial f : X \to Y$ が S に横断的ならば f にホモトープな写像 g が存在して $\partial f = \partial g$ かつ $g \pitchfork S$ となる．

定理 2.1.9. 境界のあるコンパクト多様体 X に対し $\partial g : \partial X \to \partial X$ が恒等写像である C^∞ 写像 $g : X \to \partial X$ は存在しない．

証明. g の正則値を z とすると $g^{-1}(z)$ は境界のある 1 次元コンパクト多様体である．したがって $\partial g^{-1}(z)$ は偶数個の点からなる．しかし ∂g は恒等写像であるから

$$\partial g^{-1}(z) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\}$$

となり矛盾． □

定理 2.1.10 (Browner の固定点定理)**.** C^∞ 写像 $f : B^n \to B^n$ は固定点を持つ．

証明. 固定点がないとする．$f(x)$ から出発し x を通る直線が ∂B^n と交わる点を $g(x)$ とする．

$$g(x) - f(x) = t(x - f(x))$$

より $g(x) = f(x) + t(x - f(x))$ なので

$$1 = |g(x)|^2 = |f(x)|^2 + 2tf(x) \cdot (x - f(x)) + t^2|x - f(x)|^2$$

となり，これは t についての 2 次方程式で

$$t = \frac{-f(x) \cdot (x^f(x)) + \sqrt{(f(x) \cdot (x - f(x)))^2 - (|x - f(x)|^2)(|f(x)|^2 - 1)}}{|x - f(x)|^2}$$

を得るので，g は C^∞ 関数である．$x \in \partial B^n$ であれば $g(x) = x$ となるので，前定理に矛盾． □

例 2.1.11. 連続写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ は不動点を持つ．これは前定理の系であるが，初等的にも証明できる．$g(x) = f(x) - x$ とおく．0 も 1 も f の不動点でないとすると

$f(0) > 0,\ f(1) < 1$ なので $g(0) > 0,\ g(1) < 0$ となり中間値の定理より $g(c) = 0$ となる $c\ (0 < c < 1)$ が存在する．この c が f の不動点である．

定理 1.8.4 は次のように一般化される．

定理 2.1.12 (イソトピー補題 2)**.** コンパクト n 次元多様体 X から $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 2n+2)$ への 2 つの埋込 $f_0, f_1 : X \to \mathbb{R}^p$ はイソトピックである．さらに，イソトピーはコンパクト台を持つ様にできる．

証明. X はコンパクトなので $f_0,\ f_1$ はどちらも定値写像にホモトピックである．よって $f_0,\ f_1$ はホモトピックであり，X のコンパクト性より f_0 と f_1 は C^∞ ホモトピー

$$F : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^p$$

で繋げるとしてよい．$p \geq 2n+2$ より F を少し変形してこれをイソトピーにすることができる．定理 1.7.1 の証明を参照のこと． □

2.2　交点理論

2.2.1　ベクトル空間の向き

実ベクトル空間 V に対し 2 つの順序づけられた基底 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n),\ B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ をとる．線形代数の知識より，$AP = B$ となる正則行列 P が存在する．このとき

- $\det(P) > 0$ のとき A と B は V に**同じ向き**を定めると言い，
- $\det(P) < 0$ のとき A と B は V に**逆の向き**を定めると言う．

同じ向きを定めるという関係は基底全体のなす集合上に同値関係を定め，この同値関係はちょうど 2 つの同値類を持つ．この同値関係による商集合を集合 $\{+1, -1\}$ と同一視するとき，V は**向き付けられた**という．

2.2.2　多様体の向き

多様体 M の接束 TM を考える．M の開集合 U 上の，TM の断面

$$\boldsymbol{a}_i : U \to TM, \quad i = 1, \ldots, n$$

が, 各点 $P \in U$ に対し, $\boldsymbol{a}_1(P), \ldots, \boldsymbol{a}_n(P)$ が T_PM の基底となるとき, $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を U 上の**枠**という．枠は 各点 $P \in U$ に対し T_PM の向きを定める．U 上に 2 つの枠

$A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$, $B=(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$ があるとき線形代数の知識より，$AP=B$ となる正則行列を値にもつ U 上の関数 P が存在する．

- $\det(P)>0$ のとき A と B は M に U 上**同じ向き**を定めると言い
- $\det(P)<0$ のとき A と B は M に U 上**逆の向き**を定めると言う．

M の開集合 U とその上の枠 A_U の対 (U,A_U) の成す集合全体に (U,A_U) と $(V.A_V)$ が同じ向きを定めるという条件で関係を定義し，その生成する同値関係が

- ちょうど 2 つの同値類もつとき，M は**向き付け可能**であると言い，
- ちょうど 1 つの同値類もつとき，M は**向き付け不可能**であると言う．

M を向き付け可能とし，同値関係の商集合と集合 $\{+1,-1\}$ との同一視が与えられたとき，多様体 M は**向き付けられた**という．言い換えると，多様体 M の開被覆 $\mathcal{U}=\{U\}$ と U 上の枠 A_U が指定されていて，次の条件を満たすとき M は向き付けられた多様体であるという．

- A_U と A_V が $U\cap V$ 上同じ向きを定める．

逆の向き　X を向き付けられた多様体としたとき，その向きを変えて得られる多様体も向き付き多様体であり，$-X$ で表す．
積の向き　X,Y が向き付けられた多様体のとき $X\times Y$ に自然に向きが入る．$\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ を向き付けられた T_xX の基底，$\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ を向き付けられた T_yY の基底とするとき

$$\boldsymbol{a}_1\times 0,\ldots,\boldsymbol{a}_m\times 0, 0\times\boldsymbol{b}_1,\ldots,0\times\boldsymbol{b}_n$$

は $T_{(x,y)}(X\times Y)=T_x\oplus T_yY$ の基底になる．この基底が定める $X\times Y$ の向きを X,Y それぞれの向きから誘導された向きという．このとき次のように書く．

$$X \text{ の向き} + Y \text{ の向き} = X\times Y \text{ の向き}$$

境界の向き　向き付けられた境界付多様体 X があれば，その境界 ∂X に自然に次の関係で向きが定まる．

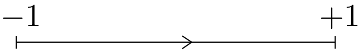
$$X \text{ の向き} = \partial X \text{ の向き} + \boldsymbol{n} \text{ の向き}$$

ただし境界での外向き法ベクトルを $\boldsymbol{n}$ としている．X を境界のない向き付けられた多様体，$I=[0,1]$, $X_t=X\times\{t\}$ とすれば，X_t は，同型 $X\to X\times\{t\}$ により X と同型な向き付けられた多様体になり次を得る．

$$\partial(X\times I)=X_1\cup(-X_0)=X_1-X_0$$

右辺は X_1 と $-X_0$ の和集合という意味である．

補題 2.2.1. 向き付けられたコンパクト 1 次元多様体の境界の向きの和は 0 である．



■商ベクトル空間の向き　実ベクトル空間 V とその部分空間 W に対し，その像が V/W の基底となるような 2 つの順序づけられたベクトルの組 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ をとる．線形代数の知識より，$AP = B \mod W$ となる正則行列 P が存在する．

- $\det(P) > 0$ のとき A と B は (V, W) に**同じ向き**を定めると言い，
- $\det(P) < 0$ のとき A と B は (V, W) に**逆の向き**を定めると言う．

■M/S の向き　多様体 M と部分多様体 S の対 (M, S) に対し，M の開集合 U 上の，TM の断面

$$\boldsymbol{a}_i : U \to TM, \quad i = 1, \ldots, n$$

が，各点 $P \in U \cap S$ に対し，$\boldsymbol{a}_1(P)$, …, $\boldsymbol{a}_n(P)$ の像が T_PM/T_PS の基底となるとき，$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を U 上の TM/TS の**枠**という．TM/TS の枠は 各点 $P \in U$ に対し T_PM/T_PS の向きを定める．U 上に 2 つの TM/TS の枠 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ に対し，線形代数の知識より，$AP = B \mod TS$ となる正則行列を値にもつ U 上の関数 P が存在する．

- $\det(P) > 0$ のとき A と B は M/S に U 上，**同じ向き**を定めると言い
- $\det(P) < 0$ のとき A と B は M/S に U 上，**逆の向き**を定めると言う．

M の開集合 U とその上の TM/TS の枠 A_U の対 (U, A_U) の成す集合全体に (U, A_U) と (V, A_V) が同じ M/S の向きを定めるという条件で関係を定義し，その生成する同値関係が

