幾何学 D(2011 年度後期)

ホモトピー論入門

目次

はじめに

基本群やホモトピーに関する成書は既に幾つもあるが 500 ページを超える大部のものが殆どである．出来るだけ少ないページ数で，初学者が容易に取り付ける基本群やホモトピーの解説が欲しいと思ったのが本稿を準備した動機である．

1 準備

1.1 基礎事項

区間 $[0,1]$ を記号 I で表す．

位相空間 X, Y が同相であるとき $X \simeq Y$ で表す．

X, Y の共通部分がないとして作った和集合を**非交和** (disjoint union) といい $X \sqcup Y$ で表す．

位相空間 X に**基点** (base point) と呼ばれる点 x_0 を 1 つ選んで固定する．基点は任意に選んで良いが，議論している間は固定しておく．基点を表すのに $*_X$(または単に $*$) という記号を使うこともある．

定義 1.1.

1. 写像 $f : X \to Y$ の像が 1 点のとき，即ち $f(X) = \{y_0\}$ となる y_0 が存在するとき，**定値写像** (constant map) という．
2. 位相空間 X の恒等写像 $X \to X, x \mapsto x,$ を 1_X で表す．
3. 2 つの位相空間 X, Y に対し $x_0 \in X, y_0 \in Y$ をとり x_0 と y_0 を同一視して得られる空間を X と Y の **1 点和**といい $X \vee Y$ で表す．

$$X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$$

1 点和をとるとき X の基点と Y の基点を同一視して，その同一視した点を，1 点和の基点とすると便利なことが多い．特に断らない場合は，同一視した点を 1 点和の基点に取る．

1 点和については次が成り立つ．

- $X \subset X \sqcup Y \to X \vee Y$ は写像 $X \to X \vee Y$ を定める．
- $Y \subset X \sqcup Y \to X \vee Y$ は写像 $Y \to X \vee Y$ を定める．
- 恒等写像 $1_X : X \to X$ と定値写像 $* : Y \to \{y_0\}$ は写像 $1_X \vee * : X \vee Y \to X$ を定める．
- 定値写像 $* : X \to \{x_0\}$ と恒等写像 $1_Y : Y \to Y$ は写像 $* \vee 1_Y : X \vee Y \to Y$ を

定める．

例 1.2. $S^n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ を単位球面とする．立体射影

$$S^n \setminus (1, 0, \ldots, 0) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \ldots, x_n)$$

は，$y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \frac{2}{\|y\|^2+1}(\|y\|^2 - 1, y)$ が逆写像なので，微分同相である．この微分同相で $S^n \setminus (1, 0, \ldots, 0)$ と $\mathbb{R}^n$ を同一視 S^n を $\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化とみる．付け加えた点 $(1, 0, \ldots, 0)$ を $\mathbb{R}^n$ の無限遠点といい ∞ で表す．

連続写像 $\alpha : I \to X$ を X の**パス（道）**(path)，$\alpha(0)$ をパス α の始点，$\alpha(1)$ をパス α の終点という．$\alpha(0) = \alpha(1)$ となるパスを**ループ（閉道）**(loop) という．

定義 1.3 (コンパクト開位相)**.** 位相空間 X から位相空間 Y への連続写像全体を写像空間といい $\mathrm{Map}(X, Y)$ または Y^X で表す．$\mathrm{Map}(X, Y)$ に**コンパクト開位相** (compact-open topology) と呼ばれる位相を入れる．これは X のコンパクト集合 K と Y の開集合 U に対し，

$$M(K, U) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

と置き，これらを部分開基底とする $\mathrm{Map}(X, Y)$ の位相である．

定義 1.4. 連続写像 $f : X \to Y$ に対し，その**写像柱** (mapping cylinder) M_f，**写像錐** (mapping cone) C_f を次で定める．

$$M_f = \frac{(X \times I) \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}$$

$$C_f = \frac{CX \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)} \qquad CX = \frac{X \times I}{X \times \{1\}}$$

例 1.5. $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみる．$f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$, の写像錐は実射影平面である．

1.2 ホモトピーの定義

位相空間 X から位相空間 Y への写像の**ホモトピー** (homotopy) とは，連続写像 $F : X \times I \to Y$ のことである．但し $I = [0, 1]$ である．写像 f_0, $f_1 : X \to Y$ に対し $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 0)$ $(x \in X)$ となるホモトピー F が存在するとき，f_0 と f_1 は**ホモトピック** (homotopic) であるという．

f と g がホモトピックであるという関係は，X から Y へのすべての連続写像全体の同値関係であり，$f \simeq g$ と書く．その同値類を写像の**ホモトピー類** (homotopy class) という．写像 f のホモトピー類を $[f]$ で表す．X から Y への連続写像のホモトピー同値類の集合を $[X, Y]$ で表す．

例 1.6. $F:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}^n$, $(x,t)\mapsto tx$, はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の恒等写像と定値写像を結ぶホモトピーである．

定義 1.7 (対のホモトピー)**.** 連続写像 $f_0,f_1:(X,A)\to(Y,B)$ が**ホモトピック**とは，$F(a,t)\in B$ $(a\in A)$ となるホモトピー F が存在するときをいう．$A\subset X$, $B\subset Y$ のとき，連続写像 $f:X\to Y$ で $f(A)\subset B$ を満たすもののホモトピー類を $[(X,A),(Y,B)]$ で表す．

A, B が 1 点からなる集合の時，すなわち $A=\{x_0\}$, $B=\{y_0\}$ のとき $[(X,\{x_0\}),(Y,\{y_0\})]$ を，**基点付きホモトピー類**の集合といい $[X,Y]_*$ で表す．

命題 1.8. 連続写像 $f,g:X\to Y$, $h:X'\to X$, $k:Y\to Y'$ に対し

$$f\simeq g\quad\Rightarrow\quad f\circ h\simeq g\circ h,\ k\circ f\simeq k\circ g$$

すなわち次の自然な写像が定まる．

$$h^*:[X,Y]\to[X',Y],\quad k_*:[X,Y]\to[X,Y']$$

また $h,h':X'\to X$ がホモトピックならば $h^*=h'^*$, $k,k':Y\to Y'$ がホモトピックならば $k_**=k'_*$ である．

証明. $F:X\times I\to Y$ を f と g をつなぐホモトピーとする．すなわち $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$ とする．

$$X'\times I\to Y,\ (x',t)\mapsto F(h(x'),t),\qquad X\times I\to Y',\ (x,y)\mapsto k\circ F(x,t)$$

が望むホモトピーを定める．
$H:X'\times I\to X$ を h と h' をつなぐホモトピーとすると

$$X'\times I\to Y,\quad (x',t)\mapsto f(H(x',t))$$

は $f\circ h$ と $f\circ h'$ をつなぐホモトピーであり

$$h^*([f])=[f\circ h]=[f\circ h']=h'^*([f]).$$

$K:Y\times I\to Y'$ を k と k' をつなぐホモトピーとすると

$$X\times I\to Y',\quad (x,t)\mapsto K(f(x),t)$$

は $k\circ f$ と $k'\circ f$ をつなぐホモトピーであり

$$k_*([f])=[k\circ f]=[k'\circ f]=k'_*([f]).$$

□

例 1.9. 1. $[X,*]$ は 1 点からなる集合である．

2. $[*,X]$ は X の弧状連結成分の濃度を持つ集合である．

1.3 ホモトピー同値

定義 1.10 (空間のホモトピー型)**.** 連続写像 $f : X_1 \to X_2$ が**ホモトピー同値** (homotopy equivalence) とは，ある連続写像 $g : X_2 \to X_1$ が存在して，$f \circ g \simeq 1_{X_1}$, $g \circ f \simeq 1_{X_2}$ となるときをいう．このとき g を f の**ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) という．またこのとき $X_1 \sim X_2$ と書き，X_1 と X_2 は**同じホモトピー型を持つ** (same homotopy type) という．

例 1.11. 自然な埋込 $\iota : S^1 \to S^1 \times I$, $\theta \mapsto (\theta, 0)$, と自然な射影 $p : S^1 \times I \to S^1$ を考える．$p \circ \iota = 1_{S^1}$ で

$$F : (S^1 \times I) \times I \to S^1 \times I, \quad (\theta, s, t) \mapsto (\theta, st)$$

は $\iota \circ p$ と $1_{S^1 \times I}$ を結ぶホモトピーなので，$S^1 \times I \sim S^1$ である．

例 1.12. 自然な埋込 $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とレトラクション $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $x \mapsto x/\|x\|$, を考える．$r \circ \iota = 1_{S^{n-1}}$ で

$$F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x, t) \mapsto tx - (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

は，$\iota \circ r$ と $1_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ をつなぐホモトピーである．よって $S^{n-1} \sim \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

命題 1.13. $X_1 \sim X_2$ とする．

- 任意の位相空間 Y に対し $[X_1, Y] \to [X_2, Y]$ は全単射.
- 任意の位相空間 Z に対し $[Z, X_1] \to [Z, X_2]$ は全単射.

証明. $f^* : [X_2, Y] \to [X_1, Y]$, $g^* : [X_2, Y] \to [X_1, Y]$ で $[f \circ g] = [1_{X_1}]$ かつ $[g \circ f] = [1_{X_2}]$ なので

$$f^* \circ g^* = (f \circ g)^* = (1_{X_1})^* = 1_{[X_1, Y]}, \quad g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = (1_{X_2})^* = 1_{[X_2, Y]}$$

となり，f^*, g^* はそれぞれ全単射である．2 番目の主張も同様に証明できる． □

定義 1.14 (写像のホモトピー同値)**.**

2 つの写像 $f_1 : X_1 \to Y_1$ と $f_2 : X_2 \to Y_2$ が**ホモトピー同値**とはホモトピー同値 $\varphi : X_1 \to X_2$ と $\phi : Y_1 \to Y_2$ が存在して $\phi \circ f = g \circ \varphi$ となる時を言う．

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_2 \arrow[d, "\phi"] \\ Y_1 \arrow[r, "g"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

例 1.15. $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ とおく．

$$B_r \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2/r^2}}, \qquad \mathbf{R}^n \to B_r, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2/r^2}}$$

は互いに逆写像なので B_r と $\mathbb{R}^n$ は微分同相であり，同じホモトピー型を持つ．

$$f:\{0\}\to B_r,\ 0\mapsto 0,\qquad g:B_r\to\{0\},\quad x\mapsto 0$$

とすると，$g\circ f$ は集合 $\{0\}$ の恒等写像，$f\circ g(x)=0$ なので $f\circ g$ と B_r を結ぶホモトピーは

$$F:B_r\times I\to B_r,\ (x,t)\mapsto tx$$

で与えられる．よって，開球 B_r と 1 点 $\{0\}$ はホモトピー同値．同様に $\mathbb{R}^n$ と 1 点 $\{0\}$ もホモトピー同値．閉球 $\overline{B}_r=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \|x\|\leq r\}$ が 1 点 $\{0\}$ とホモトピー同値であることも同様に証明できる．

定義 1.16 (可縮空間)**.** 1 点にホモトピー同値な空間を**可縮** (contarctible) な空間，又はその空間は**可縮**であるという．

命題 1.17. 位相空間 X が可縮であることと，恒等写像 $1_X:X\to X$ が一点写像 $r:X\to X,\ x\mapsto *,$ とホモトピー同値である事は同値である．

証明．演習問題 □

例 1.18. $S^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ とする．ホモトピー

$$F:S^n\times[0,1]\to S^n,\qquad F(x,t)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2t^2}} & \|x\|<1/t\\ \infty & \|x\|\geq 1/t\end{cases}$$

は $F(x,0)=x$ (S^n の恒等写像) と $F(x,1)$ (単位開球を $\mathbb{R}^n$ に写し，単位開球以外を無限遠点に写す写像) を結んでいる．

例 1.19. 位相空間 X の錐 (cone) $CX=\frac{X\times I}{X\times\{0\}}$ は可縮である．ホモトピー

$$F:CX\times I\to CX,\qquad [(x,t,s)]\mapsto[(x,st)]$$

は $F(x,t,0)=*$, $F(x,t,1)=(x,t)$ なので，CX の恒等写像は定値写像にホモトープとなるからである．

定義 1.20 (レトラクト)**.** 連続写像 $r:X\to A$ が**レトラクション** (retract, retraction) [*1] とは，$r\circ\iota=1_A$ となるときをいう．但し $\iota:A\to X$ は包含写像．

$A\subset X$ が X の**変形レトラクト** (deformetaion retract) とは，次を満たすホモトピー $F:X\times I\to X$ が存在する時を言う．

$$F(x,0)=x\ (x\in X),\quad F(x,1)\in A\ (x\in X),\quad F(a,1)=a\ (a\in A)$$

[*1] 縮退と訳しても良い．

X と A はホモトピー同値になる．

$r(x) = F(x,1)$ とおくと，$r : X \to A$ はレトラクションなので，変形レトラクトは，レトラクション r と恒等写像 1_X の間のホモトピーを与える．

$A \subset X$ が X の**強変形レトラクト** (strong deformation retract) とは，次を満たすホモトピー $F : X \times I \to X$ が存在する時を言う．

$$F(x,0) = x \ (x \in X), \quad F(x,1) \in A \ (x \in X), \quad F(a,t) = a \ (a \in A,\ t \in I)$$

例 1.21. 写像 $f : X \to Y$ に対し，写像柱 M_f からの自然な写像 $r : M_f \to Y$ は強変形レトラクトである．実際 $M_f = (X \times I \sqcup Y)/(x,0) \sim f(x)$ なので

$$F : M_f \times I \to M_f, \qquad (x,s,t) \mapsto (x, s(1-t)),\ (y,t) \mapsto y$$

は，強変形レトラクトを与えるホモトピーになる．

ホモトピー $F : X \times I \to Y$ が A **を法としたホモトピー**とは，連続写像 $F(a,t)$ が t に依存しない時を言う．

2　基本群

2.1　基本群の定義

位相空間 X の基本群は次のように定義される．連続写像 $\gamma : I \to X$ で $\gamma(0) = \gamma(1) = *$ を満たすもの全体（即ち基点付きループ空間 ΩX）に，ホモトピー

$$G : I \times I \to X, \quad G(x,0) = \gamma_0(x),\ G(x,1) = \gamma_1(x)$$

が存在するとき，$\gamma_0 \simeq \gamma_1$ と定める．道 γ の同値類を $[\gamma]$ で表し，この同値類全体の集合を**基本群**といい $\pi_1(X,*)$ で表す．基本群には次で積が定まる．γ_1, γ_2 の積 ψ を次で定める．

$$\psi(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ \gamma_2(2t-1) & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases}$$

ψ のホモトピー類は γ_1, γ_2 のホモトピー類のみで定まる．定値写像 $t \mapsto *$ はこの積についての単位元を定め，$t \mapsto \gamma(t)$ に対し，$t \mapsto \gamma(1-t)$ は $[\gamma]$ の逆元を定める．

演習 2.1. この事を証明せよ．

注意 2.2. $[\gamma_1], [\gamma_2]$ に対し，その積を $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2]$ と書くか $[\gamma_2] \cdot [\gamma_1]$ と書くかは，流儀によって異なる．基本群 $\pi_1(X,*)$ の位相空間への作用を考える状況では $[\gamma_2] \cdot [\gamma_1]$ と書くほうが都合が良いことが多い．

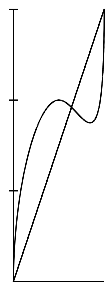
基点付き位相空間 X に対しその 1 次元ホモトピー群 $\pi_1(X,*)$ を X の**基本群** (fundamental group) という．

定理 2.3. $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$.

