判別集合の幾何学 数学特別講義 XX 2020 年 10 月 9 日 福井敏純

実 3 次方程式と実 4 次方程式の判別集合とそこに現れる幾何学の一端を紹介する．

実 3 次方程式　a_i を実数として 3 次方程式 $a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + a_3 t^3 = 0$ の判別集合を考える．本稿では同次化した方程式

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3 = 0$$

を考え，複素座標 $z = x + y\sqrt{-1}$, $\bar{z} = x - y\sqrt{-1}$ を用いて左辺を次の様に書き換えておく．（尚，元の多項式の根は原点を通る直線に対応することに注意する．）

$$P = \alpha z^3 + 3\beta z^2 \bar{z} + 3\bar{\beta} z \bar{z}^2 + \bar{\alpha} \bar{z}^3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

多項式 P は実多項式で定数倍してもその根は変わらないから，3 次方程式全体の空間は実 3 次元射影空間と考えられる．（正確には最高次の係数が 0 でないと仮定してないので 3 次以下の方程式の空間である．）多項式 P が重根を持つ条件は次で表される．

$$\exists z \in \mathbb{C} \ \ P_z = P_{\bar{z}} = 0 \tag{1}$$

この条件が (α, β) 空間内に**判別集合**を定める．実 3 次元射影空間内に判別集合を定めると考えても良い．

さて判別集合内の曲線の接線を考えよう．言い換えると $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $z = z(t)$ が関係式 $P_z = P_{\bar{z}} = 0$ を満たすとして微係数を考える．すると次を得る．

$$\begin{cases} P'_z + P_{zz} z' + P_{z\bar{z}} \bar{z}' = 0, \\ P'_{\bar{z}} + P_{z\bar{z}} z' + P_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}' = 0, \end{cases} \qquad \text{ただし } P' = \alpha' z^3 + 3\beta' z^2 \bar{z} + 3\bar{\beta}' z \bar{z}^2 + \bar{\alpha}' \bar{z}^3 \tag{2}$$

判別集合上の点 (α, β) を通り，(α', β') を方向ベクトルにもつ直線は $P = 0$ の定める超平面の中にある．実際，

$$\begin{aligned} 3P' =& z P'_z + \bar{z} P'_{\bar{z}} = -z(P_{zz} z' + P_{z\bar{z}} \bar{z}') - \bar{z}(P_{z\bar{z}} z' + P_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}') \\ =& -(z P_{zz} + \bar{z} P_{z\bar{z}}) z' - (z P_{z\bar{z}} + \bar{z} P_{\bar{z}\bar{z}}) \bar{z}' = -2[P_z z' + P_{\bar{z}} \bar{z}'] = 0 \end{aligned}$$

なので $P + tP' = 0$ となり，直線 $t \mapsto (\alpha, \beta) + t(\alpha', \beta')$ は $P = 0$ で決まる（超）平面の中にある．判別集合は重根を持つ方程式全体であるから，判別集合の点にはある数 ζ を重根にもつ方程式が対応する．すると ζ を根にもつ様な方程式全体がその点での判別集合の接空間になる．

(2) で $z' = \bar{z}' = 0$ なる場合を考えれば $P'_z = P'_{\bar{z}} = 0$ であり，直線 $t \mapsto (\alpha, \beta) + t(\alpha', \beta')$ は判別集合に含まれる．これはある特定の数（今の場合は z）を重根に持つ方程式全体は判別集合内の直線（より一般にアフィン空間）であることを示している．(1) は

$$\begin{pmatrix} 2z\bar{z} & \bar{z}^2 \\ z^2 & 2z\bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha z^2 \\ \bar{\alpha} \bar{z}^2 \end{pmatrix}$$