- ちょうど 2 つの同値類もつとき，M/S は**向き付け可能**であると言い，
- ちょうど 1 つの同値類もつとき，M/S は**向き付け不可能**であると言う．

M/S を向き付け可能とし，同値関係の商集合と集合 $\{+1, -1\}$ との同一視が与えられたとき，M/S は**向き付けられた**という．M/S の向きを S の M での**余向き** (coorientation) という事もある．

向き付けられた多様体 M の部分多様体 S については，向きを与える事と余向きを与える事は同値である．このことは次のように見る．

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を S の接空間の基底とし $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が M の接空間の向き付けられた基底

であるように $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を取る．すると，次の関係式が成り立つ．

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が S の向きを与える $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が S の余向きを与える

この関係は，向きを与える基底の取り方に依らない．

2.2.3　交点数

■局所交点数　X, Y を向き付けられた多様体とし，S を Y の向き付けられた部分多様体とする．$\dim X + \dim S = \dim Y$ と仮定して交点数を定義する．S に横断的な写像 $f : X \to Y$ と $f(x) \in Z$ なる $x \in X$ に対し，X の x での向きを与える基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と S の $f(x)$ での向きを与える基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ をとる．x での f と S の **局所交点数**を

$$I_x(f, S) = \begin{cases} +1 & \begin{pmatrix} df_x(\boldsymbol{u}_1), \ldots, df_x(\boldsymbol{u}_n), \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ が } Y \text{ の } f(x) \text{ での向き} \\ \text{を与える基底となるとき} \end{pmatrix} \\ -1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

で定める．これは次のように言い換えてもよい．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+n}$ が Y の向きを与える基底であるとき，$\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+n}$ が S の余向きを与える．このとき

$$(\boldsymbol{v}_{m+1} \ \ldots \ \boldsymbol{v}_{m+n}) \equiv A(df(\boldsymbol{v}_1) \ \ldots \ df(\boldsymbol{v}_n)) \pmod{T_{f(x)}S}$$

なる行列 A を取るとき，

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_{m+n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A \end{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_m \ df(\boldsymbol{v}_1) \ \ldots \ df(\boldsymbol{v}_n))$$

であるから $(-1)^{mn} \det A$ の符号が交点数である．

■大域交点数　X, Y を境界付有向多様体とし境界付有向部分多様体 $(S, \partial S) \subset (Y, \partial Y)$ を考える．写像 $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ が S に横断的，$\partial f : \partial X \to \partial Y$ が ∂S に横断的で $\dim X + \dim S = \dim Y$ とする．すると

$$\dim \partial X + \dim \partial S = (\dim X - 1) + (\dim S - 1) = \dim Y - 2 < \dim \partial Y$$

なので $f(\partial X) \cap \partial S = \emptyset$.

固有写像 $f : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ が $f(\partial X) \cap \partial S = \emptyset$ かつ Y の部分多様体 S に横断的で，$f(X) \cap S$ がコンパクトかつ $\dim X + \dim S = \dim Y$ ならば $f^{-1}(S) = f^{-1}(S \cap f(X))$ は 0 次元コンパクト集合であり，有限集合であるので，(大域) **交点数** $I(f, S)$ を次で定める．

$$I(f, S) = \sum_{x \in f^{-1}(S)} I_x(f, S)$$

定理 2.2.2. W を境界付多様体，$\dim \partial W + \dim S = \dim Y$ とする．写像 $f : \partial W \to Y$ が W に固有写像に拡張可能ならば $I(f, S) = 0$.

証明. 固有写像 $F: W \to Y$ を $f: \partial W \to Y$ の拡張とする．F は S に横断的としてよい．$\dim W + \dim S = 1 + \dim \partial W + \dim S = \dim Y + 1$ より，$F^{-1}(S)$ は向きづけられた境界付き 1 次元多様体である．実際 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n+1}$ を W の向きを与える (局所的に定義された）W の接空間の基底とすると，向き付けられた境界付き 1 次元多様体の境界の向きの和は 0 なので主張を得る． □

系 2.2.3. W をコンパクト境界付多様体，$\dim \partial W + \dim S = \dim Y$ とする．写像 $f: \partial W \to Y$ が W に連続に拡張可能ならば $I(f, S) = 0$.

系 2.2.4 (拡張障害としての交点数). W をコンパクトな境界付多様体, $\dim \partial W + \dim S = \dim Y$ とする．写像 $f: \partial W \to Y$ が $I(f, S) \neq 0$ を満たせば f は W に拡張不可能である．

例 2.2.5. $\partial \overline{B}^2 = S^1$ とする．$f: S^1 \to S^1 \times S^1$ を $f(\theta) = (\theta, 0)$ で定めれば $I(f, \{0\} \times S^1\} = 1$ なので f は D^2 に拡張できない.

定理 2.2.6. $f_0: X \to Y$ と $f_1: X \to Y$ が固有ホモトピックならば $I(f_0, S) = I(f_1, S)$.

証明. $W = X \times I$ として，f_0 と f_1 を結ぶ固有ホモトピー $F: W \to Y$ を取る．$X_t = X \times \{t\}$ と書くと，X_0 と X_1 から誘導される X の向きは異なる．よって $\partial W = X_1 - X_0$ であり，前定理より

$$0 = I(\partial F, S) = I(F|_{X_1}, S) - I(F|_{X_0}, S) = I(f_1, S) - I(f_0, S)$$

となり主張を得る． □

任意の固有写像 $f: X \to Y$ に対して f とホモトピー同値な f_t で S に横断的なものをとって，$I(f, S)$ を次で定める．

$$I(f, S) = I(f_t, S)$$

前定理よりこの値は f_t の選び方によらない.

■正則写像のヤコビ行列と複素多様体の交点数　$\mathbb{C}^n$ の座標 $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ をとる．座標 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ は $\mathbb{C}^n$ の向きを定める．$\mathbb{C}^p$ の座標 $w_j = u_j + \sqrt{-1} v_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ をとる．座標 $(u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p)$ は $\mathbb{C}^p$ の向きを定める．

正則写像 $f: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, $w = f(z)$, を考える．$z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$, $w_j = u_j + \sqrt{-1} v_j$ とおくと次のコーシー・リーマンの方程式を満たす.

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}_i} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z_i} = 0.$$

$\bar{z}_i = x_i - \sqrt{-1}y_i$, $\bar{w}_j = u_j - \sqrt{-1}v_j$ であり，次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial z_i}{\partial y_i} & \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial y_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ 1 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_i} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \end{pmatrix}$$

$$(u_j\ v_j) = (w_j\ \bar{w}_j)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

したがって，f のヤコビ行列は次のようになる．

$$\begin{aligned}
{}^tJ_f =& \begin{pmatrix} u_{1_{x_1}} & v_{1_{x_1}} & \dots & u_{p_{x_1}} & v_{p_{x_1}} \\ u_{1_{y_1}} & v_{1_{y_1}} & \dots & u_{p_{y_1}} & v_{p_{y_1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1_{x_n}} & v_{p_{x_n}} & \dots & u_{p_{x_n}} & v_{p_{x_n}} \\ u_{1_{y_n}} & v_{p_{y_n}} & \dots & u_{p_{y_n}} & v_{p_{y_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \dots & u_p & v_p \end{pmatrix} \\
=& P \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \bar{w}_1 & \dots & w_p & \bar{w}_p \end{pmatrix} Q \\
=& P \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial z_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_1} & 0 & \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & 0 & \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial \bar{z}_1} \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_2} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial z_2} & 0 & \cdots & \frac{\partial w_p}{\partial z_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_2} & 0 & \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_n} & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial z_n} & 0 & \cdots & \frac{\partial w_p}{\partial z_n} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{z}_n} & 0 & \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{z}_n} & \cdots & 0 & \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix} Q
\end{aligned}$$

ここで，P, Q は次で与えられる行列である．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

次の関係式に注意する．

$$\det P = 2^n(-\sqrt{-1})^n \qquad \det Q = \frac{1}{2^{2p}}(2\sqrt{-1})^p = \frac{1}{2^p}(\sqrt{-1})^p$$

$n = p$ のとき，

$$\det J_f = \det P \det\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right) \det\left(\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{z}_i}\right) \det Q = \left|\det\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)\right|^2$$

であるから，もし f が正則同相なら $\det J_f > 0$ がわかる．特に本段落の冒頭で与えた向きは正則座標のとり方に依らないことがわかる．この向きを**複素構造が与える向き**という．