証明. $\tilde{\gamma}(0)=0$ なる連続関数 $\tilde{\gamma}:I\to\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を経由して道 $\gamma:I\to S^1$ を表すとする．$\tilde{\gamma}(1)=k$ とすると，ホモトピー

$$G:I\times I\to\mathbb{R},\ (t,s)\mapsto(1-s)\tilde{\gamma}(t)+kst$$

は γ から k 回転する道へのホモトピーを定める．$[\gamma]\to k$ が求める同型を定める． □



弧状連結な空間 X が**単連結** (simply connected) であるとは $\pi_1(X,*)$ が自明な群であるときを言う．

定理 2.4. 弧状連結な空間 X の 2 点 $*_0$, $*_1$ を結ぶ道 α を取る．α は同型 $\alpha_*:\pi_1(X,*_1)\to\pi_1(X,*_2)$, $[\gamma]\mapsto[\alpha\circ\gamma\circ\alpha^{-1}]$ を誘導する．

証明. $\alpha_*:\pi_1(X,*_0)\to\pi_1(X,*_1)$ は $\alpha_*^{-1}:\pi_1(X,*_2)\to\pi_1(X,*_1)$, $[\gamma]\mapsto[\alpha^{-1}\circ\gamma\circ\alpha]$ を逆写像に持つので明らか． □

2.2 被覆空間

定義 2.5 (被覆空間)**.** X, $\widetilde{X}$ を弧状連結な位相空間とする．$\widetilde{X}$ が X の**被覆空間** (covering space) というのは連続写像 $p:\widetilde{X}\to X$ が存在して 各 $x\in X$ に対し x の開近傍 U が存在し $p^{-1}(U)$ は U と離散集合の直積と同相となる時を言う．p を**被覆射影** (covering projection) 又は単に**被覆** (covering) と呼ぶ．離散集合が k 個の元からなるとき $\widetilde{X}$ は X の k 重被覆であるという．

例 2.6.
1. $f:\mathbb{R}\to S^1$, $\theta\mapsto e^{2\pi\theta\sqrt{-1}}$, は被覆である．
2. $f:S^1\to S^1$, $z\mapsto z^k$, は k 対 1 の被覆である．ただし $k\in\mathbb{Z}$.
3. $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ として $p:S^n\to P^n(\mathbb{R})$, $x\mapsto[x]$, は 2 対 1 の被覆である．
4. $P(z)$ を複素係数多項式とし写像 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を考える．これは被覆ではない．P の臨界値集合を $D(P)$ とするとき，$\mathbb{C}\setminus P^{-1}(D(F))\to\mathbb{C}\setminus D(F)$ は被覆である．
5. $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto x$, は被覆でない．

次の定理はホモトピー持ち上げ性質としてしばしば引用される．

定理 2.7 (被覆ホモトピー定理)**.** 被覆 $p:\widetilde{X}\to X$ をとる．任意の位相空間 Z と連続写

像 $f : Z \to \widetilde{X}$ に対し，ホモトピー

$$F : Z \times I \to X,\ F(z, 0) = f(z)$$

があれば，F は $\widetilde{X}$ へのホモトピーに持ち上がる．即ち，ホモトピー

$$\widetilde{F} : Z \times I \to \widetilde{X}$$

が存在して $F = p \circ \widetilde{F}$ となる．また持ち上げ $\widetilde{F}$ は一意である．

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X
\end{tikzcd}$$

証明． $z \in Z$ に対し $F(z, t)$ の近傍 $U(t)$ で $p^{-1}(U(t))$ が $U(t)$ と離散集合の直積になるように取る．$t \mapsto F(z, t)$ の像はコンパクトなので，有限個の $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq 1)$ をとって $U(t_1) \cup \cdots \cup U(t_m)$ が $t \mapsto F(z, t)$ の像を含むようにできる．各点 $\tilde{x} \in p^{-1}(F(z, t_i))$ に対しその近傍で $U(t_i)$ と同相なものが存在するので，$t \mapsto F(z, t)$ は $F(z, 0)$ の持ち上げ $\widetilde{F}(z, 0) \in \widetilde{X}$ を決めてやれば，$\widetilde{X}$ に持ち上がる．この構成は z の小さい近傍に拡張できる．$z \in Z$ は任意であったから証明が終わる．一意性の主張は被覆が局所同型であることから従う． □

系 2.8. 被覆 $p : \widetilde{X} \to X$ に対し次の写像は単射である．

$$p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{*}) \to \pi_1(X, *)$$

p_* の像は X の $*$ を始点と終点にするループでその $\tilde{*}$ を始点とするループの持ち上げの終点が $\tilde{*}$ になるものである．

証明． 任意の閉道 $\tilde{\gamma} : S^1 \to \widetilde{X}$ に対し，$\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ が定値写像にホモトープであれば $\tilde{\gamma}$ も定値写像にホモトープであることを示せばよい．G を γ と定値写像を結ぶホモトピーとすると，その持ち上げ $\widetilde{G}$ が $\tilde{\gamma}$ と定値写像を結ぶホモトピーである． □

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
S^1 \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{G}"] & X
\end{tikzcd}$$

補題 2.9. 被覆 $p : (\widetilde{X}, \tilde{*}) \to (X, *)$ と写像 $f : (Y, *_Y) \to (X, *)$ があり，Y は弧状連結かつ局所弧状連結であるとする．このとき次は同値．

1. $f = p \circ \tilde{f}$ を満たす $\tilde{f} : (Y, *_Y) \to (\widetilde{X}, \tilde{*})$ が存在する．
2. $f_*(\pi_1(Y, *_Y)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{*}))$.

証明． $1 \Longrightarrow 2)$ $f = p \circ \tilde{f}$ より $f_*(\pi_1(Y, *_Y)) = p_*(\tilde{f})_*(\pi_1(Y, *_Y)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{*}))$.
$2 \Longrightarrow 1)$ $y \in Y$ に対し, 基点 $*_Y$ と y を結ぶ道 $\gamma : I \to Y$ をとる．すると道 $f \circ \gamma : I \to X$ はただ一つの持ち上げ $\widetilde{f \circ \gamma} : I \to \widetilde{X}$ を持つ．このとき $\tilde{f}$ を次で定める．

$$\tilde{f} : Y \to \widetilde{X},\ y \mapsto \widetilde{f \circ \gamma}(1)$$

これで矛盾なく $\tilde{f}$ が定義されていることを示そう．γ' を基点 $*_Y$ と y を結ぶ別の道とする．$h_0 = (f \circ \gamma')^{-1}(f \circ \gamma)$ は X の閉道で $f_*(\pi_1(Y, *_Y))$ の元を表す．h_0 のホモトピー類

は $p_*(\pi_1(Y,*_Y))$ の元であり，仮定より，h_0 とホモトピックな閉道 h_1 は $\widetilde{X}$ に持ち上がる．被覆ホモトピー性質より h_0 と h_1 を結ぶホモトピー h_t も $\widetilde{X}$ に持ち上がる．$\tilde{h}_1$ は閉道なので $\tilde{h}_t$ も閉道であり，$\tilde{h}_0$ は閉道である事がわかる．構成から $\tilde{h}_1$ は $\tilde{f}\circ\gamma$ と $(\tilde{f}\circ\gamma')^{-1}$ との X への持ち上げを繋いだものであり，持ち上げの一意性より，$\widetilde{f\circ\gamma}(1)=\widetilde{f\circ\gamma'}(1)$ がわかる．

$\tilde{f}$ が連続であることを示そう．U を $f(y)$ の小開近傍とし $\widetilde{U}$ をその $\widetilde{X}$ の持ち上げとする．$y\in Y$ の弧状連結開近傍 V を $f(V)\subset U$ なるようにとる．$y'\in V$ に対し，$*_Y$ から y を経由して y' に至る道を考えれば $V\xrightarrow{f}U\xrightarrow{p^{-1}}\widetilde{U}$ の合成は $\tilde{f}$ であることがわかり，$\tilde{f}(V)\subset\widetilde{U}$ がわかる．$\square$

補題 2.10. 被覆 $p:(\widetilde{X},\tilde{*})\to(X,*)$ と写像 $f:(Y,*_Y)\to(X,*)$ があり，Y は連結であるとする．f の 2 つの持ち上げ $\tilde{f}_i:Y\to\widetilde{X}_i$, $i=1,2$, が Y の 1 点で一致すれば，$\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$.

証明. $y\in Y$ を任意にとり，$f(y)$ の小近傍 U をとる．$p^{-1}(U)$ を U に同型な U_α 達の非交和とする．$\tilde{f}_i(y)\in\widetilde{U}_i$, $i=1,2$, とする．y の小近傍 V をうまく取ると $\tilde{f}_i$ によって $\widetilde{U}_i$ 内の $\tilde{f}(y_i)$ の小近傍 V_i に写るようにできるので $\tilde{f}_1(y)\neq\tilde{f}_2(y)$ ならば $\widetilde{U}_1\neq\tilde{U}_2$. U は小近傍なので $\widetilde{U}_1\cap\tilde{U}_2=\emptyset$ とできる．よって V 上 $\tilde{f}_1\neq\tilde{f}_2$.

$\tilde{f}_1(y)=\tilde{f}_2(y)$ ならば $\widetilde{U}_1=\tilde{U}_2$. $p\circ\tilde{f}_1=p\circ\tilde{f}_2$ で $p:\widetilde{U}_1\to U$ は単射なので $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. つまり $\{y\mid\tilde{f}_1(y)=\tilde{f}_2(y)\}$ は開かつ閉な集合である．$\square$

定義 2.11 (ガロア被覆). $p_*(\pi_1(\widetilde{X},*))$ が $\pi_1(X,*)$ の正規部分群であるとき $p:\widetilde{X}\to X$ は**ガロア被覆** (Galois covering)(または**正規被覆**) であるという．

定理 2.12. X が弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とする．$\pi_1(X,*)$ の任意の部分群 G に対し $G=p_*(\pi_1(\widetilde{X},*))$ となる被覆 $p:\widetilde{X}\to X$ が存在する．

証明. X の道の空間 $\Omega=\{\alpha:I\to X\mid\alpha(0)=*\}$ を考える．

$$\alpha\sim\alpha'\Longleftrightarrow\alpha(1)=\alpha'(1),\qquad \alpha'^{-1}\alpha\in G$$

で同値関係を入れ，$\widetilde{X}=\Omega/\sim$ と置く．写像 $p:\widetilde{X}\to X$ を $[\alpha]\mapsto\alpha(1)$, で定める．p が連続であるような $\widetilde{X}$ の最弱の位相を入れれば，これが求めるものである．$\square$

$\pi_1(X,*)$ の自明な部分群 $\{e\}$ に対応する被覆 $p:\widetilde{X}\to X$ を**普遍被覆** (universal cover) という．上の定理は普遍被覆の存在を保証している．

定理 2.13. X を弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とし，基点 $*\in X$ を任意に選んで固定する．X の 2 つの基点付き被覆 $p_1:(\widetilde{X}_1,*_1)\to(X,*)$, $p_2:(\widetilde{X}_2,*)\to(X,*)$ に

ついて次は同値である．

1. $p_1 = p_2 \circ \phi$ を満たす同型 $\phi : (\widetilde{X}_1, *_1) \to (\widetilde{X}_2, *_2)$ が存在する．
2. $(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, *)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, *))$

証明．1$\Longrightarrow$2) 同型 $\phi : (\widetilde{X}_1, *_1) \to (\widetilde{X}_2, *_2)$ が存在すれば，$f_* : \pi_1(\widetilde{X}_1, *_1) \to \pi_1(\widetilde{X}_2, *_2)$ は同型なので

$$(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, *_1)) = (p_2 \circ f)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, *_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, *_2))$$

2$\Longrightarrow$1) 定理 2.9 より，$p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$ を満たす $\tilde{p}_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ が存在する．同様に $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$ を満たす $\tilde{p}_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ が存在する．持ち上げの一意性 (補題 2.10) より，$\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ および $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$ は恒等写像であり，定理の証明が終わる．

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\
\widetilde{X}_1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"] & X
\end{tikzcd}$$

□

被覆 $p : \widetilde{X} \to X$ に対し $F = p^{-1}(*)$ と置くとファイブレーションのホモトピー完全系列 (後述　定理 4.10) より次の完全系列を得る．

$$\begin{array}{cccccccccc}
\to & 0 & \to & \pi_i(\widetilde{X}) & \to & \pi_i(X) & & & & \\
\to & 0 & \to & \cdots & & & & & & \\
\to & 0 & \to & \pi_2(\widetilde{X}) & \to & \pi_2(X) & & & & \\
\to & 0 & \to & \pi_1(\widetilde{X}) & \to & \pi_1(X) & \to & \pi_0(F) & \to & 0
\end{array}$$

2.3　ファン=カンペンの定理

群 G の正規部分群 A を取る．$g \in G$ の G/A への像を $[g]$ で表す．$g \in G$, $a \in A$ とすると $ag = ga'$ となる $a' \in A$ が存在するから，次が成り立つ．

$$[ag] = [ga'] = [g]$$

より一般に，$g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, $a_0 \in A$ とすると $a_{i-1} g_i = g_i a_i$ となる $a_i \in A$ が存在するから次が成り立つ．

$$[a_0 g_1 g_2 \cdots g_n] = [g_1 a_1 g_2 \cdots g_n] = \cdots = [g_1 g_2 \cdot g_n a_n] = [g_1 g_2 \cdot g_n]$$

群 G とその部分集合 H に対し H を含む最小の正規部分群 $\langle H \rangle$ は次で表される．

$$\langle H \rangle = \{(g_1^{-1} h_1 g_1)(g_2^{-1} h_2 g_2) \cdots (g_s^{-1} h_s g_s) : h_i \in H,\ g_i \in G\ (i = 1, \ldots, s)\}$$

群 G_1, G_2 の**自由積**とは次で定まる群 $G_1 * G_2$ の事である．

$$G_1 * G_2 = \{g_1 \cdots g_k : g_i \in G_1 \text{または}\ g_i \in G_2\}$$

これには自然に群の構造が定義される．

群 G_1, G_2 の自由積は次の普遍写像性質を満たす群 G として特徴付けられる．

群準同型 $\alpha_i : G_i \to G$ $(i = 1, 2)$ が存在する群 G で，任意の群準同型 $\beta_i : G_i \to H$ $(i = 1, 2)$ に対し，$\beta_i = \gamma \circ \alpha_i$, $i = 1, 2$, を満たす群準同型 $\gamma : G \to H$ が唯一つ存在する．

