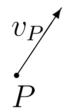
微分形式へのイントロダクション

1. ベクトル場

(x,y) 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の ベクトル場 v とは

$$v = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

のことである．ここで $a(x,y)$, $b(x,y)$ は x,y を変数とする関数である．また $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ はとりあえずは単に記号と思って欲しい．$\mathbf{R}^2$ の点 $P(x_0,y_0)$ に対し点 P を始点とする 2 次元ベクトル $(a(P),b(P)) = (a(x_0,y_0),b(x_0.y_0))$ が対応していると考えて幾何学的意味をつけておく。P を始点とするこのベクトルを v_P で表す。したがって単に $\frac{\partial}{\partial x}$ と書いたらその幾何学的意味は各点に対しその点を始点とする定数ベクトル $(1,0)$ を対応させる対応という事である。



$\mathbf{R}$ の座標を t で表す。上と全く同様にして $\mathbf{R}$ 上のベクトル場 $a(t)\frac{\partial}{\partial t}$ を考える事が出来る。すなわち点 $t=t_0$ で一次元ベクトル $(a(t_0))$ を対応させると考えるのである。

座標 (x,y,z) で表される 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ についてもベクトル場

$$v = a(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

を考える事が出来るのは同様である。ここで $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ は x,y,z を変数とする関数である.

問 1. $\mathbf{R}^2$ の時にならって $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場の定義を書け。

C^1 級の写像 $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える。源 (=定義域) の座標を (x,y), 行き先の $\mathbf{R}^2$ 座標を (X,Y) とかく事にする。そのとき f のヤコビ行列

$$J = \begin{pmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{pmatrix}$$

を考える。

(x,y) 平面上のベクトル場 $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ を考える。点 P (x_0,y_0) を固定すると

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

という関係式を使ってベクトル $v_P = a(x_0, y_0)\frac{\partial}{\partial x} + b(x_0, y_0)\frac{\partial}{\partial y}$ をベクトル

$$\begin{aligned}
(df)_P(v_P) &= a(P)\left(\frac{\partial X}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial Y}\right) + b(P)\left(\frac{\partial X}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial Y}\right) \\
&= \left(a(P)\frac{\partial X}{\partial x} + b(P)\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial X} + \left(a(P)\frac{\partial Y}{\partial x} + b(P)\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial Y} \\
&= (a(P), b(P))J\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

に移す事が出来る。これは $f(P)$ に始点を持つベクトルであると解釈する。注意すべき事はこれは (X, Y) 平面上のベクトル場 $A(X, Y)\frac{\partial}{\partial X} + B(X, Y)\frac{\partial}{\partial Y}$ を定めるとは限らないという事である。

例 1.1. 次の関係式で決まる写像 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える。

$$X = x$$
$$Y = xy$$

簡単な計算により次を得る.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + y\frac{\partial}{\partial Y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial Y}$$

すると

$$\begin{aligned}
a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} &= a\left(\frac{\partial}{\partial X} + y\frac{\partial}{\partial Y}\right) + bx\frac{\partial}{\partial Y} \\
&= a\frac{\partial}{\partial X} + (ay + bx)\frac{\partial}{\partial Y}
\end{aligned}$$

となる. a, b は (x, y) の関数だから a, $ay + bx$ も (x, y) の関数であるが (X, Y) の関数とは限らない。

(x, y, z) を座標系とする 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ から (X, Y, Z) を座標系とする 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ への写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ が与えられたとする.

ベクトル場 $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ と (x, y, z) 空間の点 P を固定する時, 上と全く同様にして関係式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Z} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial Z} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial Z}
\end{aligned}$$

をつかって $(df)_P(v_P)$ を定義する事が出来る.

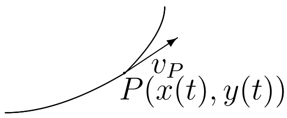
問 2. この $(df)_P(v_P)$ を具体的に書き下せ.

1.1. **速度ベクトル.** 次で与えられる C^1-写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ を考える. このような写像の事を平面の C^1-曲線と呼ぶ事がある.

$$t \mapsto f(t) = (x(t), y(t))$$

$t = t_0$ で定まる $\mathbf{R}$ の点を P で書く. $\mathbf{R}$ 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ にたいし, $f(P)$ を始点とするベクトル

$$(df)_P\left(\frac{\partial}{\partial}_P\right) = \frac{\partial x}{\partial t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}(t_0)\frac{\partial}{\partial y}$$



を考える.

これを C^1 曲線 f の 時刻 $t = t_0$ での 速度ベクトル(velocity) という. 速度ベクトルを $\left.\frac{df}{dt}\right|_P$ という記号で書く事がある.

空間の C^1-曲線 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$

$$t \mapsto f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

に対しても同様に速度ベクトルを定義する事が出来る.

問 3. この定義を具体的に書き下せ.

1.2. **写像の微分.** 次で与えられている C^1-写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を考える.

$$(x, y) \mapsto (X, Y, Z) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$$

$\mathbf{R}^2$ の点 P と P を始点とするベクトル $v_P = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ に対し, 規則

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

で $f(P)$ を始点とするベクトル $(df)_P(v_P)$ を定める事が出来る．すなわち

$$(df)_P(v_P) =$$
$$a\left(\frac{\partial X}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial x}(P)\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{\partial Z}{\partial z}(P)\frac{\partial}{\partial z}\right)+b\left(\frac{\partial X}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{\partial Z}{\partial y}(P)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

対応

$$v_P \mapsto (df)_P(v_P)$$

を写像 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ の点 P での 微分写像という．また, $P\in\mathbf{R}^2$ として, $f(P)$ を始点とするベクトル $(df)_P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{f(P)}$ で表し, $f(P)$ を始点とするベクトル $(df)_P\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ を $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{f(P)}$ などと表す.

一般に C^1-写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$

$$x=(x_1,...,x_n)\mapsto(y_1,..,y_p)=(f_1(x),...,f_p(x))$$

があたえられた時, その微分写像

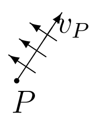
$$v_P\mapsto(df)_P(v_P),\quad P\in\mathbf{R}^n$$

を全く同様にして定義する事が出来る．x_i 軸の像であらわされる曲線の $\mathbf{R}^n$ での点 P での速度ベクトルを $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$ であらわす.

問 4. この定義を具体的に書き下せ.