$n \leq p$ のとき，$S = \{z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0\}$ として $I_0(f, S)$ を定めよう．まず f が S に横断的として，$I_0(f, S)$ を求めてみよう．

$$\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}, \quad \frac{\partial}{\partial v_{n+1}}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial u_p}, \quad \frac{\partial}{\partial v_p}$$

が S の向きを与える．f の像の接空間の向き付けられた基底は，次で与えられる．

$$\begin{aligned}
df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) =& \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial v_n} \\
df\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) =& \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial v_n}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial v_n} \\
& \cdots \\
df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) =& \frac{\partial u_1}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial v_n} \\
df\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right) =& \frac{\partial u_1}{\partial y_p}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_p}\frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial y_p}\frac{\partial}{\partial u_n} + \frac{\partial v_n}{\partial y_p}\frac{\partial}{\partial v_n}
\end{aligned}$$

従って，次を得る．

$$I_0(f, S) = \mathrm{sign}\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial v_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_n} & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} & \frac{\partial v_n}{\partial y_n j} \end{vmatrix} = \mathrm{sign}\left|\det\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right|^2 = 1$$

f が S に横断的でないときは，原点の小さい近傍 U をとり f を摂動して U 内で S に横断的であるように正則写像 f_t をとる．交点 $U \cap {f_t}^{-1}(S)$ の各点での交点数は 1 であるから，

$$I_0(f,S) = \sum_{x:f(x)\in S\cap U} I_x(f_t,S) = \# U \cap {f_t}^{-1}(S) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}/\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$$

を得る．

■局所交点数の代数的公式　$n = p$ として，$(\mathbb{R}^n,0)$ の座標を $(x_1,\ldots,x_n)$, $(\mathbb{R}^p,0)$ の座標を $(y_1,\ldots,y_p)$ とするとき，$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ と $S=\{y_1=\cdots=y_n=0\}$ の局所交点数 $I_0(f,S)$ を与える代数的公式もある．$A=\mathbb{R}\{x_1,\ldots,x_n\}/\langle f_1,\ldots,f_p\rangle$ が有限次元実ベクトル空間であると仮定する．$\det\big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$ の A への自然な像が与える類 J は 0 でない．実線形関数 $\varphi : A\to\mathbb{R}$ を $\varphi(J)=1$ を満たすようにとる．すると双一次形式

$$\langle\ ,\ \rangle_\varphi : A\times A\to\mathbb{R},\ (a,b)\mapsto\varphi(ab)$$

は非退化で，その正の固有値の数から負の固有値の個数を引いたものが $I_0(f,S)$ に等しいことが知られている．

2.2.4　交点数 $I(f,g)$

X, Y, Z を有向多様体とする．$f:X\to Z$, $g:Y\to Z$, $f(x)=g(y)=z$ のとき f と g が横断的（$f\pitchfork g$ と書く）である事を次で定義する．

$$f\pitchfork g \iff df_x(T_xX)+dg_y(T_yY)=T_zZ$$

$\dim X+\dim Y=\dim Z$ とする．このとき，df_x, dg_y は単射であり，Y の点 y ある近傍の像は Z の部分多様体である．この部分多様体を S と書くと $f\pitchfork g$ なる条件は $f\pitchfork S$ となる．

X および Y の向きが定める $df_x(T_xX)$, $dg_y(T_yY)$ の向きが $df_x(T_xX)\oplus dg_y(T_yY)$ の向きを定める． この向きと，Z の向きが定める T_zZ の向きが一致するとき $+1$ 異なるときは -1 として f と g の点 z での**局所交点数** $I_z(f,g)$ を定める．X の x での座標を $(x_1,\ldots,x_m)$，Y の y での座標を $(y_1,\ldots,y_n)$，Z の z での座標を $(z_1,\ldots,z_{m+n})$ とする．

$$df_x\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)=\sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_k} \qquad dg_y\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)=\sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial z_k}$$

なので，次が成り立つ．

$$I_z(f,g)=\operatorname{sign}\det\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big)=\operatorname{sign}\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_m} & \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_{m+n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_{m+n}}{\partial x_m} & \frac{\partial z_{m+n}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_{m+n}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

X, Y が Z の部分多様体とするとき，包含写像 $i_X : X \to Z$, $i_Y : Y \to Z$, を用いて

$$I(X,Y) = I(\iota_X, \iota_Y)$$

と置く．

定理 2.2.7. 写像 $f \times g : X \times Y \to Z \times Z$, $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$ と $Z \times Z$ の対角線 Δ との交点数を $I_{(z,z)}(f \times g, \Delta)$ とすると，

$$I_z(f,g) = (-1)^{\dim Y} I_{(z,z)}(f \times g, \Delta)$$

証明. 対角線 Δ の接空間の向きは $\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial}{\partial z'_i}$ $(i = 1, \ldots, m+n)$ で与えられるので

$$\begin{aligned}
I_{(z,z)}(f \times g, \Delta) = \operatorname{sign}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & 0 & I \\ 0 & \frac{\partial z'}{\partial y} & I \end{vmatrix} &= \operatorname{sign}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z'}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial z'}{\partial y} & I \end{vmatrix} \\
=&(-1)^n \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z'}{\partial y} \end{vmatrix} = (-1)^n I_z(f,g)
\end{aligned}$$

□

$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ の順番を入れ替えて $(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$ にするには mn 回の互換が必要なので次を得る．

$$I(f,g) = (-1)^{(\dim X)(\dim Y)} I(g,f)$$

■自己交点数　$2n$ 次元の有向多様体 Y 内の，n 次元の多様体 X の自己交点数について説明する．

補題 2.2.8. 向き付けられた多様体 X から $X \times X$ に自然に向きが定まる．X の向きを変えても $X \times X$ に誘導する向きは変らない．

証明. X の向き付けられた座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ をとり，第 2 成分の X の同じ座標を $(x'_1, \ldots, x'_n)$ で表す．X の向きを変えた座標 $(y_1, \ldots, y_n)$ をとる．例えば $(y_1, \ldots, y_{n-1}.y_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ ととる．第 2 成分の X の同じ座標を $(y'_1, \ldots, y'_n)$ で表す．写像

$$(y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$$

のヤコビ行列式が正であることを言えばよいがこれは明らか．□

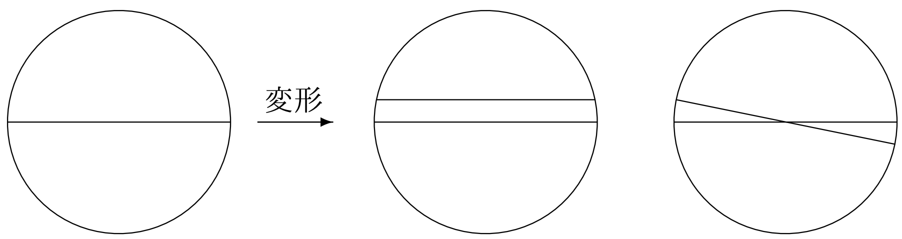
この証明をよく反省すると，X の各点の近傍の向きによらず，$X \times X$ の対角線の近傍が向き付けられることが証明できている．従って，対角線 Δ の自己交点数 $I(X,X)$ は

X の向きに寄らず（向きがなくとも）定まる．$X \times X$ における，対角線の自己交点数 $I(\Delta, \Delta)$ を，X の**オイラー標数**といい，$\chi(X)$ で表す．

向き付け可能でない多様体 X に対し，$X \times \mathbb{R}^p$ は向き付け可能でない．任意の p 次元多様体 Y は $\mathbb{R}^p$ と同相な集合を含むので $X \times Y$ は $X \times \mathbb{R}^p$ と同相な開集合を含み，向き付け可能でない．よって $X \times X$ も向き付け可能でない．

境界付有向多様体 $(Y, \partial Y)$ の閉部分多様体 X が $2 \dim X = \dim Y$ を満たすとき，$X \cap \partial Y = \emptyset$ ならば自己交点数 $I(X, X) = I(\iota_X, X)$ は矛盾なく定義される．$X \cap \partial Y \neq \emptyset$ のときは，X を変形させた X_t が $X \cap X_t \cap \partial Y = \emptyset$ みたせば交点数 $I(X, X_t)$ が定まるが，これは一般には変形 X_t の選び方に依る．変形 X_t として何か意味のあるものを取れるとき，交点数 $I(X, X_t)$ を考える事は意味があると思われる．例えば，境界 ∂Y に ∂X の各点で 0 でないベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が与えられていれば，このベクトル場を Y に拡張したものに沿って X を変形させ X_t を作れば $I(X, X_t)$ は X のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に沿った自己交点数とみなす事ができる．