$H = G_1$ $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = *$ とすれば，α_1 は単射であることがわかる．同様に α_2 も単射である．

$$\begin{tikzcd}
& G_1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[ddr, "\beta_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[drr, "\beta_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\
& & H
\end{tikzcd}$$

群 A, G_1, G_2 と群準同型 $\phi_1 : A \to G_1$, $\phi_2 : A \to G_2$ があるとき，$G_1 *_A G_2$ を次で定める．

$$G = G_1 *_A G_2 = (G_1 * G_2)/\langle A \rangle.$$

これにも自然に群の構造が定義される．$G_1 * G_2$ の元 x の G への像を $[x]$ で表す．明らかに $[xx'] = [x][x']$ である．また $a \in A$ のとき $[\phi_1(a)] = [\phi_2(a)]$ なので，少し乱暴だがこの元を $[a]$ と略記することもある．$x \in G_1$．$x' \in G_2$ のとき $[x\phi_1(a)][\phi_2(a)^{-1}x'] = [x\phi_1(a)\phi_2(a)^{-1}x'] = [xx']$ に注意しておく．

補題 2.14. $C = \{a_\lambda, b_\mu\}$ を次を満たすように取る．

- $a_\lambda \in G_1$, $b_\mu \in G_2$, $a_\lambda \neq e$, $b_\mu \neq e$
- $G_1 \to G_1/A$ の部分集合 $\{e, a_\lambda\}$ への制限が全単射
- $G_2 \to G_2/A$ の部分集合 $\{e, b_\mu\}$ への制限が全単射

G の元 g が

$$g = [c_1 c_2 \cdots c_k a] = [c'_1 c'_2 \cdots c'_{k'} a'] \qquad c_i, c'_i \in C,\ a, a' \in A$$

を満たし，引き続くどの c_i, c_{i+1} やどの c'_i, c'_{i+1} もある G_j に属すことはないとする．ϕ_1, ϕ_2 が単射であれば，

$$k = k', \qquad c_i = c'_i\ (i = 1, \ldots, k), \qquad a = a'$$

証明. $k' \leq k$ として証明する．まず $k = 0$ の時を考えよう．$a, a' \in A$ に対し $[a] = [a']$ ならば $a = a'$ を示せばよいが，これは ϕ_i の単射性より明らか．

次に $g \notin A$ とする．$k \geq k' \geq 1$ であり，

$$[g] = [c_1 c_2 \cdots c_k a] = [c'_1 c'_2 \cdots c'_{k'} a'] \qquad c_i, c'_i \in C,$$

で c_1, c'_1 はある G_i に属さなければならない．$c_1, c'_1 \in G_1$ としよう．$b, b' \in A$ に対し，

$$[c_1 \phi_1(b) \phi_2(b)^{-1} c_2 \cdots c_k a] = [c'_1 \phi_1(b') \phi_2(b')^{-1} c'_2 \cdots c'_{k'} a']$$

なので，$c_1 \equiv c'_1 \bmod A$ である．よって $c_1 = c'_1$ となり，帰納法で証明が終わる． □

$i=1,2$ として G_i' を G_i の $G=G_1 *_A G_2$ への像，A' を A の G への像とする．すると

$$G=G_1 *_A G_2 = G_1' *_{A'} G_2'$$

であるから，$\phi_i : A \to G_i$ が単射という仮定は必ずしも強いものではない．

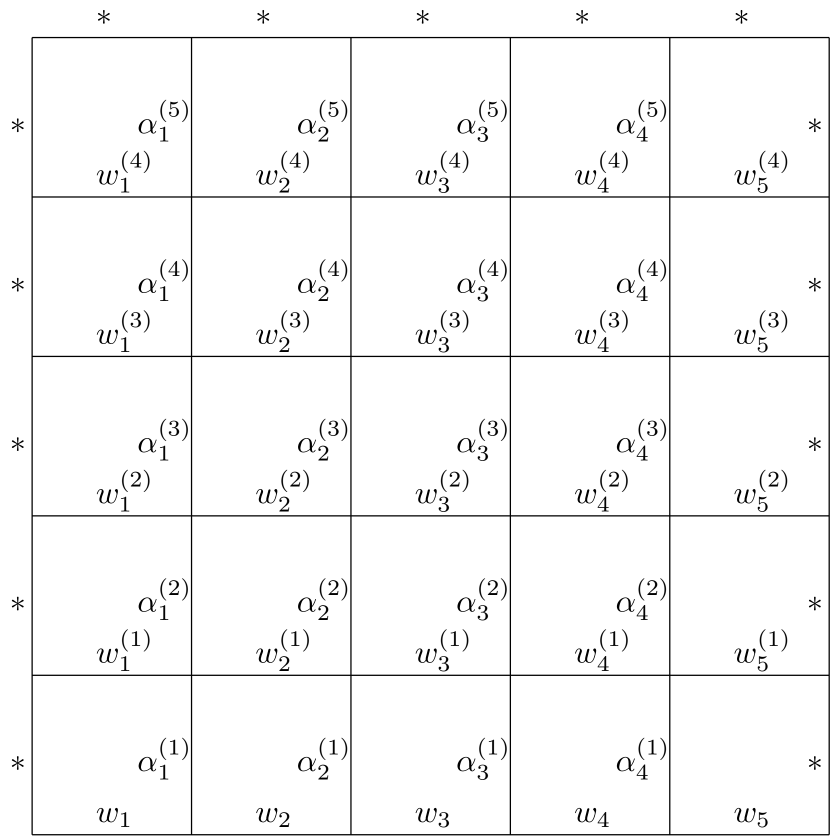
定理 2.15 (van Kampen). *U, V, $U\cap V$ が空でない X の弧状連結開集合で $X=U\cup V$ であるとする．基点 $*$ を $U\cap V$ にとる．*

$$\pi_1(X)=\pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V)$$

証明. $U\subset X$, $V\subset X$ が定める写像 $\pi_1(U)\to\pi_1(X)$, $\pi_1(V)\to\pi_1(X)$ の像を G_1, G_2 とし $\pi_1(U\cap V)$ の像を A とおく．自然な準同型 $\theta : G_1 *_A G_2 \to \pi_1(X)$ を考える．
θ が全単射であることを示せばよい．
θ の全射性: $f:[S^1,*]\to[X,*]$ に対し $f^{-1}(U)$ の連結成分を U_α, $f^{-1}(V)$ の連結成分を V_β とすると，

$$S^1=(\bigcup_\alpha U_\alpha)\cup(\bigcup_\beta U_\beta)$$

で S^1 はコンパクトなので，S^1 はこれらのうちの有限個で覆えている．よって，分解 $S^1=I_1\cup\cdots\cup I_k$, I_i は閉区間，があって $f(I_i)\subset U$ または $f(I_i)\subset V$ のいずれかが成立し，I_i の端点の像は $U\cap V$ の元であるようにできる．このことは，θ が全射であることを示している．
θ の単射性:　元 $w=w_1\cdots w_k\in G_1 *_A G_2$ を取り，$\theta(w)$ が単位元と仮定する．するとホモトピー $F:I\times I\to X$ で $F(0,t)=F(1,t)=*$, $F(s,1)=*$, $F(s,0)=w$ の表す弧，となるものが存在する．　適当に $I\times I$ を小正方形に細分して縦に連なる各小正方形の像が一斉に U または V に入っていると仮定してよい．



$$w_i = w_i^{(0)}, \quad \alpha_0^{(i)} = \alpha_n^{(i)} = w_j^{(n)} = *$$

と置いて，$\alpha_j^{(i)}$ で縦の小区間の表す U または V の道を表すと，U または V の基本群の元として次の関係式が成りたつ．

$$w_i^{(j-1)} = (\alpha_{i-1}^{(j)})^{-1} w_i^{(j)} \alpha_i^{(j)}$$

$\alpha_i = \alpha_i^{(k)} \cdots \alpha_i^{(2)} \alpha_i^{(1)}$ と置くと，U または V の基本群の元として

$$w_i = (\alpha_{i-1})^{-1} \alpha_i$$

となる．$\alpha_0 = *$, $\alpha_n = *$ より $\alpha_1 = w_1$, $\alpha_2 = w_2 w_1$, $\ldots$, $* = w_n \cdots w_1$ がわかる．よって前補題より証明が終わる． □

例 2.16. X と Y の一点和 $X \vee Y$ を考える．$*$ の開近傍 N に対し $U = X \cup N$, $V = Y \cup N$ とおいて，van Kampen の定理を適用して次を得る．

$$\pi_1(X \vee Y, *) = \pi_1(X, *) * \pi_1(Y, *)$$

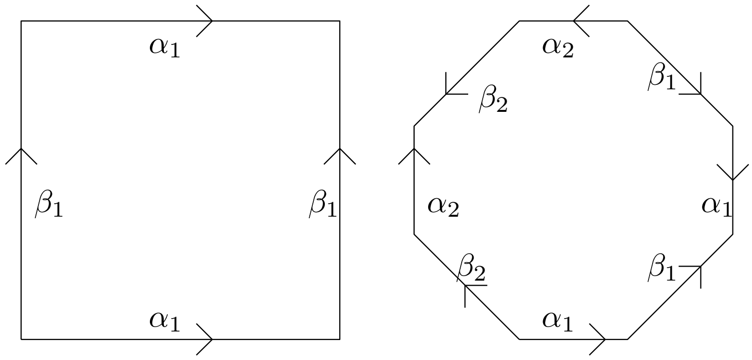
特に g 個の S^1 の 1 点和 $\bigvee^g S^1$ の基本群は g 個の元が生成する自由群 F_g である．

例 2.17. 弧状連結な位相空間 X_1, X_2 に対し，次は同型である．

$$\pi_1(X_1) \times \pi_1(X_2) \to \pi_1(X_1 \times X_2), \qquad [\gamma_1] \times [\gamma_2] \mapsto [(\gamma_1, \gamma_2)]$$

例 **2.18.** トーラスの基本群は $\mathbb{Z}^2$ である．トーラス T を正方形の各辺を図に従って同一視したものと見る．正方形の境界の開近傍を U とすると これは $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値．正方形の内点を V とすると V は可縮．$U \cup V$ は S^1 とホモトピー同値でその基本群は $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (を少し縮めたもの) で生成されるので

$$\pi_1(T) = \{\alpha_1, \beta_1 : \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} = e\} = \mathbb{Z}^2$$



例 **2.19.** g 個穴の開いたトーラス S_g の基本群も同様に計算できる．図に $g = 2$ の場合を示す．

$$\pi_1(S_g) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g : \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = e\}$$

例 **2.20.** 実射影空間 $P^2(\mathbb{R})$ の基本群は次で与えられる．

$$\pi_1(P^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

例 **2.21.** 実射影空間 $P^2(\mathbb{R})$ の g 個の連結和 N_g の基本群は次で与えられる．

$$\pi_1(N_g) = \langle a_1, \ldots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 = e \rangle$$

例 **2.22** (トーラス結び目)**.** トーラスの標準的埋込 $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ を考える．S^3 を $\mathbb{R}^3$ の 1 点コンパクト化とすると，$S^3 \setminus S^1 \times S^1$ は 2 つの互いに素な中身の詰まったトーラス $B^2 \times S^1$, $S \times B^2$ の和集合である．p, q を互いに素な自然数とし，写像 $f : S^1 \to S^1 \times S^1$, $z \mapsto (z^p, z^q)$, の $\mathbb{R}^3$ への像を $K_{p,q}$ とする．van Kampen の定理より，次は同型であることがわかる．

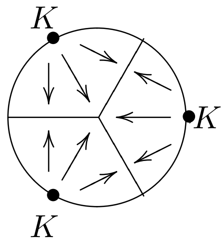
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_{p,q}) \to \pi_1(S^3 \setminus K_{p,q})$$

まず次に注意する．

$$\begin{aligned} K_{p,q} \cap (\overline{B^2} \times \{\theta_2\}) =& \{(e^{(p/q)(\theta_2 + 2k\pi)\sqrt{-1}}, e^{\theta_2\sqrt{-1}}) : k = 0, 1, \ldots, q-1\} \\ K_{p,q} \cap (\{\theta_1\} \times \overline{B^2}) =& \{(e^{\theta_1\sqrt{-1}}, e^{(q/p)(\theta_1 + 2k\pi)\sqrt{-1}}) : k = 0, 1, \ldots, p-1\} \end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
X_p =& \{(e^{\theta_1\sqrt{-1}}, re^{(q/p)(\theta_1+(2k+1)\pi)\sqrt{-1}}) : k=0,1,\dots,p-1, 0 \le r \le 1\} \\
X_q =& \{(re^{(p/q)(\theta_1+(2k+1)\pi)\sqrt{-1}}, e^{\theta_1\sqrt{-1}}) : k=0,1,\dots,q-1, 0 \le r \le 1\}
\end{aligned}
$$



とおくと，X_p は $(\overline{B^2}\times S^1)\setminus K_{p,q}$ の変形レトラクトであり，X_q は $(S^1\times\overline{B^2})\setminus K_{p,q}$ の変形レトラクトである．
位相的には

$$
X_p \simeq \frac{S^1\times[0,1/2]}{(z,0)\sim(e^{2\pi\sqrt{-1}/p}z,0)}, \qquad X_q \simeq \frac{S^1\times[1/2,1]}{(z,1)\sim(e^{2\pi\sqrt{-1}/q}z,1)}
$$

であり，$\pi_1(X_p)=\mathbb{Z}=\langle a\rangle$, $\pi_1(X_q)=\mathbb{Z}=\langle b\rangle$ と書ける．

$$
X_{p,q} = \frac{S^1\times I}{(z,0)\sim(e^{2\pi\sqrt{-1}/p}z,0), \quad (z,1)\sim(e^{2\pi\sqrt{-1}/q}z,1)}
$$

と置くと，$X_{p,q}=X_p\cup_{S^1\times\{1/2\}}X_q$ であり $\pi_1(S^1\times\{1/2\})=\mathbb{Z}$ の生成元は $a^p=b^q$ である．よって van Kampen の定理より

$$
\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K)=\pi_1(S^3\setminus K_{p,q})=\langle a,b \mid a^p=b^q=e\rangle=\mathbb{Z}_p*\mathbb{Z}_q
$$

例 2.23 (ハワイの耳飾り)**.**

$$
X=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n \qquad C_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-\tfrac{1}{n})^2+y^2=\tfrac{1}{n^2}\}
$$

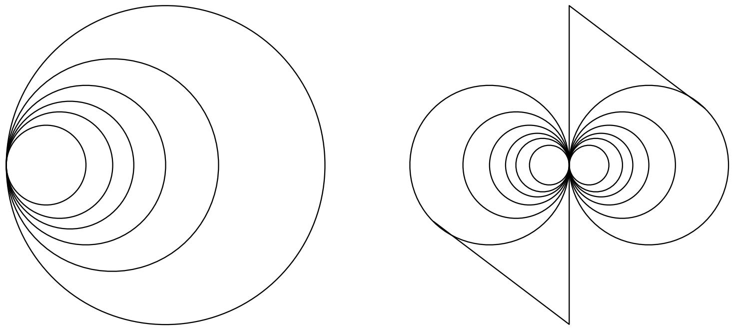
C_n 以外の円を一点に潰す写像 $r_n : X\to C_n$ を考える．原点を基点として基本群の間の写像

$$
(r_n)_* : \pi_1(X,*)\to\pi_1(C_n,*)=\mathbf{Z}
$$

を考える．これは明らかに全射である．区間 $[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}]$ で C_n を k_n 周まわるパスを考えれば

$$
\prod(r_n)_* : \pi_1(X,*)\to\prod_{n=1}^{\infty}\pi_1(C_n,*)=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbf{Z}
$$