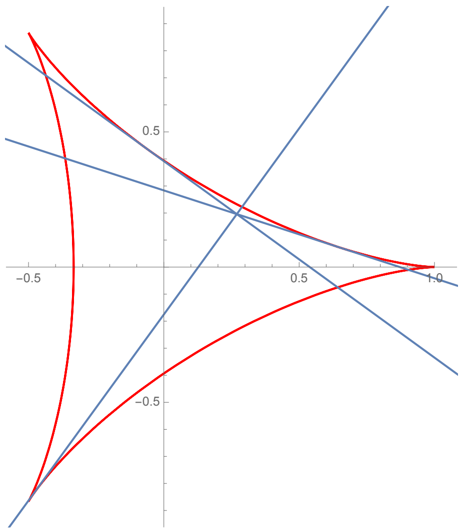
となるのでこれを $\beta, \bar{\beta}$ について解いて次式を得る．

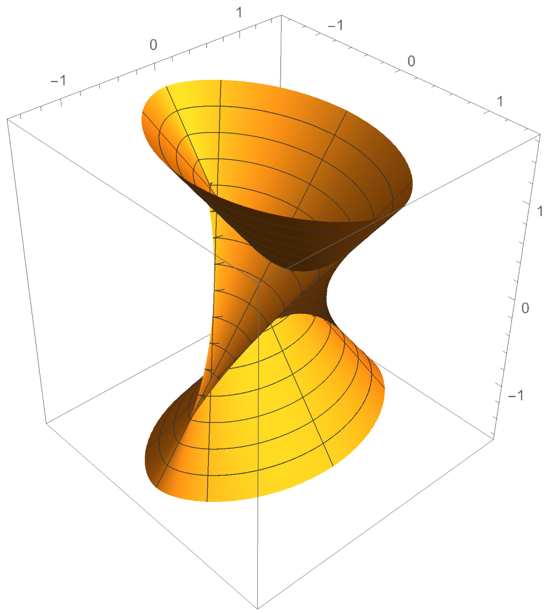
$$\beta = -\frac{1}{3z^2\bar{z}^2}\begin{vmatrix} \alpha z^2 & \bar{z}^2 \\ \bar{\alpha}\bar{z}^2 & 2z\bar{z} \end{vmatrix} = -\frac{2\alpha z^3 - \bar{\alpha}\bar{z}^3}{3z^2\bar{z}^2}$$

$\alpha = 1$ としたとき β 平面内に表示される判別集合の図を下の左の図内の赤い曲線として示す．直線は赤い曲線の接線であるが，ある特定の値を根に持つような 3 次方程式の軌跡である．接点ではその値を重根に持つ方程式に対応している．赤い曲線の内部の領域の点ではその点を通る赤い曲線に接する直線が 3 本引けるので，その点は 3 実根をもつ方程式を表している．赤い曲線の内部の領域の点ではその点を通る赤い曲線に接する直線は 1 本だけで，その点は実根が 1 つの 3 次多項式に対応している．

実は赤い曲線は 3 つの尖点をもつ 4 次曲線で β 平面内では次式で定義される（計算すると解る）．

$$3\beta^2\bar{\beta}^2 - 8\,\mathrm{Re}\,\beta^3 + 6\beta\bar{\beta} = 1$$





実 4 次方程式 実 4 次多項式

$$P = \alpha z^4 + 4\beta z^3\bar{z} + 6cz^2\bar{z}^2 + 4\bar{\beta}z\bar{z}^3 + \bar{\alpha}\bar{z}^4,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.\ c \in \mathbb{R}$$

に対しても，同じ計算をする事ができる．$\alpha = 1$ として，(β, c) の表す空間に判別集合を図示したものが上の右の図である．この曲線が直線をたくさん含んでいること，燕尾(つばめのお)と呼ばれる特異点が 4 つ存在し，それらは尖辺(とがりへん)と呼ばれる特異点で繋がっている事が見て取れる．

判別集合は $\exists\, z \in \mathbb{C}\ P_z = P_{\bar{z}} = 0$ で定義される．判別集合内の直線は同じ数を（実）重根に持つ 4 次方程式に対応していて尖辺軌跡に接している．尖辺は 3 重根を持つ方程式に対応する点の軌跡で，$\exists\, z \in \mathbb{C}\ P_{zz} = P_{z\bar{z}} = P_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ で定義される集合である．