2. 微分形式

まずは物理的なイメージの話をする．(x,y) 平面に微小粒子がながれているとする．流体をイメージしてもよいし, 電子のながれをイメージしてもらってもよい．点 P (x_0,y_0) を始点とするベクトル v_P を考える．ベクトル v_P の終点を Q とするとき, 単位時間に有向線分 $\overrightarrow{PQ}$ をその矢印方向に向かって右から左に通過する微小粒子の個数を $N_P(v_P)$ で表す．もし粒子が左から右に移動した時は符号をかえて, 右から左へ負の個数粒子が移動したと言う事にする．このとき, $N_P(v_P)$ は v_P については線形ではないので線形化にするためこの無限小版を考える．すなわち



$$N_P(\varepsilon v_P)=\varepsilon\omega_P(v_P)+O(\varepsilon^2)\quad \varepsilon\to 0$$

とおくと $\omega_P(v_P)$ は v_P について線形であると考えられる．すなわち

$$\omega_P(u_P+v_P)=\omega_P(u_P)+\omega_P(v_P),\quad \omega_P(\lambda u_P)=\lambda\omega_P(u_P)\quad(\lambda\in\mathbf{R})$$

問 5. 何故か？理由を考えよ. *(これは数学の問題ではない事に注意)*

ここで定めた 1 形式は平面上の微小粒子の流れを記述していると考えられる.

2.1. **1 形式.** 上に述べた

$$\text{対応} \qquad v_P \mapsto \omega_P(v_P)$$

はベクトルに対し実数を対応させるので, ベクトル空間の双対空間の元, 又はコベクトル (covector), と考える事が出来る. 各点 P に コベクトルを対応させる対応を<u>1-形式</u>(1-form) という.

例 2.1. *dx, dy は次で 1 形式とみなす事が出来る.*

$$(dx)_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P\right)=1,\quad (dx)_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)=0,$$
$$(dy)_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P\right)=0,\quad (dy)_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)=1.$$

すなわち $v=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ とするとき

$$(dx)_P(v_P)=a(P),\quad (dy)_P(v_P)=b(P).$$

$\omega=pdx+qdy$, p, q は (x,y) の関数, とするときω は 1 形式である. 実際

$$\omega_P(v_P)=(pdx+qdy)_P\left(\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)=p(P)a(P)+q(P)b(P)$$

である. このように書かれた 1 形式を<u>1 次の微分形式</u>と呼ぶ事がある.

補題 2.2. *任意の $\mathbf{R}^2$ 上の 1-形式 ω に対し, 適当な関数 p, q を選べば$\omega=pdx+qdy$ と書ける.*

証明. ω を $\mathbf{R}^2$ 上の 1-形式とする. $p(P)=\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P\right)$, $q(P)=\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)$ とおくと $v=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_P(v_P)&=\omega_P\left(\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)\\&=a(P)\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P\right)+b(P)\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_P\right)\\&=a(P)p(P)+b(P)q(P)\end{aligned}$$

よってすべての P に対し $\omega_P=p(P)(dx)_P+q(P)(dy)_P$. つまり $\omega=pdx+qdy$. □

上と全く同様にして $\mathbf{R}^3$ 上の 1 形式が定義できる.

問 6. *$\mathbf{R}^3$上の 1 形式を定義し, それが $adx+bdy+cdz$ の形のものに限る事を証明せよ.*

(x,y) 平面から (X,Y) 平面への写像 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ が $X=X(x,y), Y=Y(x,y)$ で与えられているとする. (X,Y) 平面上の 1 形式 ω が与えられたとする. P を (x,y) 平面上の点 v_P を P を始点とするベクトルとすると,

$$u_P\mapsto\omega_{f(P)}((df)_P(v_P))$$

は (x,y) 平面上の 1 形式になる．この 1 形式を ω の f による引き戻しといい $f^*\omega$ とかく．$f^*\omega = \alpha dx + \beta dy$, $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ とかいたとき

$$f^*\omega(v) = (\alpha dx + \beta dy)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) = a\alpha + b\beta$$

ところで $\omega = AdX + BdY$ と書いておけば

$$\begin{aligned}
f^*\omega(v) &= \omega(df(v)) \\
&= \omega\left(\left(a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial X} + \left(a\frac{\partial Y}{\partial x} + b\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial Y}\right) \\
&= A\left(a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial X}{\partial y}\right) + B\left(a\frac{\partial Y}{\partial x} + b\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\
&= a\left(A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + b\left(A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

したがって次の関係式を得る．

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x} \\
\beta &= A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f^*\omega &= \alpha dx + \beta dy \\
&= \left(A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(A\frac{\partial X}{\partial y} + B\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy \\
&= Af^*dX + Bf^*dY
\end{aligned}$$

を得る．

$\mathbf{R}^n$ 上でも全く同じに 1 形式が定義できる．

問 7. $\mathbf{R}^n$ 上の *1* 形式は $a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ の形をしている事を示せ．

また写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ があれば $\mathbf{R}^p$上の 1 形式 ω を $\mathbf{R}^n$ 上の 1 形式に引き戻す事が出来る．のも全く同様である

問 8. $\mathbf{R}^p$ 上の *1* 形式 $\omega = a_1dy_1 + \cdots + a_pdy_p$ の写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ による引き戻しを具体的に書き下せ．

2.2. **1 形式の曲線に沿った積分．** $\mathbf{R}^2$ 上の 1-形式 $\omega = pdx + qdy$ と C^1-曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ が与えられていると仮定する．$t = t_0$ できまるこの曲線上の点 P における速度ベクトルは $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_P$ であった．このとき

$$\omega_P\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_P\right)$$

は実数だから, これは曲線のパラメータ t の関数である. よって積分

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 \omega_P\,(\,\frac{d\gamma}{dt}\,|_P)\,dt$$

を考える事が出来る. これを γ 上での 1 形式 ω の線積分という.

曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ を変数変換 $t = t(s)$, $t(0) = 0$, $t(1) = 1$, によって別のパラメータ s でかいてみる. このとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega_P \left(\left.\frac{d\gamma}{ds}\right|_P \right) ds &= \int_0^1 \omega_P \left(\left(\frac{d\gamma}{ds}\frac{dt}{ds} \right)_P \right) dt \\ &= \int_0^1 \omega_P \left(\left.\frac{d\gamma}{ds}\right|_P \right) \frac{dt}{ds} dt \\ &= \int_\gamma \omega\end{aligned}$$

よって線積分の値 $\int_\gamma \omega$はγのパラメータ t の選び方によらないことがわかる.