も全射である．よって $\pi_1(X)$ は非可算個の元を含む．また $X\to C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$ は $\pi_1(X,*)$ から n 個の元の生成する自由群への全射を定める．



U, V, $U \cap V$ が X の開集合でないときは van Kampen の定理は成り立たない．

例 2.24. X を次で定める．

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \qquad C_n = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2}\}$$

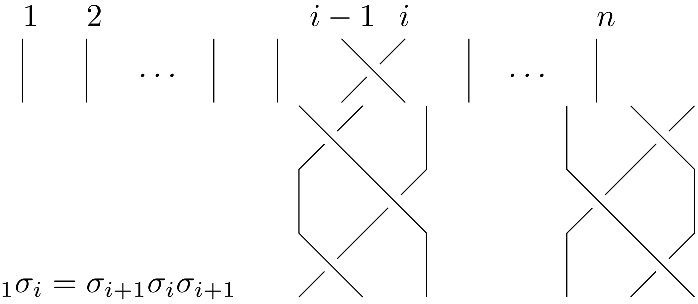
$(1, 0, 1)$ を頂点とする X の錐 CX は局所単連結でないが単連結である．$U = CX$, $V = -CX$ として，$Z = U \cup V$ の基本群を van Kampen の定理を使って計算することはできない．U, V は単連結なので $\pi_1(U, O)$, $\pi_1(V, O)$ は自明な群であるが $\pi_1(U \cup V, O)$ は非加算無限個の元を持つ．

G を生成元と関係式で与えられた群とする．G の元を生成元の積（語と呼ぶ）で表したとき，異なる語でも同じ元を表す事はもちろんある．2 つの語が与えられたときそれらが同じ元を表すかどうか判定するアルゴリズムが存在するかどうかを問う問題を**語の問題**という．語の問題は 1911 年に M. Dehn によって述べられたが，1955 年に Novikov は，有限生成群で語の問題が肯定的に解けない例が存在することを示した．

例 2.25 (組紐群)**.** n 本の組紐の作る群を組紐群といい，次のような表示を持つ．

$$B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (|i - j| \geq 2) \rangle$$

$\sigma_i =$



$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

組紐群では語の問題は肯定的に解ける事が知られている．

例 2.26 (Collins & Zieschang (1990))**.** 正の整数の部分集合 A で，与えられた数が A に属するかどうか判定するアルゴリズムがないものを取る．そのようなものがあることは知

られている．すると次の群での語の問題は肯定的に解けない．

$$\langle a,b,c,d \mid a^n b a^n = c^n d c^n \ \ n \in A\rangle$$

3　基点付きホモトピー

本節では基点付きホモトピー集合の群構造について論じる．まず基点付きホモトピーの定義を述べよう．

定義 3.1 (基点付きホモトピー)**.** 各位相空間 X, Y に基点と呼ばれる点 $*_X$, $*_Y$ を決めておく．$f(*_X) = *_Y$ を満たす写像を，基点を保つ写像とよび，基点を保つ写像のホモトピー類を $[X,Y]_*$ で表す．基点 $*_X$ はしばしば X を明示しないで，単に $*$ と書く．

3.1　Y について自然な $[X,Y]_*$ の群構造

$[X,Y]_*$ の演算が Y に関し自然であるとは，任意の $h: Y \to Y'$ に対し，次を満たす時を言う．

$$h_*([f]\cdot[g]) = [h\circ f]\cdot[h\circ g], \qquad f,g: X \to Y$$

定理 3.2 ($[X,Y]_*$ の Y について自然な群構造)**.** 任意の Y に対し $[X,Y]_*$ に自然な群構造が定まる事は，X に対し次の条件を満たす $\mu: X \to X\vee X$, $\nu: X \to X$ が定まる事と同値である．

(i) $X \xrightarrow{\mu} X\vee X \xrightarrow{\pi_i} X$ $(i=1,2)$ は恒等写像 1_X にホモトープ．
(ii) $X \xrightarrow{\mu} X\vee X \xrightarrow{1_X\vee\mu} X\vee X\vee X$ と $X \xrightarrow{\mu} X\vee X \xrightarrow{\mu\vee 1_X} X\vee X\vee X$ はホモトープ．
(iii) $X \xrightarrow{\mu} X\vee X \xrightarrow{1_X\vee\nu} X$ は定値写像にホモトープ．

以下，この定理の証明を行う．

■単位元　定値写像 $*: X \to *$ を取る．写像 $g: * \to Y$ が誘導する $[X,*]_* \to [X,Y]_*$ により，$[X,*]_*$ の唯一の元は $[X,*]_*$ の単位元であり，その像は $[X,Y]_*$ の冪等元である．もし $[X,Y]_*$ が群ならば，定値写像は $[X,Y]_*$ の単位元を表す．

■演算　自然な写像 $\alpha_i: X \to X\vee X$ $(i=1,2)$ のホモトピー類の積 $[\alpha_1]\cdot[\alpha_2]$ が，写像 $\mu: X \to X\vee X$ のホモトピー類であるとする．すなわち，次を満たす $\mu: X \to X\vee X$ をとる．

$$[\alpha_1]\cdot[\alpha_2] = [\mu]$$

自然な写像 $\pi_i : X \vee X \to X$ $(i=1,2)$ に対し，$\pi_i \circ \alpha_i = 1_X$, $i \neq j$ のとき $\pi_i \circ \alpha_j = *$(定値写像) なので，$(\pi_i)^* : [X, X \vee X] \to [X, X]$ による μ の像は次のように計算される．

$$(\pi_1)^*([\mu]) = (\pi_1)^*([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) = (\pi_1)^*([\alpha_1]) \cdot (\pi_1)^*([\alpha_2]) = [1_X] \cdot [*] = [1_X]$$

すなわち $\pi_1 \circ \mu$ は 1_X にホモトープである．同様に $\pi_2 \circ \mu$ も 1_X にホモトープである．

$[X, Y]_*$ の積は次の写像の像として表される．

$$[X,Y]_* \times [X,Y]_* \xrightarrow{(\pi_1,\pi_2)^*} [X \vee X, Y]_* \xrightarrow{\mu^*} [X,Y]_*,$$
$$([f],[g]) \mapsto [f \vee g] \mapsto [(f \vee g) \circ \mu]$$

なぜなら $(\pi_1, \pi_2)_*$ は同型であり，$[X,Y]_* \times [X,Y]_*$ には積空間の演算構造が入っているので，次の式が成り立つからである．

$$\begin{aligned} \mu^* \circ (\pi_1,\pi_2)^*([f],[g]) =& \mu^* \circ (\pi_1,\pi_2)^*(([f],[*]) \cdot ([*],[g])) \\ =& [(\mu \circ \pi_1)^*(f)] \cdot [(\mu \circ \pi_2)^*(g)] = [f] \cdot [g] \end{aligned}$$

■**結合法則**　$[X,Y]_*$ が結合法則を満たす，即ち $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ を仮定する．i 番目の成分への埋込み $X \to X \sqcup X \sqcup X$ $(i = 1,2,3)$ の定める写像 $\alpha_i : X \to X \vee X \vee X$ を考える．

$$[(\mu \vee 1_X) \circ \mu] = [\mu] \cdot [\alpha_3] = ([\alpha_1] \cdot [\alpha_2]) \cdot [\alpha_3] = [\alpha_1] \cdot ([\alpha_2] \cdot [\alpha_3]) = [\alpha_1] \cdot [\mu] = [(1_X \vee \mu) \circ \mu]$$

となり $X \xrightarrow{\mu} X \vee X \xrightarrow{1_X \vee \mu} X \vee X \vee X$ と $X \xrightarrow{\mu} X \vee X \xrightarrow{\mu \vee 1_X} X \vee X \vee X$ はホモトープである事がわかる．．逆に $(1_X \vee \mu) \circ \mu$ と $(\mu \vee 1_X) \circ \mu$ がホモトープだとすると，誘導する写像

$$[X,Y]_* \times [X,Y]_* \times [X,Y]_* = [X \vee X \vee X, Y]_* \xrightarrow{\mu^* \vee (1_X)^*} [X \vee X, Y]_* \xrightarrow{\mu^*} [X,Y]_*$$
$$[X,Y]_* \times [X,Y]_* \times [X,Y]_* = [X \vee X \vee X, Y]_* \xrightarrow{(1_X)^* \vee \mu^*} [X \vee X, Y] \xrightarrow{\mu^*} [X,Y]_*$$

もホモトープであり，

$$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = ((\mu \vee 1_X) \circ \mu)^*([f],[g],[h]) = ((1_X \vee \mu) \circ \mu)^*([f],[g],[h]) = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

なので，結合法則が成り立つ事がわかる．

■**逆元**　$[X,X]_*$ の元 $[1_X]$ の逆元 $[\nu]$ を表す写像 $\nu : X \to X$ を取る．すると $[1_X] \cdot [\nu] = [*]$ なので $(1_X \vee \nu) \circ \mu$ は定値写像にホモトープ．逆に $(1_X \vee \nu) \circ \mu$ が定値写像にホモトープであるような $\nu : X \to X$ が存在すると，$\nu_* : [X,Y]_* \to [X,Y]_*$, $\nu_*([f]) = [f \circ \nu]$, が定まる．

$$[f] \cdot [f \circ \nu] = [(f \vee (f \circ \nu)) \circ \mu] = [f \circ (1_X \vee \nu) \circ \mu] = [f \circ *] = [*]$$

なので，$[f \circ \nu]$ は $[f]$ の逆元となる．

3.2　懸垂

基点付き位相空間 $(X,*)$ に対し，その懸垂 (suspension) SX を次で定義する．

$$SX = X \times I/(* \times I \cup X \times \partial I)$$

例 3.3. $SS^{n-1} \simeq S^n$. 実際，$SS^{n-1} \setminus \{*\} \simeq (S^{n-1} \setminus \{*\}) \times (0,1) \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times (0,1) \simeq \mathbb{R}^n$. SS^{n-1} はコンパクトハウスドルフ空間なので，$\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化であり，S^n に同相である．

$SX \vee SX = X \times I/(* \times I \cup X \times \{0, 1/2, 1\})$ とみる．すると，写像

$$\mu : SX \to SX \vee SX, \quad (x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I) \mapsto (x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1/2,1\})$$

$$\nu : SX \to SX, \quad (x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I) \mapsto (x, 1-t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I)$$

は，定理 3.2 の条件を満たす．実際，

$$\begin{aligned} &\pi_i \circ \mu((x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1\})) \\ =&\pi_i((x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1/2,1\})) \\ =&\begin{cases} (x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1\} \cup X \times [1/2,1]) & i=1 \\ (x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1\} \cup X \times [0,1/2]) & i=2 \end{cases} \end{aligned}$$

なので (i) は明らか．(ii) は $f, g : SX \to SX$ に対し $f \vee g$ の定義

$$(f \vee g)(x,t) = \begin{cases} (f(x), 2t) & (0 \le t \le 1/2) \\ (g(x), 2t-1) & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$$

を使えばわかる．(iii) は

$$\begin{aligned} &(1 \vee \nu) \circ \mu((x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I)) \\ =&(1 \vee \nu)((x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \{0,1/2,1\})) \\ =&\begin{cases} (x,2t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I)) & 0 \le t \le 1/2 \\ (x, 2(1-t)) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

なので，定値写像と $(1 \vee \nu) \circ \mu$ をつなぐホモトピー $F : SX \times I \to Y$ は例えば次のように定義すればよい．

$$F((x,t) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I), s) = \begin{cases} (x, 2st) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I) & 0 \le t \le 1/2 \\ (x, 2s(1-t)) \bmod (* \times I \cup X \times \partial I) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

定理 3.4. $[SX, Y]_*$ は群になる．

3.3 X について自然な $[X,Y]_*$ の群構造

$[X,Y]_*$ の演算が X に関し自然であるとは，任意の $h : X' \to X$ に対し，次を満たす時を言う．

$$h^*([f]\cdot[g]) = [f\circ h]\cdot[g\circ h], \qquad f,g : X \to Y$$

定理 3.5 ($[X,Y]_*$ の X について自然な群構造)**.** 任意の X に対し $[X,Y]_*$ に自然な群構造が定まるのは，Y に対し次の条件を満たす $\mu : Y\times Y \to Y$, $\nu : Y \to Y$ が定まることと同値である．

(i) $Y \xrightarrow{j_i} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$ $(i=1,2)$ は恒等写像 1_X にホモトープ．

(ii) $Y\times Y\times Y \xrightarrow{\mu\times 1_Y} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$ と $Y\times Y\times Y \xrightarrow{1_Y\times\mu} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$ はホモトープ．

(iii) $Y \xrightarrow{1_Y\times\nu} Y\vee Y \xrightarrow{\mu} Y$ は定値写像にホモトープ．

以下，この定理の証明を行う．

■単位元　定値写像 $* : X \to *$ を取る．写像 $g : * \to Y$ が誘導する $[X,*]_* \to [X,Y]_*$ により，$[X,*]_*$ の唯一の元は $[X,*]_*$ の単位元であり，その像は $[X,Y]_*$ の冪等元である．もし $[X,Y]_*$ が群ならば，定値写像は $[X,Y]_*$ の単位元を表す．

■演算　自然な射影 $\pi_i : X\times Y \to Y$ $(i=1,2)$ のホモトピー類の積 $[\pi_1]\cdot[\pi_2]$ が，写像 $\mu : Y\times Y \to Y$ のホモトピー類であるとする．すなわち，次を満たす $\mu : Y\times Y \to Y$ をとる．

$$[\pi_1]\cdot[\pi_2] = [\mu]$$

自然な写像 $j_k : Y\times Y \to Y$ $(k=1,2)$ に対し，$\pi_k\circ j_k = 1_Y$, $i\neq k$ のとき $\pi_i\circ j_k = *$(定値写像) なので，$(j_i)^* : [Y\times Y, Y] \to [Y,Y]$ による μ の像は次のように計算される．

$$(j_1)_*([\mu]) = (j_1)_*([\pi_1]\cdot[\pi_2]) = (j_1)_*([\pi_1])\cdot(j_1)_*([\pi_2]) = ([\pi_1\circ j_1])\cdot([\pi_2\circ j_1]) = [1_Y]\cdot[*] = [1_Y]$$

すなわち $\mu\circ j_1$ は 1_Y にホモトープである．同様に $\mu\circ j_2$ も 1_Y にホモトープである．

$[X,Y]_*$ の積は次の写像の像として表される．

$$[X,Y]_*\times[X,Y]_* \xrightarrow{(j_1,j_2)_*} [X,Y\times Y]_* \xrightarrow{\mu_*} [X,Y]_*,$$
$$([f],[g]) \mapsto [f\times g] \mapsto [\mu\circ(f\times g)]$$