例 **2.2.9.** 円の内部の直径は変形の取り方でその交点の数が異なる．



■**複素曲面内の複素曲線**　複素曲面とは複素構造のある複素 2 次元多様体で実 4 次元多様体である．複素曲面 M 内に固有に埋め込まれた複素曲線（実 2 次元多様体になる）C, D に対し，交点数 $C \cdot D$ を考える事ができる．C, D が相異なれば $C \cdot D \geq 0$ である．C がコンパクトなら自己交点数 $C \cdot C$ も考える事ができる．もし複素曲線であるという性質を保ったまま C を C と異なる複素曲線 C_t　に変形する事ができれば

$$C \cdot C = C \cdot C_t \geq 0$$

がわかる．しかしながら $C \cdot C < 0$ である事もある．これは C を変形すると，複素曲線であるという性質が崩れてしまう事を示している．

例 **2.2.10.**
$$M = \{(x, y) \times [\xi : \eta] \in \mathbb{C}^2 \times P^1(\mathbb{C}) : x\eta = y\xi\}$$

とおき，$\pi : M \to \mathbb{C}^2$ を第 1 成分への自然な射影とする．$E = \pi^{-1}(0)$ は $P^1(\mathbb{C})$ と同型である．$p : M \to P^1(\mathbb{C})$ を第 2 成分への自然な射影とする．$H' = p^{-1}([1:0])$ とおく

H' と E は 1 点で交わるので $H' \cdot E = 1$ である．$H = \pi(H') = \{y = 0\}$ である．

$$0 = H \cdot E = (H' + E) \cdot E = H' \cdot E + E \cdot E = 1 + E \cdot E$$

なので $E \cdot E = -1$ がわかる．

2.3　写像度と巻き数

■**写像度**　$\dim X = \dim Y$ のとき，固有写像 $f : X \to Y$ の次数を次で定める．

$$\deg f = I(f, \{y\}), \quad y \in Y.$$

多様体 Y が連結ならば $\{y_0\}$ と $\{y_1\}$ は Y でイソトピックであり，右辺は $y \in Y$ の取り方によらない．

y を f の正則値として $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_l\}$ と置く．各 x_k 中心の向き付けられた座標を $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, y 中心の向き付けられた座標を $(y_1, \ldots, y_n)$ とすると

$$\deg f = I(f, \{y\}) = \sum_{k=1}^{l} \operatorname{sign} \det \Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i^{(k)}}(x_k) \Big)$$

■**巻き数**　X を有向 n 次元多様体とし，固有写像 $f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ と $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$ に対し写像

$$w_{f,z} : X \to S^n, \qquad x \mapsto \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}$$

を考える．$\deg w_{f,z}$ を，写像 f の z の周りの**巻き数** (winding number) といい，$W(f, z)$ で表す．

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X)$ の同じ弧状連結成分に属する 2 点 z_0, z_1 を，その弧状連結成分内の曲線 z_t で結ぶ．写像

$$w_{f,z_t} : X \to S^n, \qquad x \mapsto \frac{f(x) - z_t}{|f(x) - z_t|}$$

はホモトピーであるので，$W(f, z_t)$ は t に依存しない．

コンパクト連結有向多様体 X を $\mathbb{R}^n$ の超曲面であるとし，$\iota : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ を包含写像とする．$W(X, z) = W(\iota, z)$ とおく．各点 $x \in X$ の近傍では $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の原点近傍と微分同相であるので，$\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ は高々 2 つの連結成分を持つ．

定理 2.3.1. n 次元閉球 $\overline{B}$ 上定義された C^∞ 写像 $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ の正則値 y が $f^{-1}(y) \cap \partial\overline{B} = \emptyset$ を満たすとする．このとき，

$$\deg f = W(\partial f, y)$$

証明. $f^{-1}(y)$ は有限集合であり，その各点中心の小球を B_i とする．$B' = B \setminus \cup_i B_i$ とおき

$$w : \partial B' \to S^{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{f(x) - y}{|f(x) - y|}$$

は B' 上連続に拡張されるので，w の写像度は 0. $\partial B' = \partial B - \cup \partial B_i$ なので

$$0 = \deg w|_{\partial B'} = \deg w|_{\partial B} - \sum_i \deg w|_{\partial B_i}$$

$w|_{B_i}$ は同相写像であり，向きを保てば $\deg w|_{\partial B_i}$ は 1, 向きを逆にすれば $\deg w|_{\partial B_i}$ は -1 なので，定理は証明された．□

問題：嵌め込み $f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，巻き数 $W(f, z)$ $(z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus f(X))$ とガウス写像 $G : X \to S^n$, $x \mapsto \mathbf{n}(x)$, の写像度の関連を研究せよ．

定理 2.3.2. 多項式 $P(z) = z^d + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_d$ の決める写像

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto P(z)$$

の写像度は d である．

証明. 写像 $P_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^d$ の次数は d である．この写像と $P(z)$ をつなぐホモトピー

$$P(z, t) = z^d + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_d)$$

が存在するので $\deg P = \deg P_0 = d$. □

定理 2.3.3 (Borsuk-Ulam の定理)**.** $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in S^n$$

を満たせば，原点の周りの巻き数 $\deg w_{f,0}$ は奇数である．

2.4　写像度と積分

微分形式の理論を仮定すると次が示せる．

定理 2.4.1. M を有向多様体 ω を $\int_{S^n} \omega = 1$ なる S^n の体積要素とする．C^∞ 写像 $f : M \to S^n$ と n 次元有向輪体 X に対し，$f|_X$ が固有な有限写像ならば $\deg(f|_X) = \int_X f^* \omega$.

証明. $f|_X$ の正則値 y をとり，y の開近傍 U をとる．U に台を持つ S^n の n 形式 ω' で ω とコホモローガスなものを取る．$f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ とする．U を十分小さく選び

$(f|_X)^{-1}(U) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ と仮定する．ただし U_i は x_i の近傍で U と微分同相なもの．すると

$$\int_{U_i} (f|_X)^*\omega' = \pm \int_U \omega' = \pm 1$$

ただし，符号 $\pm$ は $f|_{U_i}$ が向きを保つかどうかで定める．すると

$$\deg(f|_X) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (f|_X)^*\omega' = \int_X (f|_X)^*\omega' = \int_X (f|_X)^*\omega = \int_X f^*\omega,$$

となり証明が終わる． □

2.5 Lefschetz の不動点理論

C^∞ 写像 $f : X \to X$ に対しそのグラフ

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

を考える．対角線 $\Delta = \{(x, x') \in X \times X : x = x'\}$ とグラフ Γ_f の交点 (x, x) は，$f(x) = x$ となる点（$f : X \to X$ の不動点という）である．このとき f のレフシェッツ数[*1] $L(f)$ を次で定める．

$$L(f) = I(\Gamma_{\mathrm{f}}, \Delta)$$

f の孤立不動点 x に対し，局所レフシェッツ数 $L_x(f)$ を次で定める．

$$L_x(f) = I_{(x,x)}(\Gamma_{\mathrm{f}}, \Delta)$$

f が有限個の不動点しか持たなければ，定義より明らかに次が成り立つ．

$$L(f) = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f)} L_x(f)$$

補題 2.5.1． $f : X \to X$ の不動点 x_0 の近傍を $\mathbb{R}^n$ の原点近傍と同一視する時，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} L_x(f) =& \deg\{(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0), x \mapsto x - f(x)\} \\ =& \deg S_\varepsilon^{n-1}(x) \to S^{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|} \end{aligned}$$

[*1] レフシェッツ数 $L(f)$ を $I(\Delta, \Gamma_{\mathrm{f}})$ で定めている本もある．$\dim X$ が偶数のときは 2 つの定義は一致するが，$\dim X$ が奇数のときは符号が異なる．

証明. Γ_f と Δ が横断的に交わるとする．グラフ Γ_f 接ベクトルの基底は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_n'},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_1'} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n'}$$

で，Δ の接ベクトルの基底は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1'},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_n'}$$

となる．よって

$$L_x(f) = I_{(x,x)}(\Gamma_f, \Delta) = \operatorname{sign}\begin{vmatrix} I & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ I & I \end{vmatrix} = \operatorname{sign}\begin{vmatrix} I & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ 0 & I - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} = \operatorname{sign}\left| I - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$$

となり証明が終わる． □

定理 2.5.2. $f : X \to X$ が恒等写像にホモトープならば $\chi(X) = L(f)$ である．

証明. 恒等写像のグラフは対角線 Δ なので明らか． □

例 2.5.3. $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみて，写像 $f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^d$ を考える． $f(z) = z$ は $z^d = z$ $(|z| = 1)$ は $z^{d-1} = 1$ より 1 の $d-1$ 乗根 α を 1 の $d-1$ 乗根として

$$L_\alpha(f) = \deg\{(S^1, \alpha) \to (S^1, \alpha), z \mapsto z - (z^d + z)\} = 1$$

なので $L(f) = 1 - d$.