問 9. 上述の事に習って $\mathbf{R}^3$ 上の *1*形式 $\omega = adx + bdy + cdz$ の C^1-曲線 $\gamma : [0.1] \to \mathbf{R}^3$ 上の線積分を定義せよ. 又その線積分が γのパラメータ t の選び方によらないことを示せ. n 次元ではどうなるか?

2.3. **2 形式-物理的なイメージ.** (x, y) 平面を微小粒子がながれているとする. 点 P を始点とした 2 つのベクトル u_P, v_P を考える. u_P の終点を Q, v_P の終点を S, $u_P + Q_P$ の終点を R とする. このとき向き付けられた平行四辺形 $PQRS$ 内にある粒子の単位時間当たりの増加数を $M_P(u_P, v_P)$ であらわす. このとき $P \to Q \to R \to S$ がこの順に反時計周り (正の向き) の時は粒子数が増加した場合は $M_P(u_P, v_P)$ は正とし, 粒子数が減少した場合は $M_P(u_P, v_P)$ は負になると約束しておく. 逆に $P \to Q \to R \to S$ がこの順に時計周り (負の向き) の時は粒子数が増加した場合は $M_P(u_P, v_P)$ は負とし, 粒子数が減少した場合は $M_P(u_P, v_P)$ は正になると約束しておく.

$M_P(u_P, v_P)$ は u_P, v_P について線形ではない. よってこの無限小版を考え線形化しよう.

(♠)
$$M_P(\varepsilon u_P, \varepsilon v_P) = \varepsilon^2 \omega_P(u_P, v_P) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0$$

で $\omega_P(u_P, v_P)$ を定義する. すると $\omega_P(u_P, v_P)$ は双線形. つまり次の関係式が成り立つ. 添字の P は本質的でないので省いて書くと,

$$\omega(u_1 + u_2, v) = \omega(u_1, v) + \omega(u_2, v), \quad \omega(\lambda u, v) = \lambda\omega(u, v),$$
$$\omega(u, v_1 + v_2) = \omega(u, v_1) + \omega(u, v_2), \quad \omega(u, \lambda v) = \lambda\omega(u, v).$$

が成立する. また ω は交代的 (歪対称という事もある). つまり

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u).$$

問 10. このことを確かめよ. u_P と v_P を入れ換えると向き付けられた平行四辺形の向きが逆になることに注意

上の関係式 (双線形性と交代性) が成立するような ω を<u>2 形式</u>(2-form) という.

上で定めた 2 形式は前述した平面の微小粒子の流れの 1 形式の外微分と呼ばれるものになっている. (♠) の右辺の ε に関する一次の項が消えているという事が 問 5 の解答と関連している事に注意しておこう. 外微分については詳細は後述する.

3 次元空間の 2 形式の例をあげる. 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ に微小粒子がながれているとする. $\mathbf{R}^3$ の点 P を始点とする 2 つのベクトル u_P, v_P のつくる向きずけられた平行四辺形を考える. $M_P(u_P, v_P)$ で単位時間にこの平行四辺形を裏から表に通過する粒子の数とする.

$$M_P(\varepsilon u_P, \varepsilon v_P) = \varepsilon^2 \omega_P(u_P, v_P) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0$$

で ω を定義するとこれは 2-形式になる. これは空間内の微小粒子の流れを記述している 2 形式である. $M_P(u_P, v_P)$ として u_P と v_P の作る平行四辺形を通る電気量の合計にするとω は電流密度と呼ばれるものになる.

問 11. このことを確かめよ. u_P と v_P を入れ換えると平行四辺形の向きが逆になることに注意

2.4. **2 形式.** 双線形性と交代性が成立するような ω を一般に<u>2 階の交代テンソル</u>という. $\mathbf{R}^n$ の各点 P に対して 2 階の交代テンソル $(u_P, v_P) \to \omega_P(u_P, v_p)$ が与えられているとき $\mathbf{R}^n$ 上の<u>2 形式</u>(2-form) が与えられたという.

補題 2.3.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

という関係にある *4* つのベクトル u, v, u', v' にたいしては

$$\omega(u, v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \omega(u', v')$$

が成立する.

証明.

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \omega(a_{11}u' + a_{12}v', a_{21}u' + a_{22}v') \\ &= a_{11}\omega(u', a_{21}u' + a_{22}v') + a_{12}\omega(v', a_{21}u' + a_{22}v') \\ &= a_{11}a_{22}\omega(u', v') + a_{12}a_{21}\omega(v', v') \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\omega(u', v') \end{aligned}$$

□

例 2.4. (x, y) 平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P に対し

$$(u_P, v_P) \mapsto a(P) \begin{vmatrix} dx(u_P) & dx(v_P) \\ dy(u_P) & dy(v_P) \end{vmatrix}$$

は *2*形式を定める. この *2*形式を $a dx \wedge dy$ と書く. 但し $a(P)$ は $\mathbf{R}^2$の関数である.

補題 2.5. 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の *2*形式はすべてこの形にかける.

証明. $u=a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}$, $v=b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}$ とおく.

$$\begin{aligned}\omega(u,v)&=\omega\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y},b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\\&=(a_1b_2-a_2b_1)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

なので $a=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ とおけばよい. □

例 2.6. (x,y,z) 空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P に対し

$$(u_P,v_P)\mapsto a(P)\begin{vmatrix}dy(u_P)&dy(v_P)\\dz(u_P)&dz(v_P)\end{vmatrix}+b(P)\begin{vmatrix}dz(u_P)&dz(v_P)\\dx(u_P)&dx(v_P)\end{vmatrix}+c(P)\begin{vmatrix}dx(u_P)&dx(v_P)\\dy(u_P)&dy(v_P)\end{vmatrix}$$

は *2*形式を定める. この *2*形式を $ady\wedge dz+bdx\wedge dy+cdx\wedge y$ と書く. 但し a, b, c は $\mathbf{R}^3$の関数である.

補題 2.7. 空間 $\mathbf{R}^3$ 上の *2*形式はすべてこの形にかける.

証明. $u=a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}$, $v=b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}$ とおく.

$$\begin{aligned}\omega(u,v)&=\omega\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z},\ b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\\&=(a_1b_2-a_2b_1)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)+(a_3b_1-a_1b_3)\omega\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}\right)+(a_2b_3-a_3b_2)\omega\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

なので明らか.

$$a=\omega\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad b=\omega\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}\right),\quad c=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

とおけばよい. □

例 2.8. $\mathbf{R}^n$ 上の *1*形式 α, β に対し,

$$(u,v)\mapsto(\alpha\wedge\beta)(u,v):=\begin{vmatrix}\alpha(u)&\alpha(v)\\\beta(u)&\beta(v)\end{vmatrix}$$

で $\alpha\wedge\beta$ を定めるとこれは $\mathbf{R}^n$ 上の *2*形式になる.