なぜなら $(j_1,j_2)_*$ は同型であり，$[X,Y]_*\times[X,Y]_*$ には積空間の演算構造が入っているので，次の式が成り立つからである．

$$\begin{aligned}\mu_*\circ(j_1,j_2)_*([f],[g]) =& \mu_*\circ(j_1,j_2)_*(([f],[*])\cdot([*],[g])) \\ =& [(\mu\circ j_1)_*(f)]\cdot[(\mu\circ j_2)_*(g)] = [f]\cdot[g]\end{aligned}$$

■結合法則　$[X,Y]_*$ が結合法則を満たすとする．すなわち $([f]\cdot[g])\cdot[h]=[f]\cdot([g]\cdot[h])$ とする．i 番目の射影 $Y\times Y\times Y\to Y$ $(i=1,2,3)$ を考える．

$$[\mu\circ(\mu\times 1_Y)]=([\pi_1]\cdot[\pi_2])\cdot[\pi_3]=[\pi_1]\cdot([\pi_2]\cdot[\pi_3])=[\mu\circ(1_Y\times\mu)]$$

となり $Y\times Y\times Y\xrightarrow{\mu\times 1_Y}Y\times Y\xrightarrow{\mu}Y$ と $X\times X\times X\xrightarrow{1_Y\times\mu}Y\times Y\xrightarrow{\mu}Y$ はホモトープ．逆に $\mu\circ(1_Y\times\mu)$ と $\mu\circ(\mu\times 1_Y)$ がホモトープだとすると，誘導する写像

$$[X,Y]_*\times[X,Y]_*\times[X,Y]_*=[X,Y\times Y\times Y]_*\xrightarrow{\mu_*\vee(1_Y)_*}[X,Y\times Y]_*\xrightarrow{\mu*}[X,X]_*$$

と

$$[X,Y]_*\times[X,Y]_*\times[X,Y]_*=[X\vee X\vee X,Y]_*\xrightarrow{(1_Y)_*\vee\mu_*}[X\vee X,Y]_*\xrightarrow{\mu*}[X,Y]_*$$

もホモトープであり，

$$([f]\cdot[g])\cdot[h]=(\mu\circ(\mu\vee 1_Y))_*([f],[g],[h])=(\mu\circ(1_Y\vee\mu))_*([f],[g],[h])=[f]\cdot([g]\cdot[h])$$

なので，結合法則が成り立つ事がわかる．

■逆元　$[Y,Y]_*$ の元 $[1_Y]$ の逆元 $[\nu]$ を表す写像 $\nu:Y\to Y$ を取る．すると $[1_Y]\cdot[\nu]=[*]$ なので $\mu\circ(1_Y\times\nu)$ は定値写像にホモトープ．逆に $\mu\circ(1_Y\times\nu)$ が定値写像にホモトープであるような $\nu:X\to X$ が存在すると，$\nu_*:[X,Y]_*\to[X,Y]_*$, $\nu_*([f])=[\nu\circ f]$, が定まる．

$$[f]\cdot[\nu\circ f]=[\mu\circ(f\times(\nu\circ f))]=[\mu\circ(1_Y\times\nu)\circ f]=[*\circ f]=[*]$$

なので，$[\nu\circ f]$ は $[f]$ の逆元となる．

3.4　ループ空間

基点付き位相空間 $(Y,*)$ に対し，その**ループ空間** (loop space) ΩY を次で定める．

$$\Omega Y=\{f:I\to Y\mid f(0)=f(1)=*\}$$

すると自然な写像

$$\mu:\Omega Y\times\Omega Y\to\Omega Y,\qquad \mu(f,g)=\begin{cases}f(2t) & 0\le t\le 1/2\\ g(2t-1) & 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

および

$$\nu:\Omega Y\to\Omega Y,\quad \nu(f)(t)=f(1-t)$$

は定理 3.5 の仮定を満たす．最後の条件だけ見る．

$$(\mu\circ(1\times\nu))(f)(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\le t\le 1/2 \\ f(2(1-t)) & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

するとこの写像と定値写像を結ぶホモトピーは例えば次がそうである．

$$F(t,s)=\begin{cases} f(2st) & 0\le t\le 1/2 \\ f(2s(1-t)) & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

定理 3.6. $[X,\Omega Y]_*$ は群構造を持つ．

3.5 $[SX,Y]_*=[X,\Omega Y]_*$ からの帰結

基点付きホモトピー

$$F: X\times I\to Y \qquad F(*,t)=*,\ F(x,0)=*,\ F(x,1)=*$$

に対し，$F_x: I\to Y$, $t\mapsto F_x(t)=F(x,t)$ は Y のループ（閉道）である．よって F に対し $x\mapsto F_x$ を対応させる写像で次の同型が定まる．

$$[SX,Y]_*\simeq[X,\Omega Y]_*$$

両辺それぞれに群演算が定まっているが定値写像が単位元を表すので，単位元は一致する．実は両辺の演算も一致する．なぜなら $F,G: SX\to Y$ に対し，

$$(F\vee G)\circ\mu(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & 0\le t\le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\mu\circ(F\times G)(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & 0\le t\le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

となるからである．

定理 3.7. $[SSX,Y]_*=[SX,\Omega Y]_*=[X,\Omega\Omega Y]_*$ は可換群である．

証明. $f,g: SX\to\Omega Y$ に対し，次のように置く．

$$[f]*[g]=[\mu\circ(f\times g)],\quad [f]\bullet[g]=[(f\vee g)\circ\mu]$$

定値写像のホモトピー類が，演算 $\bullet, *$ の単位元であることに注意しておく．

$$\begin{aligned}([f_1]\bullet[g_1])*([f_2]\bullet[g_2]) =&([(f_1\vee g_1)\circ\mu])*([(f_2\vee g_2)\circ\mu])\\ =&[\mu\circ((f_1\vee g_1)\circ\mu\times(f_2\vee g_2)\circ\mu)]\\ =&[\mu\circ((f_1\vee g_1)\times(f_2\vee g_2))\circ\mu]\\ =&[\mu\circ(f_1\times f_2)\vee(g_1\times g_2)\circ\mu]\\ =&[\mu\circ(f_1\times f_2)]\bullet[\mu\circ(g_1\vee g_2)]\\ =&([f_1]*[f_2])\bullet([g_1]*[g_2])\end{aligned}$$

なので，$[f_2]$, $[g_2]$ が単位元の場合を考えれば

$$[f]\bullet[g]=([f]*1)\bullet(1*[g])=([f]\bullet 1)*(1\bullet[g])=[f]*[g]$$

となり，$\bullet$ と $*$ は同じ演算であることがわかる．$[f_1]$, $[g_2]$ を単位元に取れば，

$$[g]\bullet[f]=[g]*[f]=(1\bullet[g])*([f]\bullet 1)=(1*[f])\bullet([g]*1)=[f]\bullet[g]$$

なので，可換であることがわかる． □

自明な事であるが，次の同型に注意しておこう．

$$[S^nX,Y]_*=[S^{n-1}X,\Omega Y]_*=[S^{n-2}X,\Omega^2 Y]_*=\cdots=[X,\Omega^n Y]_*$$

定義 3.8 (ホモトピー群)．基点 $*$ 付きの位相空間 X に対し，i 次ホモトピー群 $\pi_i(X,*)$ を次で定義する．

$$\pi_i(X,*)=[S^i,X]_*=[SS^{i-1},X]_*=[S^{i-1},\Omega X]_*=\pi_{i-1}(\Omega X,*)=\cdots=\pi_0(\Omega^i X.*)$$

$i\geq 2$ のときは $\pi_i(X,*)$ は可換群である．基点 $*$ を省略して $\pi_i(X,*)$ をしばしば $\pi_i(X)$ と略記する．

$\pi_0(X,*)$ は X の弧状連結成分の個数の元からなる集合である．

3.6 相対ホモトピー群

基点付きの相対ホモトピー

$$F:(X,A)\times I\to(Y,B),\quad F(*,t)=*,\ F(x,0)=*,\ F(x,1)=*,\ F(a,t)\in B\ (a\in A)$$

に対し $t\mapsto F(x,t)$ を対応させる写像で次の同型が定まる．

$$[(SX,SA),(Y,B)]_*\simeq[(X,A),(\Omega Y,\Omega B)]_*$$

I^i の部分空間 $I^{i-1}\times\{0\}$ を I^{i-1} と書き $\partial I^i\setminus I^{i-1}$ の閉包を J^{i-1} と書く．

定義 3.9 (ホモトピー群)**.** 連続写像 $f:(I^i,\partial I^i)\to(X,*)$ を**球写像**という．球写像のホモトピー類の集合を**ホモトピー群**という．２つの球写像 $f,g:(I^i,\partial I^i)\to(X,*)$ の和は

$$h(s_1.s_2,\dots,s_i)=\begin{cases}f(2s_1,s_2,\dots,s_i) & 0\le s_1\le\frac{1}{2}\\ g(2s_1-1,s_2,\dots,s_i) & \frac{1}{2}\le s_1\le 1\end{cases}$$

で定義される．$i\ge 1$ のとき $\pi_i(X,*)$ にこれで群構造が定まる．
$I^0=\{0\}$ $\partial I^0=\emptyset$ なので $\pi_0(X,*)$ は X の弧状連結成分全体であり，$\pi_0(X,*)$ には群構造は定まらない．

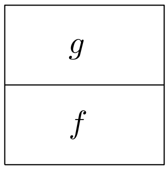
このホモトピー群の定義は前に述べたもの形は違うが実質は同じである．

定義 3.10 (相対ホモトピー群)**.** 基点 $*$ 付きの位相空間対 (X,A) に対し，i 次相対ホモトピー群 $\pi_i(X,A,*)$ を次で定義する．

連続写像 $f:(I^i,\partial I^i,J^{i-1})\to(X,A,*)$ を**相対球写像**という．相対球写像のホモトピー類の集合を**相対ホモトピー群**という．

$$\pi_i(X,A,*)=[(I^i,\partial I^i,J^{i-1}),(X,A,*)]_*$$

２つの相対球写像 $f,g:(I^i,\partial I^i,J^{i-1})\to(X,A,*)$ の和は



$$h(s_1.s_2,\dots,s_i)=\begin{cases}f(2s_1,s_2,\dots,s_i) & 0\le s_1\le\frac{1}{2}\\ g(2s_1-1,s_2,\dots,s_i) & \frac{1}{2}\le s_1\le 1\end{cases}$$

で定義される．$i\ge 2$ のとき $\pi_i(X,A,*)$ にこれで群構造が定まる．
$I^1=[0,1]$, $I^0=\{0\}$, $J^0=\{1\}$ なので

$$\pi_1(X,A,*)=\{\gamma:I\to X\mid\gamma(0)\in A,\gamma(1)=*\}$$

となり，$\pi_1(X,A,*)$ には群構造は定まらない．また $\pi_0(X,A,*)$ は定義されない．($\pi_0(X,*)$ を $\pi_0(A,*)$ の像で割って得られる集合として定義することもある．) $i\ge 3$ のときは $\pi_i(X,A,*)$ は可換群である．証明は前の議論と同様である．基点 $*$ を省略して $\pi_i(X,A,*)$ をしばしば $\pi_i(X,A)$ と略記する．

定理 3.11 (ホモトピー完全列)**.** 位相空間 X とその部分空間 A に対し，次は完全である．

$$\begin{array}{ccccccc}\xrightarrow{\partial} & \pi_n(A,*) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X,*) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X,A,*)\\ \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A,*) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & \\ \xrightarrow{\partial} & \pi_2(A,*) & \xrightarrow{i_*} & \pi_2(X,*) & \xrightarrow{j_*} & \pi_2(X,A,*)\\ \xrightarrow{\partial} & \pi_1(A,*) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X,*) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X,A,*)\\ \xrightarrow{\partial} & \pi_0(A,*) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0(X,*) & & \end{array}$$

但し $[f]\in\pi_i(X,A.*)$ に対し $\partial[f]=[f|_{I^{i-1}}]$

証明. $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_*$: $\subset$ は自明．$\supset$ を示す．$f : (I^i, \partial I^i) \to (X, *)$ に対し，$j_*[f]$ が定値写像にホモトピックであるとする．するとホモトピー

$$F : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \times I \to (X, A, *)$$

が存在して，$F(s_1, \ldots, s_i, 0) = f(s_1, \ldots, s_i)$, $F(s_1, \ldots, s_i, 1) = *$ となる．写像 $G : (I^i, \partial I^i) \times I \to (X, *)$ を

$$G(s_1, \ldots, s_i, t) = \begin{cases} F(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0, 2s_i) & 0 \le s_i \le \frac{t}{2} \\ F(s_1, \ldots, s_{i-1}, \frac{2s_i - t}{2-t}, t) & \frac{t}{2} \le s_i \le 1 \end{cases}$$

とすると $G(s_1, \ldots, s_i, 0) = f(s_1, \ldots, s_i)$ なので $g(s_1, \ldots, s_i) = G(s_1, \ldots, s_i, 1)$ と置けば，$i_*[g] = [f]$.

$\operatorname{Im} j_* = \operatorname{Ker} \partial$: 球写像 $f : (I^i, \partial I^i) \to (X, *)$ に対し $f|_{I^{i-1}} = *$ なので $\subset$ は明らか．$\supset$ を示す．相対球写像 $f : (I^i, \partial I^i, J^i) \to (X, A, *)$ に対し $f|_{I^{i-1}}$ が零ホモトープであるとすると，ホモトピー

$$F : (I^{i-1}, \partial I^{i-1}) \times I \to (A, *)$$

が存在して，$F(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0) = f(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0)$, $F(s_1, \ldots, s_{i-1}, 1) = *$ を満たす．

$$G : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \times I \to (X, A, *)$$

を $G(s_1, \ldots, s_i, 0) = f(s_1, \ldots, s_i)$, $G(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0, t) = F(s_1, \ldots, s_{i-1}, t)$ を満たすようにとる．

$$g : (I^i, \partial I^i) \to (X, *),\ g(s_1, \ldots, s_i) = G(s_1, \ldots, s_i, 1)$$

と置くと，$j_*[g] = [f]$ を満たす．

$\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_*$: $\subset$ の証明: $f : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \to (X, A, *)$ に対し $g(s_1, \ldots, s_{i-1}) = f(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0)$ は $f(s_1, \ldots, s_{i-1}, 1) = *$ より，零ホモトープである．$\supset$ を示す．$f : (I^{i-1}, \partial I^{i-1}) \to (A, *)$ が X 内で零ホモトープであるとすると，ホモトピー

$$F : (I^{i-1}, \partial I^{i-1}) \times I \to (X, *)$$

が存在して，$F(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0) = f(s_1, \ldots, s_{i-1})$, $F(s_1, \ldots, s_{i-1}, 1) = *$ を満たす．さて

$$G : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \times I \to (X, A, *),\ G(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i) = F(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i)$$

とおくと，$\partial[G] = [f]$ である．□

定理 3.12. $n \ge 2$ のとき次が成り立つ

1. $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.