例 2.5.4. S^2 を $\mathbb{C}$ の 1 点コンパクト化 $\widehat{\mathbb{C}}$ とみて写像 $f : S^2 \to S^2$, $z \mapsto z^d$ を考える．不動点は 1 の $d-1$ 乗根と $0, \infty$ である．α を不動点として

$$L_\alpha(f) = \deg\{(\mathbb{C}, \alpha) \to (\mathbb{C}, \alpha), z \mapsto z - (z^d + z)\} = 1$$

なので $L(f) = 1 + d$.

定理 2.5.5. C^∞ 写像 $f : S^n \to S^n$ の写像度が d ならば

$$L(f) = 1 + (-1)^n d$$

$S^n = \{(z, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1} : |z|^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\}$ とおく．

$$f : S^n \to S^n, \qquad (z, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (z^d, x_2, \ldots, x_n)$$

f の不動点は $z^d = z$, $|z|^2 = 1 - {x_2}^2 - \cdots - {x_n}^2$ を解いて得られる．

例 2.5.6. 整数行列 A によって決まる線形写像 $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がトーラス $T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の写像 $f:T^n \to T^n$ を誘導するとき，f のレフシェッツ数を調べよ．

線形写像 A の微分は行列 A によって表され，固定点 x におけるレフシェッツ指数は $\sigma = \operatorname{sign}\det(A-I)$ で表される．f の固定点を F で表すと，固定点の個数は $Ax = x \pmod{\mathbb{Z}}$ を満たす $x \pmod{\mathbb{Z}}$ の個数であるから，

$$L(f) = \sigma\#F = \det(A-I)$$

2.6　ベクトル場

$\mathbb{R}^N$ 内の n 次元多様体 X に対し，X の各点 x に対し X の接ベクトル $\boldsymbol{v}_x \in T_xX$ が与えられたとき X 上ベクトル場が与えられたという．対応 $\boldsymbol{v}:X \to TX \subset T\mathbb{R}^N, x \mapsto \boldsymbol{v}_x$, が C^∞ であるとき $\boldsymbol{v}$ を C^∞ ベクトル場であるという．X の接束 TX を $2n$ 次元多様体と見て，X を零断面として TX に埋め込み，TX 内での X の自己交点数 $I(X,X)$ を考える．

有限個の零点をもつ X のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ をとる．零断面への埋め込み $\iota: X \to TX$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{v}:X \to TX$ の間のホモトピーは次のようにして構成される．

$$F: X \times [0,1] \to TX, \qquad (x,t) \to t\boldsymbol{v}(x)$$

よって

$$I(X,X) = I(X, \boldsymbol{v}(X))$$

なので，$I(X,\boldsymbol{v}(X))$ はベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の取り方に依らない．

定理 2.6.1.

$$I(X,X) = I(X,\boldsymbol{v}(X)) = \sum_{x \in Z(\boldsymbol{v})} I_{(x,x)}(X,\boldsymbol{v}(X))$$

$\boldsymbol{v}(x) = \sum_j a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ とおく．x が $\boldsymbol{v}$ の非退化零点ならば

$$I_{(x,x)}(X,\boldsymbol{v}(X)) = \operatorname{sign}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & A\end{pmatrix} = \operatorname{sign}\det A, \qquad A = \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)$$

となる．一般に x が $\boldsymbol{v}$ の孤立零点ならば

$$I_{(x,x)}(X,\boldsymbol{v}(X)) = \deg\{(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0), x \mapsto (a_1(x),\ldots,a_n(x))\}$$

となる．この値を $\boldsymbol{v}$ の零点 x での**指数**といい $\operatorname{ind}_x\boldsymbol{v}$ で表す．

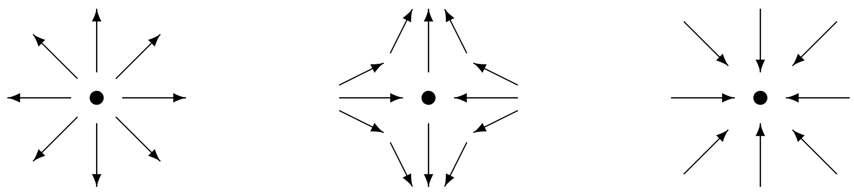
例 2.6.2. $\mathbb{R}^n$ のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{v} = -x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + x_{k+1}\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

原点が $\boldsymbol{v}$ の零点であり，その指数は次で計算される．

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_x\boldsymbol{v} =& \deg\{(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0),\ (x_1,\dots,x_n)\mapsto(-x_1,\dots,-x_k,x_{k+1},\dots,x_n)\}\\ =&(-1)^k\end{aligned}$$

$n=2$ のときのベクトル場の模式図を以下に示す．



定理 2.6.3 (ポアンカレ・ホップの定理)**.**

$$\chi(X) = \sum_x \mathrm{ind}_x\boldsymbol{v}$$

証明. $X\times X$ の対角線 Δ の法束を $N_\Delta(X\times X)$ で表す．次の写像は零断面 X のある近傍から，対角線 Δ へのある近傍への，微分同相写像を定める．

$$TX\to N_\Delta(X\times X),\qquad (x,v)\mapsto((x,x),(v,0))$$
$$N_\Delta(X\times X)\to TX,\qquad ((x,x),(v_1,v_2)+T_{(x,x)}\Delta)\mapsto(x,v_1-v_2)$$

特に

$$\begin{aligned}\chi(X) =& X\times X \text{ 内での } I(\Delta,\Delta)\\ =& N_\Delta(X\times X) \text{ 内での } I(\Delta,\Delta)\\ =& TX \text{ 内での } I(X,X)\end{aligned}$$

を得る． □

定理 2.6.4. コンパクト境界付多様体 X 上のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が有限個の孤立零点を持ち，境界で外向きならば

$$\sum_{x\in Z}\mathrm{ind}_x\boldsymbol{v} = \chi(X)$$

2.7　単体分割とオイラー標数

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v_n}$ に対し

$$[\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = \{t_0\boldsymbol{v}_0 + t_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n : t_i > 0,\ t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1\}$$

を n **単体**という．単体の集まり K で次を満たすものを**単体複体**という．

- K の各単体の面は K に属する．
- K に属する 2 つの単体の交わりは単体で K に属する．

単体複体 K に対し，

$$|K| = \bigcup_{\sigma\in K} \sigma$$

と書く．X の**有限単体分割**とは，有限単体複体 K に対し，上への微分同相写像 $h_\sigma : \sigma \to X$ $(\sigma \in K)$ の族で

$$h : |K| \to X, \qquad x \mapsto h_\sigma(x) \quad (x \in \sigma)$$

が同相写像となるものをいう．

定理 2.7.1. 多様体 X の有限単体分割があるとき，次が成り立つ．

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k s_k \qquad s_k = k\text{-単体の個数}$$

証明. 標準 n 単体

$$\sigma = \Big\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0,\ \sum_{i=0}^n x_i = 1\Big\}$$

に対し $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ として σ の面

$$\sigma_I = \Big\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i > 0\ (i \in I),\ x_j = 0\ (j \notin I),\ \sum_{i\in I} x_i = 1\Big\}$$

を考える．n 単体 σ に接している σ 上のベクトル場

$$\boldsymbol{v}_\sigma = \sum_{i=0}^n \Big(1 - \frac{x_i}{\sum_{j=0}^n {x_j}^2}\Big) x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

は，σ の各面 σ_I に接し，その零点は σ の中心 $\frac{1}{n+1}(1, \ldots, 1)$ と各面 σ_I の中心 $\frac{1}{\#I+1}\boldsymbol{e}_I$ である．$\boldsymbol{v}_\sigma$ は第一象限では $x_0x_1\cdots x_n$ の値を増す方向を向いている．

$$\boldsymbol{v}_\sigma(x_0x_1\cdots x_n) = \sum_{i=0}^n \Big(1 - \frac{x_i}{\sum_{j=0}^n {x_j}^2}\Big) x_0x_1\cdots x_n > 0$$