問 12. $\mathbf{R}^n$上の 2 形式は次のものに限ることを示せ. *(2 次の微分形式)*

$$\omega=\sum_{i<j}a_{ij}dx_i\wedge dx_j.$$

写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ によって $\mathbf{R}^p$ で定義された 2 形式 ω があるとき, 次のようにして $\mathbf{R}^n$ 上の 2 形式 $f^*\omega$ を定義することが出来る

$$(u_P,v_P)\mapsto(f^*\omega)_P(u_P,v_P):=\omega_{f(P)}((df)_P(u_P),(df)_P(v_P)),\quad P\in\mathbf{R}^n.$$

2.5. **2 形式の積分.** D を (x,y) 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域とし写像 $f: E \to \mathbf{R}^n$ によって正方形 E が集合 D に写っているとする. (以下の議論は E が面積確定な有界集合であればよいが理論構成上は正方形だけに限定しても一般性を失わないと思われる.) D の各点 P で定義された 2 形式 ω_P があるとする. さて $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は 点 P に依存して定まる P を始点とする 2 つのベクトルであった. よって$\omega_P\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ は D 上の関数とみなすことが出来るので, 次の積分を考える事が出来る.

$$\int_D \omega := \iint_E \omega_P \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

パラメーターを取り換えた時この積分がどのように変わるかを調べておこう. 変数変換

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta)$$

によって (ξ,η) 平面の正方形 E' が (x,y) 平面の正方形 E に写るとする.

このとき (合成 $E' \to E \to D$ を考える事により) (ξ,η) は D のパラメターとみなせる事に注意しておく.

すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

なので, 前の補題より

$$\omega_P \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \omega_P \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ここで次を仮定する.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} > 0.$$ (このとき (x,y) と (ξ,η) は<u>同じ向きを定める</u>という.)

すると, 2 重積分の変数変換の公式より

$$\begin{aligned}\iint_{E'} \omega_Q \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) d\xi d\eta &= \iint_{E'} \omega_P \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta \\ &= \iint_E \omega_P \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) dxdy\end{aligned}$$

となる. よって積分 $\int_D \omega$ は (向きが同じなら) パラメータの取り方に依存しないで定まる事がわかる.

2.6. k **形式.** k 重線形形式 $\omega(v_1, ..., v_k)$ で交代的なものをk 階の交代テンソルという. k 重線形形式とは k 個のベクトル $v_1, ..., v_k$ に対し実数を対応させる対応で

$$(v_1, ..., v_k) \mapsto \omega(v_1, ..., v_k)$$

各変数について線形なものをいう. すなわち次が成立するときをいう. 但し λ は実数.

$$\begin{aligned}
\omega(v_1 + v_1', v_2, ..., v_k) &= \omega(v_1, v_2, ..., v_k) + \omega(v_1', v_2, ..., v_k) \\
&\cdots \\
\omega(v_1, ..., v_{k-1}, v_k + v_k') &= \omega(v_1, ..., v_{k-1}, v_k) + \omega(v_1, ..., v_{k-1}, v_k') \\
\omega(\lambda v_1, v_2, ..., v_k) &= \lambda\omega(v_1, v_2, ..., v_k) \\
&\cdots \\
\omega(v_1, ..., v_{k-1}, \lambda v_k) &= \lambda\omega(v_1, ..., v_{k-1}, v_k)
\end{aligned}$$

ω が交代的とは, どの 2 つを入れ換えてもその符号が入れかわる, すなわち

$$\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k), \quad i < j$$

をみたすときをいう.

$\mathbf{R}^n$上の k 個の 1 形式 α_1, ..., α_k を考える.

$$(v_1, v_2, ..., v_k) \mapsto \begin{vmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) & \cdots & \alpha_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \alpha_k(v_2) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{vmatrix}$$

できまる k 形式を $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ であらわす.

問 13. $\mathbf{R}^n$ 上の k-形式は次の形をしている事を示せ.

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ と $\mathbf{R}^p$上の k 形式 ω があるとき次のようにして $\mathbf{R}^n$ 上の k 形式 $f^*\omega$ を定義することが出来る.

$$(v_1, ..., v_k) \mapsto f^*\omega(v_1, ..., v_k) := \omega_{f(P)}((df)_P(v_1), ..., (df)_P(v_k)), \quad P \in \mathbf{R}^n.$$

但し $v_1, ..., v_k$ は点 P を始点とするベクトルである.

2.7. k **形式の積分.** ω を $\mathbf{R}^n$上の k 形式, D を $\mathbf{R}^n$ の部分集合で次の性質を満たすものとする.

$\mathbf{R}^k$ の立方体 E と C^2写像 $f : E \to \mathbf{R}^n$ が存在して E の内点集合 E^0上 f は単射かつ, $f(E^0) \subset D \subset f(E)$.

$(t_1, ..., t_k)$ を $\mathbf{R}^k$ の座標とする. このとき D 上定義された k 形式 ω にたいし

$$P \mapsto \omega\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t_1}\right|_P, ..., \left.\frac{\partial f}{\partial t_k}\right|_P\right)$$

は $f(E)$ 上の関数であるがこれを f で引き戻して E 上の関数とみなすことができる.

$f : E^0 \to D$, $f' : E'^0 \to D$ はともに単射だから合成写像

$$E^0 \to f(E) \cap f'(E') \leftarrow E'^0$$

を考える事が出来る. この写像のヤコビ行列式が (各点で) 正 (負) の時 $f : E \to \overline{D}$ と $f' : E' \to \overline{D}$ は D に 同じ (逆の) 向きを定めるという.

問 14. $f : E \to \mathbf{R}^n$ と $f' : E' \to \mathbf{R}^n$ がともに上の性質を満たし D に同じ向きを定める時, 次が成立する事を示せ.

$$\int_E \omega \left(\left.\frac{\partial f}{\partial t_1}\right|_P, ..., \left.\frac{\partial f}{\partial t_k}\right|_P \right) dt_1 \cdots dt_k = \int_{E'} \omega \left(\left.\frac{\partial f'}{\partial t'_1}\right|_P, ..., \left.\frac{\partial f'}{\partial t'_k}\right|_P \right) dt'_1 \cdots dt'_k$$

(k 重積分の変数変換の公式)

よってこの積分値は何らかの意味を持っていると考えれれる.

$$\int_D \omega := \int_E \omega \left(\left.\frac{\partial f}{\partial t_1}\right|_P, ..., \left.\frac{\partial f}{\partial t_k}\right|_P \right) dt_1 \cdots dt_k$$

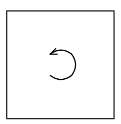
とおく.