2. $\pi_n(X \vee Y) \simeq \pi_n(X) \times \pi_n(Y) \times \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$.

証明. 最初の主張は例 2.17 と同様に証明できる．2 番目の主張は次の完全列を見ればわかる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \to & \pi_{n+1}(X \times Y) & \to & \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \\
\to & \pi_n(X \vee Y) & \to & \pi_n(X \times Y) & \to & \pi_n(X \times Y, X \vee Y) \\
\to & \pi_{n-1}(X \vee Y) & \to & \cdots & & \\
\to & \pi_2(X \vee Y) & \to & \pi_2(X \times Y) & \to & \pi_{2n}(X \times Y, X \vee Y) \\
\to & \pi_1(X \vee Y) & \to & \pi_1(X \times Y) & \to & \pi_1(X \times Y, X \vee Y) \\
\to & \pi_0(X \vee Y) & \to & \pi_0(X \times Y) & &
\end{array}
$$

$n \geq 2$ として $\pi_n(X \vee Y) \to \pi_n(X \times Y)$ が全射である事を示す．$\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ の任意の元に対しそれを表す写像 $(\gamma_1, \gamma_2) : (I^n, \partial I^n) \to X \times Y$ をとり

$$
\gamma(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} \gamma_1(s_1, \ldots, s_{n-1}, 2s_n) & 0 \leq s_n \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(s_1, \ldots, s_{n-1}, 2s_n - 1) & \frac{1}{2} \leq s_n \leq 1 \end{cases}
$$

とおくと $[\gamma]$ の $\pi_n(X \vee Y) \to \pi_n(X \times Y)$ による像は $[(\gamma_1, \gamma_2)]$ である． □

4 ファイバー空間

4.1 ホモトピー持ち上げ性質

定義 4.1 (局所自明なファイバー空間).

$p : E \to B$ が局所自明なファイバー空間であるとは B の点 $*$ に対し $F = p^{-1}(*)$ とおき，任意の $b \in B$ に対し，次を満たす近傍 U が存在する時を言う．$p = p_1 \circ \varphi$ を満たす位相同型 $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ が存在する．ただし $p_1 : U \times F \to U$ は自然な射影.

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

局所自明なファイバー空間の定義で，ファイバー F を離散位相空間とすれば被覆空間になる．従って局所自明なファイバー空間の概念は被覆空間の概念を一般化したものと言える．

例 4.2 (Hopf ファイバー空間).

- 写像 $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to P^1(\mathbb{C})$, $(z, w) \mapsto [z : w]$ を $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ に制限すると，局所自明ファイバー空間 $p : S^3 \to P^1(\mathbb{C}) = S^2$ を得る．ファイバーは S^1 である．
- $\mathbb{H}$ をハミルトンの 4 元数体とする．写像 $p : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to P^1(\mathbb{H})$, $(z, w) \mapsto [z : w]$ を $S^7 \subset \mathbf{H}^2$ に制限すると，局所自明ファイバー空間 $p : S^7 \to P^1(\mathbb{H}) = S^4$ を得る．ファイバーは S^3 である．

- $\mathfrak{C}$ をケーリーの 8 元数体とする．写像 $p : \mathfrak{C}^2 \setminus \{0\} \to P^1(\mathfrak{C})$, $(z, w) \mapsto [z : w]$ を $S^{15} \subset \mathfrak{C}^2$ に制限すると，局所自明ファイバー空間 $p : S^{15} \to P^1(\mathfrak{C}) = S^8$ を得る．ファイバーは S^7 である．

局所自明なファイバー空間の重要な性質として，次に説明するホモトピー持ち上げ性質がある．局所自明なファイバー空間がホモトピー持ち上げ性質を持つことは，この後の定理 4.7 から直ちに従う．

定義 4.3.
$p : E \to B$ が**ホモトピー持ち上げ性質** (homotopy lifting property) を持つとは，任意の位相空間 X と任意の写像 $f : X \times \{0\} \to E$ とホモトピー $F : X \times I \to B$ が $p \circ f(x) = F(x, 0)$ を満たせば，次の可換図式を満たす $\tilde{F} : X \times I \to E$ が存在するときをいう．ホモトピー持ち上げ性質を持つ写像を**ファイブレーション** (fibration) という．

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

双対的概念であるホモトピー拡張性質も定義しておこう．
$i : A \to X$ が**ホモトピー拡張性質** (homotopy extension property) を持つとは，任意の位相空間 Y と写像 $f : X \to Y$, $F : A \to \mathrm{Map}(I, Y)$ が存在して $F(a)(0) = f(a)$ $(a \in A)$ を満たすとき，$\tilde{F} : X \to \mathrm{Map}(I, Y)$ が存在して $\tilde{F}(a)(0) = f(a)$, $\tilde{F} \circ i = F$ と出来る時を言う．ホモトピー拡張性質を持つ写像を**コファイブレーション** (cofibration) という．

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"'] \\ \mathrm{Map}(I, Y) \arrow[u, two heads, "p_0"] & A \arrow[l, "F"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$G(a, t) = F(a)(t)$, $\tilde{G}(x, t) = \tilde{F}(x)(t)$ と置くと次の等式より，ホモトピー拡張性質は下の図式で説明することもできる．

$$\tilde{G}(x, 0) = f(x) \ (x \in X), \qquad \tilde{G}(a, t) = G(a, t) \ (a \in A, \ t \in I).$$

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[rr, "i \times 1"'] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\ & Y & \\ A \times I \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, hook, "i \times 1"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{G}"'] \end{tikzcd}$$

定理 4.4. 次は同値である．

- (X, A) はホモトピー拡張性質をもつ．
- $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ は $X \times I$ のレトラクトである．

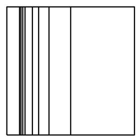
証明. (X,A) がホモトピー拡張性質をもてば，$(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ の恒等写像は $X\times I\to(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ に拡張する．

A が閉集合として，逆を証明する．任意の $(X\times\{0\})\cup(A\times I)\to Y$ に対し，レトラクション $X\times(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ を合成すれば拡張 $X\times I\to Y$ を得る． □

例 4.5. 次の写像は局所自明でないがホモトピー持ち上げ性質を持つ．

$$CX=\frac{X\times I}{X\times\{0\}}\to I,(x,t)\to t$$

例 4.6 (ホモトピー拡張性質を持たない例)**.**
$X=I$, $A=\{1/n:n=1,2,\dots\}$ とおくと，(X,A) はホモトピー拡張性質を持たない．つまり $(I\times\{0\})\cup(A\times I)$ の連続関数で $I\times I$ の連続関数に拡張しないものが存在する．



定理 4.7. 写像 $p:E\to B$ について，次は同値である．

1. $p:E\to B$ はファイブレーション．
2. 任意の $b\in B$ に対し，b の近傍 U が存在し $p:p^{-1}(U)\to U$ はファイブレーション．

証明. 1$\Longrightarrow$2 は自明であるから，2$\Longrightarrow$1 を示せばよい．三角形分割して j 骨格 $K^{(j)}$ を考え，j に関する帰納法で示せばよい．

結局，閉球体 D^n に対し，$F(D^n)$ が U に入るとして，次の可換図式を満たす $\tilde{F}$ を構成する問題に帰着される．この事実は，局所的にファイブレーションであることから従う．正確には CW 複体であることを仮定する必要があるが詳細は略す．

$$\begin{tikzcd}
D^n\times\{0\}\cup S^{n-1}\times I \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n\times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

□

4.2 ホモトピーファイバー空間

任意の写像はファイブレーションにホモトピー同値であることを示すのが目的である．

任意の写像 $f:Y\to B$ に対し，**ホモトピーファイバー空間** E_f を次で定める．

$$E_f=\{(y,\gamma)\in Y\times\mathrm{Map}(I,B):f(y)=\gamma(0)\}$$

E_f は Y とホモトピー同値である．実際

$$\alpha:Y\to E_f,\ y\mapsto(y,s\mapsto f(y)),\qquad\beta:E_f\to Y,\ (y,\gamma)\mapsto y$$

とおくと $\beta\circ\alpha = 1_Y$, $\alpha\circ\beta(y,\gamma) = (y, s\mapsto f(y))$ であり

$$F : E_f \times I \to E_f,\ (y, s\mapsto \gamma(s), t) \mapsto (y, s\mapsto \gamma(st))$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "f"'] & E_f \arrow[d, "p"'] \\ B \arrow[r, "1"] & B \end{tikzcd}$$

が $\alpha\circ\beta$ と 1_{E_f} を結ぶホモトピーである．

定理 4.8. $E_f \to B$, $(y,\gamma)\mapsto \gamma(1)$, はファイブレーションである．

証明. 任意の位相空間 X に対し，写像

$$g : X \to E_f,\ x \mapsto (y(x), \gamma_x), \qquad G : X\times I \to B$$

$$\begin{tikzcd} X\times\{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_f \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

が存在したら $\tilde{G}(x,t) = (y(x), s\mapsto \gamma_x(st))$ と定めればよい． □

ホモトピーファイバー F_f を次で定める．

$$F_f = \{(y,\gamma)\in Y\times \mathrm{Map}(I,B) : f(y) = *\}$$

4.3 ファイバー空間

$p : E\to B$ が F をファイバーとするファイバー空間であるとき $F = p^{-1}(*)$ として，(E,F) のホモトピー完全列を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} \to & \pi_n(F,*) & \to & \pi_n(E,*) & \to & \pi_n(E,F,*) \\ \to & \pi_{n-1}(F,*) & \to & \cdots & & \\ \to & \pi_2(F,*) & \to & \pi_2(E,*) & \to & \pi_2(E,F.*) \\ \to & \pi_1(F,*) & \to & \pi_1(E,*) & \to & \pi_1(E,F,*) \\ \to & \pi_0(F,*) & \to & \pi_0(E,*) & & \end{array}$$

写像 $p : (E,F)\to (B,*)$ はホモトピーの間の写像

$$p_* : \pi_n(E,F,*) = [(I^n,\partial I^n, J^{n-1}), (E,F,*)] \to [(I^n,\partial I^n),(B,*)] = \pi_n(B,*)$$

を定める．

定理 4.9. $p_* : \pi_n(E,F,*)\to\pi_n(B,*)$ は同型．

証明. p_* の単射性

写像 $f : (I^n,\partial I^n, J^{n-1}) \to (E,F,*)$ に対し次の可換図式を考える．$p\circ f$ を 1 点に縮めるホモトピー F があれば，ホモトピー持ち上げ性質より F は $\tilde{F}$ に持ち上がり，ホモトピー $\tilde{F}$ が f を E の部分集合 F への写像に縮めるホモトピーを表す．

$$\begin{tikzcd} (I^n,\partial I^n, J^{n-1}) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (E,F,*) \arrow[d, "p"] \\ (I^n,\partial I^n, J^{n-1})\times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & (B,*) \end{tikzcd}$$

p_* の全射性

$\pi_n(B,*)$ の元を表す写像 $f : (I^n, \partial I^n) \to (B,*)$ をとる．$f|_{J^{n-1}} = *$ なので，$f|_{J^{n-1}}$ は定値写像として E に持ち上がる．$(I^n, J^{n-1}) \simeq I^{n-1} \times (I, \{0\})$ なのでホモトピー持ち上げ性質より f は $g : I^n \to E$ に持ち上がる．$p_*[g] = [f]$ である．

$$\begin{tikzcd}
(J^{n-1}, J^{n-1}, J^{n-1}) \arrow[r, "*"] \arrow[d] & (E, F, *) \arrow[d, "p"] \\
(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g"] & (B, *, *)
\end{tikzcd}$$

□

定理 4.10. $p : E \to B$ が F をファイバーとするファイバー空間であるとき $F = p^{-1}(*)$ として，次のホモトピー完全列が存在する．

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_n(F,*) & \to & \pi_n(E,*) & \to & \pi_n(B,*) \\
\to & \pi_{n-1}(F,*) & \to & \cdots & & \\
\to & \pi_2(F,*) & \to & \pi_2(E,*) & \to & \pi_2(B.*) \\
\to & \pi_1(F,*) & \to & \pi_1(E,*) & \to & \pi_1(B,*) \\
\to & \pi_0(F,*) & \to & \pi_0(E,*) & &
\end{array}$$

もし，B が弧状連結ならば，最後の矢印は全射である．

証明. 最後の主張のみ示す．任意の点 $x \in E$ を取る．B は弧状連結なので $p(x)$ から基点へのパスがある．これを x を起点とする E のパスに持ち上げると x から F の点へのパスとなる．このパスの終点を x' とすると x' の現す $\pi_0(F,*)$ のホモトピー類は x の表すホモトピー類 $\pi_0(E,*)$ に写る． □

例 4.11. 弧状連結位相空間 X の被覆 $p : \widetilde{X} \to X$ に対し $F = p^{-1}(*)$ は離散集合なので，次の完全列がある．

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \to & 0 & \to & \pi_3(\widetilde{X}) & \to & \pi_3(X) \\
 & \to & 0 & \to & \pi_2(\widetilde{X}) & \to & \pi_2(X) \\
 & \to & 0 & \to & \pi_1(\widetilde{X}) & \to & \pi_1(X) \\
 & \to & \pi_0(F) & \to & 0 & \to & 0
\end{array}$$

従って次の同型と完全列を帰結する．

$$\pi_i(\widetilde{X}) = \pi_i(X) \ (i \neq 1), \qquad 0 \to \pi_1(\widetilde{X}) \to \pi_1(X) \to \pi_0(F) \to 0$$

X は弧状連結なので $\pi_0(X)$ はただ一つの元からなる $(\pi_0(X) = 0)$ に注意しておこう．

例 4.12. 被覆 $\mathbb{R} \to S^1$ に対し前の例を適用すれば $\pi_i(S^1) = \pi_i(\mathbb{R}) = 0 \ (i \geq 2)$ を得る．

例 4.13. Hopf ファイブレーション $S^3 \to S^2$ に対し次の完全系列がある．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_3(S^1) & \to & \pi_3(S^3) & \to & \pi_3(S^2) \\
\to & \pi_2(S^1) & \to & \pi_2(S^3) & \to & \pi_2(S^2) \\
\to & \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^3) & \to & \pi_1(S^2) \\
\to & \pi_0(S^1) & \to & \pi_0(S^3) & &
\end{array}
$$

自明な群を 0 と書けば，次を得る．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\to & 0 & \to & \pi_3(S^3) & \to & \pi_3(S^2) \\
\to & 0 & \to & 0 & \to & \pi_2(S^2) \\
\to & \pi_1(S^1) & \to & 0 & \to & 0 \\
\to & 0 & \to & 0 & &
\end{array}
$$

ここで $\pi_i(S^3) = 0$ $(i \leq 2)$ であることを使っている．これは後で示す．(例 5.11) これより $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ $(i \geq 3)$ がわかる．Hopf ファイブレション $S^3 \to S^2$ は $\pi_3(S^2)$ の元を定めるが，実は $\pi_3(S^2)$ は Hopf ファイブレーションで生成される階数 1 の自由アーベル群である．実際 $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ の生成元は恒等写像 1_{S^3} であるがその $\pi_2(S^3)$ への像は合成 $S^3 \xrightarrow{1} S^3 \xrightarrow{p} S^2$ であり，これは Hopf ファイブレーションである．