同様に σ_I 上では $x_I=\sum_{i\in I}x_i$ を増す方向を向いている．X の有限単体分割があれば，単体分割に現れる各 n 単体 σ から X への写像 $h_\sigma:\sigma\to X$ がある．

$$\boldsymbol{v}|_{h(\sigma)}=dh_\sigma(\boldsymbol{v}_\sigma)$$

とおくと，$\boldsymbol{v}$ は X 上の連続ベクトル場で，その零点は各単体の中心の像であり，$\boldsymbol{v}$ は各単体の接方向には吸引的，法方向には反発的である．よってその指数は $(-1)^k$ ただし，k はその単体の次元．連続ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の C^∞ ベクトル場による近似を考えれば，定理の主張を得る．

別証 各 i 単体に制限したら，その中心が吸引特異点であるようなベクトル場を，帰納的に構成する．i 次元の単体の境界に既にベクトル $\boldsymbol{v}$ が構成されているとき i 単体の中心が $\boldsymbol{v}$ の吸引特異点になるように，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を滑らかに拡張できる．中心での零点の指数は $(-1)^i$ である．なぜなら零点の近傍で，$\boldsymbol{v}$ の線形部分が例 2.6.2 の形に座標を取ることができるから． □

$X\times X$ の対角線 $\Delta=\{(x,x')\in X\times X : x=x'\}$ に対し Δ の $X\times X$ での自己交点数を X のオイラー数と呼び $\chi(X)$ で表す．

$$\chi(X)=I(\Delta,\Delta)$$

2.8　ホップの定理

定理 2.8.1 (ホップの定理)**.** 連結コンパクト有向 n 次元多様体 X から S^n への 2 つの写像がホモトープであるための必要十分条件は，同じ写像度をもつ事である．

このことは，しばしば次の同型で表示される．

$$[X,S^n]\simeq\mathbb{Z},\qquad f\mapsto\deg f$$

系 2.8.2. S^n は可縮でない．

証明. S^n は可縮だとすると $S_n\to *\to S^n$ は恒等写像にホモトープなので写像度 1．ところが，この合成写像の像は 1 点なので写像度は 0． □

ホモトープな写像は同じ写像度を持つので，ホップの定理を示すには，その逆を示せばよい．ホップの定理の 1 次元版は簡単に証明できる．

定理 2.8.3. S^n から S^n への 2 つの連続写像が同じ写像度を持てば，ホモトープである．

証明. $f:S^1\to S^1$ に対し，

$$f(\cos t,\sin t)=(\cos g(t),\sin g(t))$$

を満たす連続関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ をとる．$g(t+2\pi)=g(t)+2p\pi$ となる整数 p があり，$\deg f=p$ である．$f_0,f_1:S^1\to S^1$ が同じ写像度を持つとすると $g_s(t)=sg_0(t)+(1-s)g_1(t)$ が f_0 と f_1 の間のホモトピーとなる．□

定理 2.8.4. B を $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元開球，C^∞ 写像 $f:\mathbb{R}^n\setminus B\to Y$ の ∂B への制限 $\partial f:\partial B\to Y$ が定値写像にホモトープならば，f は $\mathbb{R}^n$ 全体から Y への滑らかな写像に拡張される．

証明. B は原点中心としてよい．$g_t:\partial B\to Y$ を，定値写像 g_0 と $g_1=\partial f$ を結ぶホモトピーとする．このとき $f(tx)=g_t(x)$ とおくと f は B に連続に拡張される．これを修正して C^∞ 写像に拡張する事ができる．□

定理 2.8.5. 写像度が 0 である C^∞ 写像 $f:S^n\to S^n$ は定値写像にホモトープである．

証明. $n=1$ のときは，定理 2.8.3 の特別な場合である．$n-1$ のとき仮定して n のときを示す．f の 2 つの正則値 a,b をとる．$S^n\setminus f^{-1}(b)$ における $f^{-1}(a)$ の開近傍 U で $\mathbb{R}^n$ と微分同相なものをとる．微分同相写像 $\alpha:\mathbb{R}^n\to U$ と a を 0 に移す微分同相写像 $\beta:S^n\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ をとる．すると 写像 $h=\beta\circ f\circ\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は 0 を正則値として持ち, $h^{-1}(0)$ は有限集合で，写像度は 0 となる．$h^{-1}(0)$ を含む開球 B を取ると，$h|_{\partial B}:\partial B:\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の写像度は 0 であり，帰納法の仮定より，この写像 $h|_{\partial B}$ は定値写像にホモトープである．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
\mathbb{R}^n \arrow[ddrr, "\alpha"'] & & S^n \arrow[r, "f"] & S^n & & \\
\cup & & \cup & \cup & & \\
B & & U \arrow[r] & S^n\setminus\{b\} \arrow[rr, "\beta"] & & \mathbb{R}^n \\
\cup & & \cup & \cup & & \cup \\
h^{-1}(a) & = & f^{-1}(a) \arrow[r] & \{a\} \arrow[rr] & & \{0\}
\end{tikzcd}$$

定理 2.8.4 より $\alpha(B)$ の外側で $g=f$ と定めると，g は $g:S^n\to S^n\setminus\{0\}\simeq\mathbb{R}^n$ に拡張され，その拡張は f とホモトープである．$\mathbb{R}^n$ は可縮なので，f は定値写像にホモトープである．□

系 2.8.6. $W(f,0)=0$ である C^∞ 写像 $f:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ は定値写像にホモトープである．

証明. 仮定より，$f/|f|:S^n\to S^n$ の写像度は 0 で，定値写像にホモトープである．

$$f_t:S^n\to\mathbb{R}^{n+1},\qquad x\mapsto f_t(x)=\Big((1-t)+\frac{t}{|f(x)|}\Big)f(x)$$

は f と $f/|f|$ の間のホモトピーなので主張を得る．□

定理 2.8.1 の証明. $f_0, f_1 : X \to S^n$ が同じ写像度を持つとする．$W = X \times [0,1]$ とおき，$\partial f : \partial W \to S^n$ を $X \times \{0\}$ 上 f_0 $X \times \{1\}$ 上 f_1 と定める．

$$\deg \partial f = \deg f_1 - \deg f_0 = 0$$

なので ∂f は W 全体に拡張される． □

定理 2.8.7. W を境界付連結コンパクト $n+1$ 次元有向多様体とし，$f : \partial W \to S^n$ は C^∞ 写像とする．f が $F : W \to S^n$ に拡張できるための必要十分条件は $\deg f = 0$.

補題 2.8.8. W を境界のあるコンパクト $n+1$ 次元多様体とする．C^∞ 写像 $f : \partial W \to \mathbb{R}^{n+1}$ は W に拡張できる．

証明. W を $\mathbb{R}^N$ 内にあるとする．∂W に定理 2.1.4 を適用して，f を ∂W の $\mathbb{R}^N$ における近傍 U に拡張できる．ρ を ∂W 上で 1，U のコンパクト部分集合の外側で 0 になる C^∞ 関数とする．U 上で $\rho f, U$ の外側で 0 であるような関数は f の拡張である． □

定理 2.8.7 の証明. 前補題より，写像 f を $\mathbb{R}^{n+1}$ への写像と見て f を $F : W \to \mathbb{R}^{n+1}$ に拡張しておく．横断性拡張定理より 0 を F の正則値としてよい．イソトピー補題より，有限個の点集合 $F^{-1}(0)$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ に微分同相な $\mathrm{Int}\, W$ 内の部分集合 U 内におく．B を $F^{-1}(0)$ を含む U の球体とすると，

$$\partial F : \partial B \to \mathbb{R}^{n+1}$$

は原点に関し巻き数 0 である．$F/|F|$ は多様体 $W' = W \setminus B$ に拡張されるので，

$$0 = \deg(F/|F|)|_{\partial W'} = \deg(F/|F|)|_{\partial W} - \deg(F/|F|)|_{\partial B}$$

に，仮定を使うと $\deg(F/|F|)|_{\partial B} = 0$ である．よって系 2.8.6 より，F は B に拡張可能である． □

第 3 章

モース理論

3.1 非退化関数

定理 3.1.1. $\mathbb{R}^n$ の原点近傍で定義された関数 $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}$ が原点で特異点をもち，そのヘッセ行列式 $H = \det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ が 0 でないとする．そのときある座標変換 $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ が存在して

$$f \circ h(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} a_i {x_i}^2, \qquad a_i = \pm 1$$

と出来る．

定理 3.1.2. $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 U と C^∞ 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し，ほとんどすべての $a \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$f_a : X \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = f(x) + a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N$$

は非退化特異点のみをもつ関数.