2.8. **境界の向きについて.** ここで向きづけられた集合の境界の向きについて述べておこう. 向きは局所的な情報から決まるべきであるから原点が考えている集合 E の境界点であるとし原点のある近傍 U が存在して

$$E \cap U = \{(t_1, ..., t_k) \in U : t_i \geq 0\}$$

であると仮定する. そのとき境界 ∂E は原点の近くでは $t_i = 0$ で定まる超平面である. 集合 $E \cap U$ は $\mathbf{R}^k$ の座標 $(t_1, ..., t_k)$ により向き付けられているとする. また $x_i = 0$ なる超平面には 座標 $(t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_k)$ で向きが入る.

E の境界としての ∂E の向きは i が偶数のとき 座標 $(t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_k)$ できまる向きと一致し (同じ向きである), i が奇数のとき 座標 $(t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_k)$ できまる向きとは一致しない (逆向きである) と約束する.



正方形 E の向き

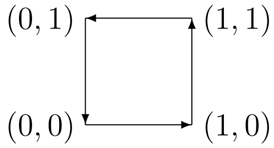
例 2.9. 座標 (x, y) で向き付けられた正方形 *(右図)*

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

を考える. 境界 ∂E の向きは

$$(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0)$$

できまる向きである.



E の境界としての向き

3. 外微分

まず座標系による外微分の一般的な定義を与える. k 形式 ω が次の式で与えられているとする.

$$\omega = \sum a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad a_{i_1,\dots,i_k} \text{は関数}$$

すると ω の 外微分 $d\omega$ とは次の式で与えられる $k+1$ 形式のことである.

$$d\omega = \sum da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad da_{j_1,\dots,j_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1,\dots,j_k}}{\partial x_i} dx_i.$$

これだけでは幾何学的意味がわからないので, 以下それを述べよう.

k 形式 ωが与えられたとする. P を始点とする $k+1$ 個のベクトル $v_1, \dots, v_{k+1}$ を考える. $k+1$ 個のベクトル $\varepsilon v_1, \dots, \varepsilon v_{k+1}$ が作る向きづけられた $k+1$ 次元平行体 $E(\varepsilon)$ を考える. その境界 $\partial E(\varepsilon)$ は k 次元で, これにも自然に向きが入る.

定理 3.1. 次を満たす $k+1$ 形式 Ω が存在する.

$$\int_{\partial E(\varepsilon)} \omega = \varepsilon^{k+1} \Omega_P(v_1, \dots, v_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1})$$

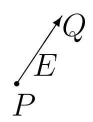
さらに Ω は ω の外微分 $d\omega$ と一致する.

上に定義した Ω を ω の外微分の幾何学的定義という事にする. 以下幾つかの場合に, 幾何学的定義を用いて外微分を計算して見よう.

3.1. 関数の外微分.

平面 $\mathbf{R}^2$ の場合のみを考える. ($\mathbf{R}^n$ で考えても同じであるから一般の場合は述べない.) 平面の点 P と そこを始点とする 0 本のベクトルから決まる実数は平面上の関数と同じ事なので, 0 形式は関数とみなす事が出来る.

平面 $\mathbf{R}^2$ 上の点 P と P を始点とするベクトル v_P をとる. 終点を Q で表す.



E で 点 P と $P+v_P$ を結ぶ有向成分 $\overrightarrow{PQ}$ をあらわすと その境界 ∂E は 2 点 P と Q であるが 終点 Q には正の向き, 始点 P には負の向きが入っていると考える. このことを

$$\partial E = Q - P$$

とかく事にする. するとテイラーの定理より

$$\int_{\partial E} f = f(Q) - f(P) = \frac{\partial f}{\partial x} dx(v_P) + \frac{\partial f}{\partial y} dx(v_P) + o(|v_P|)$$

である. ここで点の上での関数の積分値とはその点での関数の値だと考えている.

上の式で v_P を εv_P に置き換えると

$$f(P + \varepsilon v_P) - f(P) = \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) (v_P) + o(\varepsilon)$$

をえる．よって関数の外微分を幾何学的定義によって計算することができた．

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

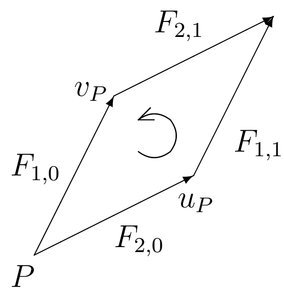
3.2. **1形式の外微分．** (x, y) 平面上の 1 形式 $\omega = adx + bdy$ を考える．(x, y) 平面上の点 P を始点とする 2 つのベクトル u_P, v_P を考える．この 2 つのベクトル u_P, v_P のつくる平行四辺形を E とかく．すなわち

$$E = \{P + t_1u_P + t_2v_P : 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}.$$

E には パラメータ (t_1, t_2) によって自然に向きが入っていると考える．u_P の終点を Q, v_P の終点を S, $u_P + Q_P$ の終点を R として $P \to Q \to R \to S$ の順に回る閉曲線 γ を考える．この閉曲線により E の向きから E の境界に向きを定めていると考えることにする．

考えている平行四辺形の各辺は次のようにパラメトライズされている．

$$\begin{aligned}
F_{1,0} &= \{P + t_1u_P + t_2v_P : t_1 = 0,\ 0 \leq t_2 \leq 1\} \\
F_{1,1} &= \{P + t_1u_P + t_2v_P : t_1 = 1,\ 0 \leq t_2 \leq 1\} \\
F_{2,0} &= \{P + t_1u_P + t_2v_P : t_2 = 0,\ 0 \leq t_1 \leq 1\} \\
F_{2,1} &= \{P + t_1u_P + t_2v_P : t_2 = 1,\ 0 \leq t_1 \leq 1\}
\end{aligned}$$



このとき パラメータ t_1 は $F_{2,0}$, $F_{2,1}$ の向きを定め，パラメータ t_2 は $F_{1,0}$, $F_{1,1}$ の向きを定めていると考えられるが，それらの向きを考慮して

$$\partial E = F_{1,1} - F_{1,0} - F_{2,1} + F_{2,0}$$

という書き方をする．ここで，パラメータ t_1 または t_2 の決める各辺の向きと平行四辺形 E の向きから決まる各辺の向きが一致する場合は $+$, 一致しない場合は $-$ の符号をつけている．このとき先程の閉曲線 γ を ∂E で表す事にする．