例 4.14. Hopf ファイブレーション $S^7 \to S^4$ に対し次の完全系列がある．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_8(S^3) & \to & \pi_8(S^7) & \to & \pi_8(S^4) \\
\to & \pi_7(S^3) & \to & \pi_7(S^7) & \to & \pi_7(S^4) \\
\to & \pi_6(S^3) & \to & \pi_6(S^7) & \to & \pi_6(S^4) \\
\to & \pi_5(S^3) & \to & \pi_5(S^7) & \to & \pi_5(S^4) \\
\to & \pi_4(S^3) & \to & \pi_4(S^7) & \to & \pi_4(S^4) \\
\to & \pi_3(S^3) & \to & \pi_3(S^7) & \to & \pi_3(S^4) \\
\to & \pi_2(S^3) & \to & \pi_2(S^7) & \to & \pi_2(S^4) \\
\to & \pi_1(S^3) & \to & \pi_1(S^7) & \to & \pi_1(S^4) \\
\to & \pi_0(S^3) & \to & \pi_0(S^7) & &
\end{array}
$$

自明な群を 0 と書けば，次を得る．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_8(S^3) & \to & \pi_8(S^7) & \to & \pi_8(S^4) \\
\to & \pi_7(S^3) & \to & \pi_7(S^7) & \to & \pi_7(S^4) \\
\to & \pi_6(S^3) & \to & 0 & \to & \pi_6(S^4) \\
\to & \pi_5(S^3) & \to & 0 & \to & \pi_5(S^4) \\
\to & \pi_4(S^3) & \to & 0 & \to & \pi_4(S^4) \\
\to & \pi_3(S^3) & \to & 0 & \to & 0 \\
\to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\to & 0 & \to & 0 & &
\end{array}
$$

これより $\pi_3(S^3) = \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$, $\pi_4(S^3) = \pi_5(S^4)$, $\pi_5(S^3) = \pi_6(S^4)$ がわかる．

演習 4.15. Hopf ファイブレーション $S^{15} \to S^8$ に対し同様の計算をせよ．

5 CW 複体

5.1 CW 複体

定義 5.1. K が複体 (complex) であるとは q 次元球体 D^q からの連続写像の族 $f_i^q : D^q \to K$ $(i \in I_q)$ で次の条件を満たすもの．

- f_i^q の $\mathrm{Int}\, D^q$ への制限は，同相写像でその像を胞体とよび e_i^q と書く．
- $K = \bigcup_q \bigcup_{i \in I_q} e_i^q$.
- $f_i^q(\partial D^q) \subset \bigcup_{p<q} e_i^p$.

複体 K が **CW 複体** (CW complex) であるとは次の 2 条件をみたす時を言う．

(C) 各胞体の閉包は有限個の胞体とのみ交わる．

(W) $F \subset K$ が閉集合 $\iff$ 各 $q \geq 0$ と各 $i \in I_q$ について $(f_i^q)^{-1}(F)$ が D^q の閉集合．

CW 複体が**有限**であるとは，胞体の数が有限個の時をいう．
CW 複体が**局所有限**であるとは，各点が有限個の胞体の和集合に属する近傍を持つ時を言う．
胞体 X に対し，その k 次元以下の胞体の和集合を k **骨格** (k-skelton) といい X^k で表す．

例 5.2 (胞体分割の例)**.**

- n 次元球面 S^n から 1 点を除いたものは $\mathbb{R}^n$ なので，S^n は n 次元胞体と 0 次元胞体の非交和である．つまり，$S^n = e^n \cup e^0$
- 実射影空間 $P^n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ と $P^{n-1}(\mathbb{R})$ の非交和である．従って $P^n(\mathbb{R}) = e^n \cup e^{n-1} \cup \cdots \cup e^1 \cup e^0$.
- 複素射影空間 $P^n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^n$ と $P^{n-1}(\mathbb{C})$ の非交和である．従って $P^n(\mathbb{C}) = e^{2n} \cup e^{2n-2} \cup \cdots \cup e^2 \cup e^0$.

例 5.3. 有限項を除いて 0 であり，その 2 乗和が 1 であるような数列 (x_i) 全体を S^∞ と書く．

$$
\begin{aligned}
e_+^q =& \{(x_i) \mid x_i = 0\ (i > q),\ x_q > 0\} \\
e_-^q =& \{(x_i) \mid x_i = 0\ (i > q),\ x_q < 0\}
\end{aligned}
$$

とおけば S^∞ の胞体分割 $S^\infty = \bigcup_q (e_+^q \cup e_-^q)$ を得る．これは条件 (C) を満たすが (W) は満たさない．

例 5.4. $X = \{re^{2\pi\theta\sqrt{-1}} \mid 0 \leq r \leq 1,\ \theta \in \mathbb{Q}\}$ は CW 複体を実現する胞体分割はないが，可縮なので CW 複体のホモトピー型を持つ．

ハワイの耳飾り (例 2.23) は CW 複体のホモトピー型を持たない位相空間の例である．

定理 5.5. CW 複体の対 (X, A) に対し $(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ は $X\times I$ の変形レトラクトである．特に，CW 複体の対 (X, A) はホモトピー拡張性質を持つ．

証明. $(0,2)\in D^n\times\mathbb{R}$ からの射影

$$r : D^n\times I\to(D^n\times\{0\})\cup(\partial D^n\times I)$$

はレトラクションになる．$r_s = sr+(1-s)1$ は $D^n\times I$ から $(D^n\times\{0\})\cup(\partial D^n\times I)$ の上への変形レトラクトである．

$X^n\times I$ は $(X^n\times\{0\})\cup((X^{n-1}\cup A^n)\times I)$ に $D^n\times I$ を $(D^n\times\{0\})\cup(\partial D^n\times I)$ に沿って貼りつけて得られるので，$X^n\times I$ から $(X^n\times\{0\})\cup((X^{n-1}\cup A^n)\times I)$ の上への変形レトラクトが構成できた．区間 $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$ でこの変形をすれば，無限個のこのホモトピーのつなぎ合わせにより，$(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ は $X\times I$ の変形レトラクトである事がわかる．

時間 $[0, 1/2^{n+1}]$ では X^n 上変えないので，ホモトピーの $X^n\times I$ での連続性は明らかで，条件 (W) より，写像の連続性は，各骨格に制限した写像の連続性と同値であるので証明を終わる．□

5.2 胞体近似

(X, A) が n **連結** (n-connected) であるとは，任意の $i\le n$ について次の同値な条件をみたす時を言う．

1. 任意の $a\in A$ に対し $\pi_i(X, A, a) = 0$
2. 任意の写像 $f : (D^i, \partial D^i)\to(X, A)$ は写像 $(D^i, \partial D^i)\to A$ にホモトピック
3. 任意の写像 $f : (D^i, \partial D^i)\to(X, A)$ はある定値写像 $(D^i, \partial D^i)\to A$ にホモトピック
4. 任意の写像 $f : (D^i, \partial D^i)\to(X, A)$ は写像 $(D^i, \partial D^i)\to A$ に ∂D^i を法としてホモトピック

補題 5.6. Z を W に胞体 e^k を貼りつけて得られる空間とする．任意の写像 $f : I^i\to Z$ に対して，多面体 K と，$f^{-1}(W)$ を法としたホモトピー $f_t : I^i\to Z$ が存在して次を満たす．

- $f_1(K)\subset e^k$ で適当な e^k と $\mathbb{R}^k$ との同一視の下，$f|_K$ は PL 写像.
- e^k の空でない開集合 U が存在して $f^{-1}(U)\subset K$.

証明. e^k を $\mathbb{R}^k$ と同一視し D_1, D_2 を，それぞれ原点中心の半径 1, 2 の閉球ととする．コンパクト性を使った議論より次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\forall x, y \in f^{-1}(D_2) \qquad |x-y| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \tag{5.1}$$

I を分割して，誘導された I^n の分割が直径 ε 未満になるようにできる．$f^{-1}(D_1)$ に交わる立方体すべての和集合を K_1, K_1 に交わる立方体すべての和集合を K_2 とする．

$\varepsilon > 0$ を 2 つのコンパクト集合 $f^{-1}(D_1)$ と $I^n \setminus f^{-1}(\operatorname{Int} D_2)$ の距離の半分より小さく選んでおく．すると $K_2 \subset f^{-1}(D_2)$

$g : K_2 \to e^k$ を（適当に単体分割した後）各頂点では f と同じ値を持ち，各単体では線形な写像とする．$\varphi : K_2 \to [0,1]$ を K_1 の頂点では 1，他の頂点では 0 と定めて，各単体上には線形に拡張したものとする．$\varphi|_{K_1} = 1$, $\varphi|_{\partial K_2} = 0$ である．すると

$$f_t = (1 - t\varphi)f + t\varphi g : K_2 \to e^k$$

は $f_0 = f$ であり $f_1|_{K_1} = g|_{K_1}$, $f_t|_{\partial K_2}$ は t に依存しない．よって f_t を I^n に（$I^n \setminus K_2$ 上定ホモトピーとして）拡張できる．$I^n \setminus K_1$ の閉包の f_1 による像 C はコンパクトであり原点のある開集合 U とは交わらない．

$f_1|_{K_1} = g$ は区分的に線形．

$$f_1|_{I^n \setminus K_2} = f|_{I^n \setminus K_2}, \quad f(I^n \setminus K_1) \cap D_1 = \emptyset$$

K_2 に入るが K_1 に入らない単体 σ の f による像は (5.1) よりある開球 B_σ に入るが，開球の凸性より $g(\sigma) \subset B_\sigma$ であり $f_t(\sigma) \subset B_\sigma$ もわかる．$\sigma \not\subset K_1$ より $\sigma \not\subset f^{-1}(B_1)$ であり $B_\sigma \not\subset B_1$ がわかる．B_σ の半径は B_1 の半径の半分なので，$0 \notin B_\sigma$ であり $0 \notin f(\sigma)$. □

$f : (X, A) \to (Y, B)$ が**胞体写像** (cellular map) とは，各 n に対し $f(X^n) \subset Y^n$ を満たす写像を言う．

定理 5.7. CW 複体間の任意の写像 $f : X \to Y$ は胞体写像にホモトープである．

証明. $n-1$ 骨格 X^{n-1} 上では胞体写像であるとして，n 次元胞体 e^n 上胞体近似する．e^n の閉包はコンパクトなので，e^n の閉包の f による像もコンパクト．CW 複体のコンパクト集合は有限個の胞体とのみ交わるので $f(e^n)$ も有限個の胞体と交わる．e^k を Y の胞体で最高次元のものとする．f が胞体写像でないとすると $k > n$. $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$ を X^{n-1} 上変えずに，e^k のある点 p が f の像にならないよう変形する．

写像 $f : X^{n-1} \cup e^n \to Y^k$ を念頭に，$Z = Y^k$, $W = Y^k \setminus e^k$ として e^n の特性写像 $I^n \to X$ に補題 5.6 を適用すると，得られるホモトピーは ∂I^i を固定する．$n < k$ なら

全射線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ は存在しないので $f_1^{-1}(\Delta^k)$ は空集合であり，p を Δ^k の任意の点とすればよい．

$Y \setminus \{p\}$ から $Y \setminus e^k$ への変形レトラクトを合成して f は，$Y \setminus e^k$ への写像にホモトープである．このプロセスを有限回繰り返して $f(e^n)$ は n 以上の次元の胞体と交わらないようにできる． □

系 5.8. CW 複体間の任意の写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ は胞体写像にホモトープである．

証明. まず写像 $f : A \to B$ を胞体写像で近似する．次にこれを X 上の f のホモトピーに拡張する．更にこのホモトピーを A 上では変えないようにして胞体写像で近似すればよい． □

定理 5.9. $X \setminus A$ が n 次元以下の胞体を含まないなら，CW 複体 (X, A) は n 連結

証明. $i \leq n$ とし $f : (D^i, \partial D) \to (X, A)$ を胞体近似して得られる写像を f_1 とすると $f_1(D^i) \subset X^i$ なので，f は A への写像にホモトピックである． □

系 5.10. 特に (X, X^n) は n 連結であり，

$$\pi_i(X^n) \to \pi_i(X) \qquad \text{は } i = n \text{ のとき全射，} 0 < i < n \text{ のとき同型.}$$

証明. 次の完全列より明らか．

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_n(X^n) & \to & \pi_n(X) & \to & \pi_n(X, X^n) = 0 \\
\to & \pi_{n-1}(X^n) & \to & \pi_{n-1}(X) & \to & \pi_{n-1}(X, X^n) = 0 \\
\to & \cdots & & & & \\
\to & \pi_1(X^n) & \to & \pi_1(X) & \to & \pi_1(X, X^n) = 0 \\
\to & \pi_0(X^n) & \to & \pi_0(X) & &
\end{array}$$

□

例 5.11. $X = S^n$ の胞体分割 $X = e^n \cup e^0$ を取る．$X^i = e^0$ $(i < n)$. よって $\pi_i(S^n) = 0$ $(i < n)$ である．

定理 5.12 (Whitehead の定理). CW 複体の写像 $f : X \to Y$ が，ホモトピー群の同型を誘導するならば，f はホモトピー同値である．

証明. f の写像柱 $C_f = CA \sqcup X/(a, 0) \sim f(a)$ を考える．$f : X \to Y$ と $Y \subset C_f$ はホモトピー群の同型を誘導するので，対 (C_f, Y) の完全列を考えれば，すべての i に対して $\pi_i(C_f, Y) = 0$. よって C_f と Y はホモトピー同値． □

5.3 懸垂準同型

補題 5.13. $\mathbb{R}^n$ における複体 K_1, K_2 に対し

- $\dim K_1 + \dim K_2 < n$ ならば K_1, K_2 を微小に動かして交わらないように出来る．
- $\dim K_1 + \dim K_2 < n-1$ ならば K_1, K_2 はまつわらない．すなわち $\mathbb{R}^n$ のイソトピー（同型から成るホモトピー）で動かせば，ある $(n-1)$ 次元超平面で分離される．

証明. 最後の主張のみ示す．K_1 が一方の側にある超平面を取り，反対側に点 x をとる．x を頂点とする K_2 の錐を L とすると，$\dim K_1 + \dim L = \dim K_1 + \dim K_2 + 1 < n$ なので，微小に動かして L は K_1 と交わらないようにできる．そこで K_2 を L に沿って x の近傍まで引っ張ればよい．L の小近傍の外側ではイソトピーは定常的であるとしてよい． □

$f : X \to Y$, $f(*) = *$, に対し

$$f \times 1 : X \times I \to Y \times I$$

が定める写像 $Sf : SX \to SY$ を考える．これは懸垂準同型と呼ばれる．$f \times 1$ が写像を定めることは次を眺めればわかる．

$$SX = \frac{X \times I}{(X \times \partial I) \cup (* \times I)} \to SY = \frac{Y \times I}{(Y \times \partial I) \cup (* \times I)}$$