証明. f の偏微分を並べて得られる写像

$$g : U \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

を考える．$(\frac{\partial f_a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_a}{\partial x_n}) = g(x) + a$ なので x が f_a の臨界点である必要十分条件は $g(x) = -a$ であり，

$$J_g(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j (x)} \right)$$

なので，$-a$ が g の正則値であれば f_a の非退化臨界点でなければならない．サードの定理より殆どすべての $-a$ が g の正則値である. □

定理 3.1.3. $\mathbb{R}^N$ 内の X と C^∞ 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し，ほとんどすべての $a \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$f_a : X \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = f(x) + a_1x_1 + \cdots + a_Nx_N$$

はモース関数.

証明. X の各点は $x_1, \ldots, x_N$ の内 n 個が局所座標となる．$I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ $(1 \leq i_1 < \ldots, < i_n \leq N)$ とし，$x_I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ が局所座標となる X の点全体を U_I とする．$a_I = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$, $a'_I = (a_j)_{j \notin I}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_I =& \{a \in \mathbb{R}^N : f_a : U_I \to \mathbb{R} \text{ がモース関数 } \} \\ =& \bigcup_{a'_I} \{a_I \in \mathbb{R}^N : f_{(0,a'_I)} + \sum_{i \in I} a_ix_i : U_I \to \mathbb{R} \text{ がモース関数 } \} \end{aligned}$$

は測度 0 なので $\cup_I S_I$ も測度 0. □

多様体 X に対し次のような記号を使う.

$$X(a \leq f \leq b) = \{x \in X : a \leq f(x) \leq b\} \qquad X(f \leq b) = \{x \in X : f(x) \leq b\}$$

定理 3.1.4. 固有関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $[a, b]$ で臨界値を持たなければ, $X(f \leq a)$ と $X(f \leq b)$ は微分同相である.

証明. $\inf f(X) = c$ とするとき，ベクトル場 η の積分が $(c, b]$ から $(c, a]$ への微分同相を与えるとする．ξ を η の f による持ち上げとするとき，ξ に沿って変位させればよい. □

定理 3.1.5. 固有関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $f^{-1}[a, b]$ で丁度 1 つの指数 λ の非退化な臨界点を持てば $X(f \leq b)$ は $X(f \leq a)$ に $B^\lambda \times B^{n-\lambda}$ を $\partial B^\lambda \times B^{n-\lambda}$ で接着したものに同相である．ただし

$$B^\lambda = \{(u_1, \ldots, u_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda : {u_1}^2 + \cdots + {u_\lambda}^2 \leq 1\}$$

証明. 多様体 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が指数 λ の非退化臨界点 x_0 持つとする．x_0 の座標近傍 U 上定義された座標関数

$$(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$$

を，次を満たす様にとる.

- x_0 の像は原点で，近傍 U の像は原点中心の半径 ε の閉球を含む.
- $c = f(x_0)$ とし，U 上次が成り立つ.

$$f = c - {x_1}^2 - \cdots - {x_\lambda}^2 + {x_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

$\delta > 0$ を十分小さく取り，$f^{-1}(c+\delta)$ と $f^{-1}(c-\delta)$ が，開球の X への逆像と，交わるようにとる．$X(f \leq c-\delta)$ と $X(f \leq c+\delta)$ を比較して議論すれば十分である．まず，

$$U(f \leq c-\delta) = U(\delta + {x_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leq {x_1}^2 + \cdots + {x_\lambda}^2)$$

に注意する．

$$D^\lambda = U({x_1}^2 + \cdots + {x_\lambda}^2 \leq \delta,\ x_{\lambda+1} = \cdots = x_n = 0)$$

を含む集合

$$E^\lambda = U \begin{pmatrix} {x_1}^2 + \cdots + {x_\lambda}^2 \leq \delta + {x_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2 \\ {x_{\lambda+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leq \varepsilon) \end{pmatrix}$$

を考えると，自然な射影

$$E^\lambda \to B_\varepsilon^{n-\lambda},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\lambda+1}, \ldots, x_n)$$

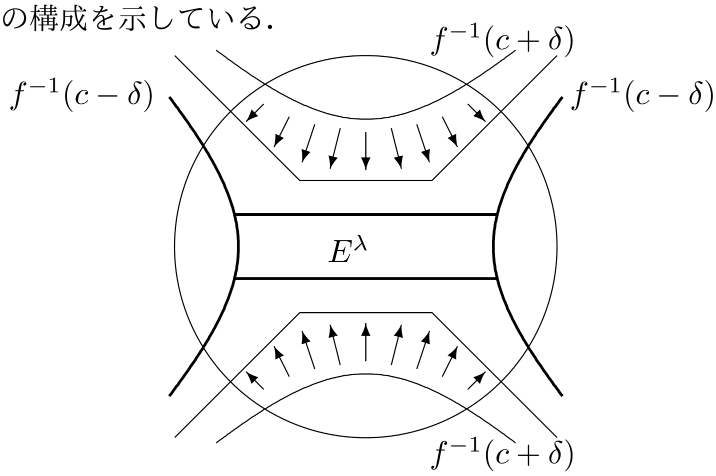
のファイバーは D^λ と同相なので，$E^\lambda \simeq D^\lambda \times B_\varepsilon^{n-\lambda}$ がわかる．

$$U(f \leq c-\delta) \cap E^\lambda \simeq (\partial D^\lambda) \times B^{n-\lambda}$$

もわかる．$Y = U(f \leq c-\delta) \cup E^\lambda$ とおくと，

$$Y \simeq U(f \leq c-\delta) \cup_{\partial D^\lambda \times B^{n-\lambda}} D^\lambda \times B^{n-\lambda}$$

次図の太線で Y の構成を示している．



ここで Y の定義で $\delta \to 0$ とし ε を 2ε に変えたものを Z とする．すなわち

$$Z = U \begin{pmatrix} x_{\lambda+1}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leq {x_1}^2 + \cdots + {x_\lambda}^2 \\ x_{\lambda+1}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leq 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

とおくと $Y \simeq Z, Y \subset \mathrm{Int}(Z)$ である．上図では上下の折れ線で囲まれた部分が Z である．f の勾配ベクトル ∇f に，$U(c-\delta)$ では恒等的に 0 で，$U(c-\delta < f < c+\delta)$ では負である適当な関数をかけて，その積分曲線が $U(c-\delta \leq f \leq c+\delta)$ を $Z(c-\delta \leq f)$ に移す微分同相を生成するようにできる．ここで考えたフローを不変にする x_0 の近傍を U としてとることにすれば，前定理より $(X \setminus U)(f \leq c-\delta)$ は $(X \setminus U)(f \leq d+\delta)$ に微分同相であったので，定理の主張を得る． □

3.2　高さ関数

$\mathbb{R}^N$ 内の多様体 M に対し，単位ベクトル $v \in S^{N-1}$ 方向の高さ関数

$$h_v : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \langle x, v \rangle$$

を考える．

定理 3.2.1. $x \in M$ が h_v の特異点である事と v が M の法線であることは同値．そのとき x が v 方向の放物点でなければ h_v はモース特異点で，その特異点のモース指数は v 方向の負の主曲率の個数に等しい．

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合として M の径数付け $g : U \to \mathbb{R}^N$ を取る．高さ関数

$$h_v : U \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \langle g(u), v \rangle$$

を偏微分すると次を得る．

$$\frac{\partial h_v}{\partial u_i} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u_i}, v \right\rangle, \qquad \frac{\partial^2 h_v}{\partial u_i \partial u_j} = \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}, v \right\rangle$$

- 点 $x = g(u)$ が h_v の特異点であることは，v が x での M の法ベクトルである事と同値であり，特異点では以下が成立する．
- $h_v(x)$ がモース特異点 $\Longleftrightarrow$ v 方向の第 2 基本形式が非退化
- h_v のヘッセ行列は M の v 方向の第 2 基本形式なので $\frac{\partial^2 h_v}{\partial u_i \partial u_j}$ の負の固有値の個数は v 方向の第 2 基本形式の負の主曲率の個数に等しい．

3.3　距離 2 乗関数

$\mathbb{R}^N$ 内の多様体 M と $a \in \mathbb{R}^N \setminus M$ に対し，距離 2 乗関数

$$f_a : M \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}|x-a|^2 = \frac{1}{2}\langle a-x, a-x \rangle,$$