$\gamma = \partial E$ にそった線積分を計算したい．先ず次の事実に注意する．

$$\int_\gamma \omega = \int_{\partial E} \omega = \int_{F_{1,1}-F_{1,0}} \omega - \int_{F_{2,1}-F_{2,0}} \omega$$

簡単のため添字の P を略して書いた．この各項を具体的に書き下すと次のようになる．

$$\int_{F_{1,1}-F_{1,0}} \omega = \int_{F_{1,1}-F_{1,0}} (adx + bdy)$$
$$= \int_0^1 ([a(P+u+t_2v) - a(P+t_2v)]dx(v) + [b(P+u+t_2v) - b(P+t_2v)]dy(v))dt_2$$
$$\int_{F_{2,1}-F_{2,0}} \omega = \int_{F_{2,1}-F_{2,0}} (adx + bdy)$$
$$= \int_0^1 ([a(P+t_1u+v) - a(P+t_1u)]dx(u) + [b(P+t_1u+v) - b(P+t_1u)]dy(u))dt_1$$

これらの被積分関数を評価するためまずテイラーの定理より次のように書いておく．

$$a(P+u+t_2v) - a(P+t_2v) = \frac{\partial a}{\partial x}(P+t_2v)dx(u) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+t_2v)dy(u) + O(|u|^2)$$
$$b(P+u+t_2v) - b(P+t_2v) = \frac{\partial b}{\partial x}(P+t_2v)dx(u) + \frac{\partial b}{\partial y}(P+t_2v)dy(u) + O(|u|^2)$$
$$a(P+t_1u+v) - a(P+t_1u) = \frac{\partial a}{\partial x}(P+t_1u)dx(v) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+t_1u)dy(v) + O(|v|^2)$$
$$b(P+t_1u+v) - b(P+t_1u) = \frac{\partial b}{\partial x}(P+t_1u)dx(v) + \frac{\partial b}{\partial y}(P+t_1u)dy(v) + O(|v|^2)$$

これらを区間 $[0,1]$ で積分したいのでこの区間に積分の平均値の定理を適用すると，次を満たす $\theta^*_{*,*}$ 達が 0 と 1 の間に存在する事をがわかる．

$$\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x}(P+t_2u)dt_2 = \frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta^a_{1,x}u) \qquad \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y}(P+t_2u)dt_2 = \frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta^a_{1,y}u)$$
$$\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x}(P+t_2u)dt_2 = \frac{\partial b}{\partial x}(P+\theta^b_{1,x}u) \qquad \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(P+t_2u)dt_2 = \frac{\partial b}{\partial x}(P+\theta^b_{1,y}u)$$
$$\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x}(P+t_1v)dt_1 = \frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta^a_{2,x}v) \qquad \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y}(P+t_1v)dt_1 = \frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta^a_{2,y}v)$$
$$\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x}(P+t_1v)dt_1 = \frac{\partial b}{\partial x}(P+\theta^b_{2,x}v) \qquad \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(P+t_1v)dt_1 = \frac{\partial b}{\partial x}(P+\theta^b_{2,y}v)$$

以上の事を積分の式に代入すると $|u|, |v| \to 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\int_{F_{1,1}-F_{1,0}} \omega &= \left[\frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta u)dx(u) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+\theta u)dy(u) + O(|u|^2)\right] dx(v) \\
&\quad + \left[\frac{\partial b}{\partial x}(P+\theta u)dx(u) + \frac{\partial b}{\partial y}(P+\theta u)dy(u) + O(|u|^2)\right] dy(v) \\
\int_{F_{2,1}-F_{2,0}} \omega &= \left[\frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta v)dx(v) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+\theta v)dy(v) + O(|v|^2)\right] dx(u) \\
&\quad + \left[\frac{\partial b}{\partial y}(P+\theta v)dx(v) + \frac{\partial b}{\partial y}(P+\theta v)dy(v) + O(|v|^2)\right] dy(u)
\end{aligned}$$

となる. やかましいので θ の添字達は全部略してかいた. ここで u, v をそれぞれ εu, εv におきかえる. 対応して E, $F_{i,0}$, $F_{i,1}$ も変わるからそれらを $E(\varepsilon)$, $F_{i,0}(\varepsilon)$, $F_{i,1}(\varepsilon)$ とかく. $\varepsilon \to 0$ なる極限を考えれば

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E(\varepsilon)} \omega &= \int_{F_{1,1}(\varepsilon)-F_{1,0}(\varepsilon)} \omega - \int_{F_{2,1}(\varepsilon)-F_{2,0}(\varepsilon)} \omega \\
&= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial a}{\partial x}(P)dx(u)dx(v) + \frac{\partial a}{\partial y}(P)dy(u)dx(v) + \frac{\partial b}{\partial x}(P)dx(u)dy(v)\right. \\
&+ \frac{\partial b}{\partial y}(P)dy(u)dy(v) + \frac{\partial a}{\partial x}(P)dx(u)dx(v) + \frac{\partial a}{\partial y}(P)dx(u)dy(v) \\
&\left.+ \frac{\partial b}{\partial x}(P)dy(u)dx(v) + \frac{\partial b}{\partial y}(P)dy(u)dy(v)\right) + o(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon^2 \left(\frac{\partial a}{\partial y}(P)(dx(v)d(u) - dx(u)dy(v)) + \frac{\partial b}{\partial x}(P)(dx(u)dy(v) - dy(u)dx(v))\right) + o(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial a}{\partial y}(P) + \frac{\partial b}{\partial x}(P)\right)(dx(u)dy(v) - dy(u)dx(v)) + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

よって $\varepsilon \to 0$ のとき,

$$\int_{\partial E(\varepsilon)} \omega = \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial a}{\partial y}(P) + \frac{\partial b}{\partial x}(P)\right) \begin{vmatrix} dx(u) & dy(u) \\ dx(v) & dy(v) \end{vmatrix} + o(\varepsilon^2)$$

をえる.

よって 1 形式の外微分を幾何学定義によって計算することができた.

$$d(adx + bdy) = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

これは次のように考えれば記憶の負担が軽くなる.

$$
\begin{aligned}
d(adx+bdy) &= da\wedge dx + db\wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x}dx + \frac{\partial b}{\partial y}dy\right)\wedge dy \\
&= \frac{\partial a}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x}dx\wedge dy \\
&= \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right)dx\wedge dy
\end{aligned}
$$

3.3. **2 形式の外微分.** $\mathbf{R}^3$ 上の 2 形式$\omega = ady\wedge dz + bdz\wedge dx + cdx\wedge dy$ の外微分を幾何学的定義によって計算してみよう. $\mathbf{R}^3$ の点 P を始点とするベクトル v_1, v_2, v_3 を取りそれらの作る向き付けられた平行 6 面体 E を考える.

$$E = \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : 0 \le t_1, t_2, t_3 \le 1\}$$

パラメータ (t_1, t_2, t_3) により E に自然に向きが入っていると考えるのである. ∂E には E から自然に向きが誘導されている. ∂E の各面は次の面達で記述される.

$$
\begin{aligned}
F_{1,0} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_1 = 0, 0 \le t_2, t_3 \le 1\} \\
F_{1,1} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_1 = 1, 0 \le t_2, t_3 \le 1\} \\
F_{2,0} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_2 = 0, 0 \le t_1, t_3 \le 1\} \\
F_{2,1} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_2 = 1, 0 \le t_1, t_3 \le 1\} \\
F_{3,0} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_3 = 0, 0 \le t_1, t_2 \le 1\} \\
F_{3,1} &= \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_3 = 1, 0 \le t_1, t_2 \le 1\}
\end{aligned}
$$

$\partial E = F_{1,1} - F_{1.0} - F_{2,1} + F_{2,0} + F_{3,1} - F_{3,0}$ であるから

$$\int_{\partial E}\omega = \int_{F_{1,1}-F_{1,0}}\omega - \int_{F_{2,1}+F_{2,0}}\omega + \int_{F_{3,1}-F_{3,0}}\omega$$

となっている.

問 15. 前節に習って積分 $\int_{\partial E}\omega$ を計算する事により次の式を示せ

$$d(ady\wedge dz + bdz\wedge dx + cdy\wedge dz) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

なおヒントになる式を以下に書いておく.

$$
\begin{aligned}
&\int_{F_{1,1}-F_{1,0}} a dy \wedge dz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [a(P+v_1+t_2v_2+t_3v_3) - a(P+t_2v_2+t_3v_3)] dy \wedge dz(v_2,v_3) dt_2 dt_3 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial a}{\partial x}(P+t_2v_2+t_3v_3)dx(v_1) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+t_2v_2+t_3v_3)dy(v_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial z}(P+t_2v_2+t_3v_3)dz(v_1) + O(|v_1|^2) \right] dy \wedge dz(v_2,v_3) dt_2 dt_3 \\
&= \left[\frac{\partial a}{\partial x}(P+\theta^a_{1,x}v_1+t_2v_2+t_3v_3)dx(v_1) + \frac{\partial a}{\partial y}(P+\theta^a_{1,y}v_1+t_2v_2+t_3v_3)dy(v_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial z}(P+\theta^a_{1,z}v_1+t_2v_2+t_3v_3)dz(v_1) + O(|v_1|^2) \right] dy \wedge dz(v_2,v_3)
\end{aligned}
$$

ただし $\theta^a_{1,x}$, $\theta^a_{1,y}$, $\theta^a_{1,z}$ は 0 と 1 の間の数.

3.4. **定理 3.1 の証明.**

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$$

とする. $\mathbf{R}^n$ の点 P をとり P を始点とするベクトル $v_1,...,v_{k+1}$ を考える. E をこれらのベクトルの作る $k+1$ 次元の平行体とする. すなわち

$$E = \{P + t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} : 0 \le t_i \le 1,\ i = 1,...,k+1\}$$

この 平行体 E にパラメータ $(t_1,...,t_{k+1})$ により向きを定める. E の境界は次のような集合の和集合になる.

$$
\begin{aligned}
F_{i,0} &= \{P + t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} : t_i = 0,\ 0 \le t_j \le 1,\ j \ne i\} \\
F_{i,1} &= \{P + t_1v_1 + \cdots + t_{k+1}v_{k+1} : t_i = 1,\ 0 \le t_j \le 1,\ j \ne i\}
\end{aligned}
$$

各 $F_{i,0}$, $F_{i,1}$ にはパラメータ $(t_1,...,\widehat{t_i},....,t_{k+1})$ により向きが入るが, E の境界としての向きとは必ずしも一致しない. それを考慮すると次のような等式がえられる

$$\partial E = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1}(F_{i,1} - F_{i,0})$$

よって

$$\int_{\partial E} \omega = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{F_{i,1}-F_{i,0}} \omega$$

さて次の積分を考えよう.

$$\int_{F_{i,1}-F_{i,0}} a_{j_1,\ldots,j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$$

$F_{i,1}$, $F_{i,0}$ のパラメータ表示を考慮するとこの積分は次のように書ける.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \cdots \int_0^1 [a_{j_1,..,j_k}(P+t_1v_1+\cdots+v_i+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})\\ &\qquad -a_{j_1,..,j_k}(P+t_1v_1+\cdots+\widehat{v_i}+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})]\\ &\qquad\qquad \times (dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1})dt_1\cdots dt_k\end{aligned}$$

ところで被積分関数の最初の部分は次のように変形される.

$$\begin{aligned}&a_{j_1,..,j_k}(P+t_1v_1+\cdots+v_i+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})-a_{j_1,..,j_k}(P+t_1v_1+\cdots+\widehat{v_i}+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})\\ &\qquad =\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P+t_1v_1+\cdots+\widehat{t_iv_i}+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})dx_j(v_i)+O(|v_i|^2)\end{aligned}$$

ここで積分に関する平均値の定理を用いると

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P+t_1v_1+\cdots+\widehat{t_iv_i}+\cdots+t_{k+1}v_{k+1})dx_j(v_i)\\ &\qquad\qquad \times (dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1})dt_1\cdots\widehat{dt_i}\cdots dt_{k+1}\\ &=\frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P+\theta_1v_1+\cdots+\widehat{t_iv_i}+\cdots+\theta_{k+1}v_{k+1})dx_j(v_i)+O(|v_i|^2)\\ &\qquad\qquad \times (dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1})\end{aligned}$$

なる θ_j が存在することがわかるので, $|v_i|\to 0$ のとき

$$=\left(\frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P)dx_j(v_i)+o(|v_i|)\right)(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1}).$$

これらをもちいて先の積分の計算を続行しよう. すると

$$\begin{aligned}&\int_{\partial E} a_{j_1,...,j_k}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\int_{F_{i,1}-F_{i,0}} a_{j_1,...,j_k}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}\\ &=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\int_{F_{i,1}-F_{i,0}}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P+\cdots)dx_j(v_i)+O(|v_i|^2)\right)\\ &\qquad\qquad \times dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1})\end{aligned}$$