を考える．

定理 3.3.1. $x \in M$ が f_a の特異点である事と xa が M の法線であることは同値．そのとき a が M の焦点集合に属さなければ f_a はモース特異点でその特異点のモース指数は線分 $\overline{xa}$ 内の焦点の個数に等しい．

証明. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合として M の径数付け $g : U \to \mathbb{R}^N$ を取り，距離 2 乗関数

$$f_a : U \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \frac{1}{2}\langle a - g(u), a - g(u) \rangle$$

を偏微分すると次を得る．

$$\frac{\partial f_a}{\partial u_i} = -\langle g_{u_i}, a - g(u)\rangle$$

従って $x = g(u)$ が f_a の特異点であることと $x - a$ が X の x での法線であることは同値．$u = 0$ で $\langle g_{u_i}, g_{v_j}\rangle = \delta_{ij}$ なるように u をとっておいて，$\boldsymbol{v} = \frac{a-g(u)}{|a-g(u)|}$ とおく．$a - g(u) = |a - g(u)|\boldsymbol{v}$ であるので，$u = 0$ で，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_a}{\partial u_i \partial u_j} - \lambda\delta_{ij} &= -\langle g_{u_i u_j}, a - g(u)\rangle + \langle g_{u_i}, g_{u_j}\rangle - \lambda\delta_{ij} \\ &= -|a - g(u)|\langle g_{u_i u_j}, \boldsymbol{v}\rangle + (1-\lambda)\delta_{ij} \\ &= -|a - g(u)|\left(\langle g_{u_i u_j}, \boldsymbol{v}\rangle - \frac{1-\lambda}{|a-g(u)|}\delta_{ij}\right)\end{aligned}$$

となる．よって

- λ が f_a のヘッシアンの固有値 $\Longleftrightarrow$ $\frac{1-\lambda}{|a-g(u)|}$ が $\boldsymbol{v}$ 方向の第 2 基本形式の固有値
- $f_a(g(u))$ がモース特異点でない $\Longleftrightarrow$ $|a - g(u)|$ が v 方向の主曲率

最後の主張は $\lambda = 0$ として，ヘッシアンが退化する条件を見るとわかる．なお v 方向の第 2 基本形式 $(\langle g_{u_i u_j}, \boldsymbol{v}\rangle)_{ij}$ の第 1 基本形式 $(\langle g_{u_i}, g_{u_j}\rangle)_{ij}$ に関する固有値を v 方向の主曲率と呼ぶのであった．さらに

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 f_a}{\partial u_i \partial u_j}\right) \text{ の負の固有値の個数 } &= \frac{1}{|a-g(u)|} \text{ 以上である } v \text{ 方向の主曲率の個数} \\ &= (0, |a-g(u)|) \text{ 内にある } v \text{ 方向の主曲率半径の個数} \\ &= \overline{ag(u)} \text{ 上にある焦点の個数}\end{aligned}$$

を得る． □

3.4　複素多様体

補題 3.4.1. 複素 2 次形式の実部として表せる実 2 次形式は λ を固有値として持てば $-\lambda$ も固有値として持つ．また固有値 λ と $-\lambda$ の重複度は等しい．

証明. 複素 2 次形式を

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

とおくと

$$Q(\sqrt{-1}z_1, \ldots, \sqrt{-1}z_n) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = -Q(z_1, \ldots, z_n)$$

を得る．よって実2次形式 $\mathrm{Re}\,Q$ の表現行列を A とすると，${}^tTAT = -A$ となる直交行列 T が存在する．

$$|A - \lambda I| = |{}^tT(A - \lambda I)T| = |{}^tTAT - \lambda I| = |-A - \lambda I| = |A - (-\lambda)I|$$

なので λ が A の固有値ならば $-\lambda$ も A の固有値でもある． □

複素解析的埋め込み $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^N$ に対して，$g(z)$ での法ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}$ 方向の g の第2基本形式は，複素2次形式

$$\left\langle \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial z_i \partial z_j} dz_i\, dz_j, \boldsymbol{v} \right\rangle$$

の実部であり λ がその固有値ならば，$-\lambda$ もそうである．ただし $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ のエルミート内積である．

■距離二乗関数　距離二乗関数

$$f_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \qquad f_a(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\langle a - g(z), a - g(z)\rangle = \frac{1}{2}\sum_k (a_k - g_k(z))\overline{(a_k - g_k(z))}$$

の偏微分を考える．$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とおくと $\bar{z}_i = x_i - \sqrt{-1}y_i$ なので，

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_i} = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$$

$$dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\bar{z}_i), \qquad dy_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(dz_i - d\bar{z}_i)$$

となり，

$$dg = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} dy_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_k} dz_k$$

を勘案すると

$$\begin{aligned} df_a &= -\frac{1}{2}\sum_k (dg_k\overline{(a_k - g_k(z))} + (a_k - g_k(z))\overline{dg_k(z)}) \\ &= -\mathrm{Re}\,\langle dg, a - g(z)\rangle \end{aligned}$$

を得る．つまり，$df_a = 0$ とすると $a - g = |a - g|\boldsymbol{v}$ なる法ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する．また，

$$\langle dg, dg\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial z_i}\overline{\frac{\partial g}{\partial z_j}} dz_i\, d\bar{z}_j$$

$$d^2 g = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_j} dx_i\, dy_j$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial x_j}dy_i\,dx_j+\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}dy_i\,dy_j \\
=&\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}\frac{dz_i+d\bar{z}_i}{2}\frac{dz_j+d\bar{z}_j}{2}+\sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}\frac{dz_i+d\bar{z}_i}{2}\frac{dz_j-d\bar{z}_j}{2\sqrt{-1}} \\
&+\sqrt{-1}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}\frac{dz_i-d\bar{z}_i}{2\sqrt{-1}}\frac{dz_j+d\bar{z}_j}{2}-\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}\frac{dz_i-d\bar{z}_i}{2\sqrt{-1}}\frac{dz_j-d\bar{z}_j}{2\sqrt{-1}} \\
=&\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}dz_i\,dz_j
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
d^2 f_a &= -\,d(\mathrm{Re}\,\langle dg, a-g\rangle) \\
&= -\,\mathrm{Re}\,(\langle d^2 g, a-g\rangle - \langle dg, dg\rangle) \\
&= -\,\mathrm{Re}\left[\sum_{i,j}\left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}dz_i\,dz_j, a-g\right\rangle - \sum_{i,j}\frac{\partial g}{\partial z_i}\overline{\frac{\partial g}{\partial z_j}}dz_i\,d\bar{z}_j\right]
\end{aligned}
$$

を得る．最後の項は第 1 基本形式であり，原点で $\sum dz_i d\bar{z}_i$ となるように座標を選んでおくと $a-g=|a-g|\boldsymbol{v}$ を代入して

$$
d^2 f_a = -|a-g|\left(\left\langle \sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}dz_i\,dz_j, \boldsymbol{v}\right\rangle - \frac{1}{|a-g|}\sum_{i,j}dz_i\,d\bar{z}_i\right)
$$

となり，$d^2 f_a$ が退化する事は $\frac{1}{|a-g|}$ が $\boldsymbol{v}$ 方向の第 2 基本形式の固有値となる事と同値であり，これは $|a-g|$ が $\boldsymbol{v}$ 方向の主曲率となる事と同値である．$\boldsymbol{v}$ 方向の第 2 基本形式は，正則 2 次形式の実部であるので，その固有値は正負同数である．それらを

$$
\pm\lambda_1,\ \pm\lambda_2,\ \ldots,\ \pm\lambda_n \quad (0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n)
$$

とすると，$d^2 f_a$ の負の固有値の個数は $\frac{1}{|a-g(z)|}$ 以上の $\boldsymbol{v}$ 方向の第 2 基本形式の個数であり，必ず n 個以下である事がわかる．

■**高さ関数**　高さ関数

$$
h_v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \qquad h_v(z) = \mathrm{Re}\,\langle g(z), v\rangle = \mathrm{Re}\,{\textstyle\sum_k} g_k(z)\overline{v_k}
$$

を考える．

$$
dh_v = \mathrm{Re}\,\langle dg(z), v\rangle, \qquad d^2 h_v = \mathrm{Re}\,\langle d^2 g(z), v\rangle
$$

なので，

- z が h_v の特異点であることは，v が法方向である事と同値

- このとき，h_v がモース特異点であることは，v 方向の第 2 基本形式が非退化であることと同値
- このとき，h_v の負の固有値の個数は v 方向の第 2 基本形式の負の固有値の個数に等しいがこれは丁度 n 個である．