ここで $v_1,...,v_{k+1}$ を $\varepsilon v_1,..,\varepsilon v_{k+1}$ におきかえて E を $E(\varepsilon)$ に書き換えると$\varepsilon\to 0$ のとき,

$$\begin{aligned}&\int_{\partial E(\varepsilon)} a_{j_1,...,j_k}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}\\ &=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a_{j_1,...,j_k}}{\partial x_j}(P)dx_j(v_i)+o(|v_i|)\right)(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,\widehat{v_i},...,v_{k+1})\\ &=\varepsilon^{k+1}(da_{j_1,...,j_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(P)(v_1,...,v_{k+1})+o(\varepsilon^{k+1})\\ &=\varepsilon^{k+1}(da_{j_1,...,j_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})(v_1,...,v_{k+1})+o(\varepsilon^{k+1})\end{aligned}$$

ここでは行列式の展開公式を用いている．よって

$$\int_{\partial E(\varepsilon)} \omega = \varepsilon^{k+1} d\omega(v_1, ..., v_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1}), \quad \varepsilon \to 0$$

をえる．

3.5. **外微分についての一般的注意．** 座標を使った計算により確かめる事が出来る定理をまとめておこう．

定理 3.2. $\mathbf{R}^n$ 上の k-形式 ω に対して次が成立する．

$$d(d\omega) = 0.$$

証明．まず 0 形式に対して示す．f を関数 (0 形式) とする．

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\ d(df) &= \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

一般の k 形式は

$$\omega = \sum a_{i_1, i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$$

という形をしているから，各項毎に定理を示せばよく，又座標の番号も重要でないから

$$\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

とおいて $d(d\omega) = 0$ を示せば十分である．

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
d(d\omega) &= \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

定理 3.3. 写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ と $\mathbf{R}^p$ 上の k-形式 ω に対して次が成立する.

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

証明. 写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ を $y_j = f_j(x)$, $j = 1, ..., p$ で与えられているとしよう. まず $\mathbf{R}^p$ 上の 関数 (0 形式) ϕ について示す. $(f^*\phi)(x) = \phi(f(x))$ より

$$d(f^*(\phi)) = d(\phi(f(x))) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i = f^* \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} dy_j\right) = f^*(d\phi).$$

次に一般の $\mathbf{R}^p$ 上の k 形式

$$\omega = \sum a_{j_1,...,j_k} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}$$

をとる.

$$f^*\omega = \sum a_{j_1,...,j_k} df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_k}$$

だから

$$d(f^*\omega) = \sum da_{j_1,...,j_k} df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_k} = f^*(d\omega)$$

□

4. 発散定理

4.1. **Green の定理.** (x, y) 平面 $\mathbf{R}^2$上の 1 形式 $\omega = adx + bdy$ と向き付けられた有界領域 D を考える.

定理 4.1 (Green の定理)**.**

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \qquad \text{言い替えると} \qquad \int_{\partial D} adx + by = \iint_D \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

証明. D を $\mathbf{R}^2$ 内の正方形 E からの写像 $f: E \to \mathbf{R}^2$ の像としてかけるものと仮定して定理を示せば十分である.

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial E} f^*\omega, \quad \int_D d\omega = \int_E d(f^*\omega)$$

なる等式から D のかわりに, 正方形 E について定理を証明すれば十分である. さて E を E に相似な N^2個の正方形 E_i に分割しておく. 正方形 E の 2 辺のなすベクトルを u, v とする. u/N, v/N は E_i の辺のなすベクトルであることに注意する.

$$E_i = \{P_i + t_1 u/N + t_2 v/N : 0 \le t_1, t_2 \le 1\}$$

となるように点 P_i をとる. 外微分 $d\omega$ の幾何学的定義より

$$\int_{\partial E_i} \omega = \left(\frac{1}{N}\right)^2 d\omega_{P_i}(u, v) + o(1/N^2) = d\omega_{P_i}(u/N, v/N) + o(1/N^2), \quad N \to \infty$$

なので

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} \omega &= \sum_{i=1}^{N^2} \int_{\partial E_i} \omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N^2} \int_{\partial E_i} \omega \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N^2} \left[d\omega_{P_i}\left(\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right) + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right] \\ &= \int_E d\omega\end{aligned}$$

よって定理は証明された. □

4.2. **Gauss の定理.** (x, y, z) 空間 $\mathbf{R}^3$上の 2 形式 $\omega = a dx \wedge dy + b dz \wedge dx + c dy \wedge dz$ と向き付けられた有界領域 D を考える.

定理 4.2 (Gauss の定理)**.**

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega, \quad \text{いいかえると}$$

$$\iint_{\partial D} a dx dy + b dz dx + c dy dz = \iiint_D \left(\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x}\right) dx dy dz$$

証明. D を $\mathbf{R}^3$ 内の立方体 E からの写像 $f: E \to \mathbf{R}^3$ の像としてかけるものと仮定してよい.

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial E} f^*\omega, \quad \int_D d\omega = \int_E d(f^*\omega)$$

なる等式から D のかわりに, 立方体 E について定理を証明すれば十分である. さて E を E に相似な N^3 個の立方体 E_i に分割しておく. 立方体 E の 3 辺のなすベクト

ルを u, v, w とする．u/N, v/N, w/N は E_i の辺のなすベクトルであることに注意する．

$$E_i = \{P_i + t_1 u/N + t_2 v/N + t_3 w/N : 0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1\}$$

となるように点 P_i をとる．外微分 $d\omega$ の幾何学的定義より

$$\int_{\partial E_i} \omega = \left(\frac{1}{N}\right)^3 d\omega_{P_i}(u, v, w) + o(1/N^3) = d\omega_{P_i}(u/N, v/N, w/N) + o(1/N^3), \quad N \to \infty$$

なので

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} \omega = \sum_{i=1}^{N^3} \int_{\partial E_i} \omega &= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N^3} \int_{\partial E_i} \omega \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N^3} \left[d\omega_{P_i}\left(\frac{u}{N}, \frac{v}{N}, \frac{w}{N}\right) + o\left(\frac{1}{N^3}\right)\right] \\
&= \int_E d\omega
\end{aligned}$$

よって定理は証明された． □

4.3. **Stokes の定理．** $\mathbf{R}^n$ 上の k 形式 ω と $k+1$ 次元立方体 E からの C^2 写像の像としてあらわされる $k+1$ 次元集合 D について

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

問 16. 前節の証明に習って *Stokes* の定理を証明せよ．