定理 5.14 (Freudenthal の懸垂定理 (球面版))**.** 懸垂準同型 $\pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$ は $i < 2n-1$ のとき同型，$i = 2n-1$ のとき全射．

例 5.15. Freudenthal の懸垂定理からわかる事を調べてみよう．

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1) \twoheadrightarrow \pi_2(S^2) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \pi_4(S^4) \simeq \cdots \simeq \pi_n(S^n) \simeq \cdots$$

例 4.13 より $\pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ である．

$$0 = \pi_2(S^1) \to \pi_3(S^2) \twoheadrightarrow \pi_4(S^3) \simeq \pi_5(S^4) \simeq \cdots \simeq \pi_{n+1}(S^n) \simeq \cdots$$

例 4.13 より $\pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ である．例 4.13 より $\pi_4(S^3) \simeq \pi_4(S^2)$ であるが，実はこの群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である事が知られている．

$$0 = \pi_3(S^1) \to \pi_4(S^2) \to \pi_5(S^3) \twoheadrightarrow \pi_6(S^4) \simeq \cdots \simeq \pi_{n+2}(S^n) \simeq \cdots$$

実は $\pi_4(S^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり，上の写像は $\pi_4(S^2)$ 以降同型である．

$$0 = \pi_4(S^1) \to \pi_5(S^2) \to \pi_6(S^3) \to \pi_7(S^4) \twoheadrightarrow \pi_8(S^5) \simeq \cdots \simeq \pi_{n+3}(S^n) \simeq \cdots$$

実は $\pi_5(S^2)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_6(S^3)=\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\pi_7(S^4)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\pi_8(S^5)=\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ である．

参考までに球面のホモトピー群 $\pi_{n+k}(S^n)$ の表を以下に示す．

k	0	1	2	3	4	5	6	7
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
S^2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$
S^3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
S^4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
S^5	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
S^6	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$
S^7	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$
S^8	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{120}$
S^9	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$

懸垂準同型の作る列

$$\pi_k(S^0)\to\pi_{k+1}(S^1)\to\cdots\to\pi_{2k+1}(S^{k+1})\twoheadrightarrow\pi_{2k+2}(S^{k+2})\simeq\pi_{2k+3}(S^{k+3})\simeq\cdots$$

は，定理 5.14 より十分先の方で同型となる．つまり $n\geq k+1$ のとき $\pi_{n+k}(S^n)\to\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ は同型．これを**球面の安定ホモトピー群**といい $\pi_k^S(S^0)$ で表す．定理 5.14 は次の定理の特別の場合である．

定理 5.16 (Freudenthal の懸垂定理)**.** CW 複体 X が，$n-1$ 連結であるとする．すなわち $\pi_i(X)=0$ $(i\leq n-1)$ とする．すると懸垂準同型 $\pi_i(X)\to\pi_{i+1}(SX)$ は $i<2n-1$ のとき同型で，$i=2n-1$ のとき全射である．

注意 5.17. Freudenthal の懸垂定理は更に次のように一般化される事が知られている．$n\geq 2$ とする．A を有限次元 CW 複体とし，X を $n-1$ 連結な位相空間とする．

$$S:[A,X]\to[SA,SX]$$

は $\dim A\leq 2n-2$ のとき全単射，$\dim A\leq 2n-1$ のとき全射．

定理 5.16 の証明. $C_-=X\times[0,1/2]/X\times\{0\}$, $C_+=X\times[1/2,1]/X\times\{1\}$ として $X=X\times\{1/2\}$ と見る．$C_\pm X$ は可縮なのでホモトピー群は自明である．よって，完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_i(X) & \to & \pi_i(C_+X) & \to & \pi_i(C_+X,X) \\
\to & \pi_{i-1}(X) & \to & \pi_{i-1}(C_+X) & \to & \pi_{i-1}(C_+X,X) \\
\to & \cdots & & & & \\
\to & \pi_1(X) & \to & \pi_1(C_+X) & \to & \pi_1(C_+X,X) \\
\to & \pi_0(X) & \to & \pi_0(C_+X) & &
\end{array}$$

より，$\pi_i(C_+X,X)\simeq\pi_{i-1}(X)$ であり，特に X が $n-1$ 連結なので，(C_+X,X) は n 連結である．また，完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & \pi_i(C_-X) & \to & \pi_i(SX) & \to & \pi_i(SX,C_-X) \\
\to & \pi_{i-1}(C_-X) & \to & \pi_{i-1}(SX) & \to & \pi_{i-1}(SX,C_-X) \\
\to & \dots & & & & \\
\to & \pi_1(C_-X) & \to & \pi_1(SX) & \to & \pi_1(SX,C_-X) \\
\to & \pi_0(C_-X) & \to & \pi_0(SX) & &
\end{array}$$

より，$\pi_i(SX)\simeq\pi_i(SX,C_-X)$. $SX=C_+X\cup_X C_-X$ なので

$$\pi_i(X)\simeq\pi_{i+1}(C_+X,X)\to\pi_{i+1}(SX,C_-X)\simeq\pi_{i+1}(SX)$$

の中央の写像は，次の定理より $i+1<2n$ のとき同型で $i+1=2n$ のとき全射． □

定理 5.18. CW 複体 X が部分複体 A, B の和集合で，共通部分 $C=A\cap B$ は空でない連結集合とする．(A,C) が m 連結，(B,C) が n 連結なら

$$\pi_i(A,C)\to\pi_i(X,B)$$

は $i<m+n$ のとき同型，$i=m+n$ のとき全射.

補題 5.19. CW 複体 X の中に $(m+1)$ 次元単体 Δ^{m+1} と $(n+1)$ 次元単体 Δ^{n+1} をとる．$i\le m+n$ として写像 $f:(I^i,\partial I^i,J^{i-1})\to X$ があり，

- $f^{-1}(\Delta^{m+1})$, $f^{-1}(\Delta^{n+1})$ が I^i の凸多面体の有限和であり，
- 各凸多面体への f の制限が全射線形写像である

とする． このとき，次を満たす $p_\alpha\in\Delta^{m+1}_\alpha$, $q\in\Delta^{n+1}$, $\varphi:I^{i-1}\to[0,1)$ が存在する．

- $f(s_1,\dots,s_i)=p_\alpha\Longrightarrow\varphi(i_1,\dots,i_{i-1})<s_i$
- $f(s_1,\dots,s_i)=q\Longrightarrow\varphi(i_1,\dots,i_{i-1})>s_i$
- ∂I^{i-1} 上 $\varphi=0$.

証明. $q\in\Delta^{n+1}$ に対し $f^{-1}(q)$ は次元 $i-n-1$ 以下の凸多面体の有限個の和集合. $p_\alpha\in\Delta^{m+1}_\alpha$ を次を満たすように取る.

- 射影 $\pi:I^i\to I^{i-1}$ に対し $\pi(f^{-1}(p_\alpha))\cap\pi(f^{-1}(q))=\emptyset$

$T=\pi^{-1}(\pi(f(q)))$ は線分 $\{x\}\times I$ で $f^{-1}(q)$ に交わるもの全体なので T は次元 $i-n$ 以下の凸多面体の有限個の和集合である．よって $f(T)\cap\Delta^{m+1}_\alpha$ も次元 $i-n$ 以下の凸多面体の有限個の和集合である．$m+1>i-n$ なので $\Delta^{m+1}_\alpha\setminus f(T)$ は空でなくこの集合の点 p_α を取ることができる．$f^{-1}(p_\alpha)\cap T=\emptyset$. $\pi(f^{-1}(q))$ の I^{i-1} のおける近傍ですべて

の $\pi(f^{-1}(p_\alpha))$ と交わらないものを取る．φ を選ぶには U に台を持つ関数 φ で $f^{-1}(q)$ がグラフの下側に来るようなものを取ればよい． □

定理 5.18 の証明. A は C に $m+1$ 次元胞体 e_α^{m+1} を貼りつけて得られ B は C に $n+1$ 次元胞体 e^{n+1} を貼りつけて得られる場合

$$X = C \cup \bigcup_\alpha e_\alpha^{m+1} \cup e^{n+1}, \qquad A = C \cup \bigcup_\alpha e_\alpha^{m+1}, \qquad B = C \cup e^{n+1}$$

全射性の証明:$\pi_i(X,B)$ の元を表す写像 $f : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \to (X, B, *)$ を考える．この像はコンパクトであり，有限個の胞体とのみ交わる．単体 $\Delta_\alpha^{m+1} \subset e_\alpha^{m+1}$, $\Delta^{n+1} \subset e^{n+1}$ で f による逆像が凸多面体の有限和であるようなものを取る．f は $\mathbb{R}^i$ の各凸多面体への制限が線形写像の制限であるとしてよい．Δ_α^{m+1}, Δ^{n+1} を全射でない線形写像の像の補集合から選ぶことにより，f は $\mathbb{R}^i$ の各凸多面体への制限が全射線形写像の制限であるとしてよい．

このとき，前補題の条件を満たす q, p_α, φ をとり，次のホモトピーを考える．

$$f_t(s_1, \ldots, s_i) = f(s_1 \ldots, s_{i-1}, s_i + (1 - s_i)t\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1})), \qquad 0 \le t \le 1$$

$Q = \{q\}$, $P = \{p_\alpha\}$ とおくと $f_1(I^i) \cap Q = \emptyset$, $f_t(I^{i-1}) \cap P = \emptyset$ が成り立つ．
$f_1(I^i) \cap Q = \emptyset$ の証明：$f_1(s_1, \ldots, s_i) = q$ ならば
$f(s_1 \ldots, s_{i-1}, s_i + (1 - s_i)\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1})) = q$ であり，
$\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}) > s_i + (1 - s_i)\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}))$ となり
$0 > s_i(1 - \varphi(s_1, \ldots, s_{i-1})) \ge 0$ で矛盾．
$f_t(I^{i-1}) \cap P = \emptyset$ の証明：$f_t(s_1, \ldots, s_i) = p_\alpha$ ならば
$f(s_1 \ldots, s_{i-1}, s_i + (1 - s_i)t\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1})) = p_\alpha$ であり，
$\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}) < s_i + (1 - s_i)t\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}))$ を得る．ここで $s_i = 0$ とすると
$\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}) < t\varphi(s_1, \ldots, s_{i-1}))$ なので $1 < t$ となり矛盾．

$$(A, C) \sim (X \setminus Q, X \setminus (P \cup Q)),$$
$$(X, B) \sim (X, X \setminus P)$$

$$\begin{CD} \pi_i(A,C) @>>> \pi_i(X,B) \\ @V{\simeq}VV @VV{\simeq}V \\ \pi_i(X \setminus Q, X \setminus (P \cup Q)) @>>> \pi_i(X, X \setminus P) \end{CD}$$

より右図の可換図式が存在する．
$[f] = [f_0]$ を右辺の元とすると，$[f_1]$ は左辺の元である．よって全射がわかった．

単射性の証明：$\pi_i(A,C)$ の元を表す写像 $f_0, f_1 : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \to (A, C, x_0)$ を考える．$\pi_i(X,B)$ への像が同じ元を表すとすれば f_0 と f_1 を結ぶホモトピー

$$F : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \times I \to (X, B, *)$$

が存在する．これは I^{i+1} の写像なのでこのホモトピーを ($i+1$ を前補題中の i として)

前補題の条件をみたすように近似しておき $F^{-1}(q)$ と $F^{-1}(p_\alpha)$ を分離するように φ を構成すれば，F は (A,C) へのホモトピーに変形することができる．

A は C に $m+1$ 次元胞体を幾つか貼りつけて得られ B は C に $n+1$ 以上の次元の胞体を幾つか貼りつけて得られる場合

$\pi_i(A,C) \to \pi_i(X,B)$ の全射性を示すには，$\pi_i(X,B)$ の任意の元を表す写像 $f:(I^i,\partial I^i,J^{i-1})$ をとる．その像はコンパクトなので前の議論の繰り返しで証明できる．単射性も同様．

A は C に $m+1$ 以上の次元の胞体を幾つか貼りつけて得られ B は C に $n+1$ 以上の次元の胞体を幾つか貼りつけて得られる場合

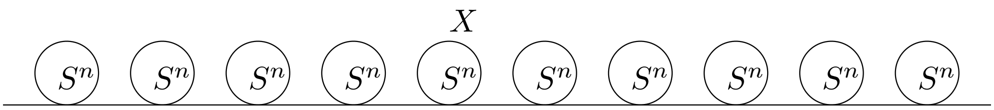
胞体近似定理より，$n+m+1$ 以上の次元の胞体は π_i $(i \leq m+n)$ に影響しない．$A_k = A^k \cup C$, $X_k = A_k \cup B$ とおいて次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(A_k,A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i(A_{k-1},C) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i(A_k,C) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i(A_k,A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{i-1}(A_{k-1},C) \arrow[d] \\
\pi_{i+1}(X_k,X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_i(X_{k-1},B) \arrow[r] & \pi_i(X_k,B) \arrow[r] & \pi_i(X_k,X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_{i-1}(X_{k-1},B)
\end{tikzcd}$$

□

例 5.20. $n \geq 2$ のとき $\pi_n(S^1 \vee S^n) = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ である．なぜなら，$\pi_1(S^1 \vee S^n) = \mathbb{Z}$ であり，$S^1 \vee S^n$ の普遍被覆 X を取ると，X は可算無限個の S^n の 1 点和にホモトピー同値であるので，次を得る．

$$\pi_n(S^1 \vee S^n) = \pi_n(X) = \pi_n(\vee_{\mathbb{Z}} S^n) = \oplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$$



6　コホモトピー集合 $[M,S^p]_*$

位相空間 X に対し，ホモトピー集合 $[X,S^p]_*$ を X の**コホモトピー集合**といい $\pi^p(X)$ で表す．$\pi^1(X)$ には可換群の構造が入り $\pi^p(SX)$ には群構造が入る．また $\pi_p(S^q) = [S^p,S^q]_* = \pi^q(S^p)$ である．この節では，M を多様体とするときコホモトピー集合 $[M,S^p]_*$ の計算をしよう．

6.1　$\dim M < p$ のとき

$m = \dim M < p$ のとき $[M,S^p]_* = *$ である．以下それを示そう．

定理 6.1. 滑らかな m 次元多様体 M から，球面 S^p への写像は $m < p$ ならば定値写像

にホモトピックである．

証明. 滑らかな m 次元多様体 M から，球面 S^p への連続写像をそれにホモトピックななめらかな写像で近似する．サードの定理より，その像に入らない点 $q \in S^p$ がある．$S^p \setminus \{q\} = \mathbb{R}^p$ は可縮なので $[M, S^p] = [M, *] = *$ となり，定理の主張が従う． □

系 6.2. $m < p$ ならば $\pi_m(S^p) = 0$

6.2 $\dim M \geq p$ のとき (トム=ポントリャーギン構成)

M を境界のない $m+p$ 次元多様体 N, N' をその境界のない n 次元部分多様体とする．N と N' が M の中で**コボルダント** (cobordant) とは $N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1-\varepsilon, 1)$ が $M \times I$ の中で境界付き多様体 X に拡張し

$$\partial X = N \times \{0\} \cup N' \times \{1\} = X \cap (M \times \partial I)$$

となる時を言う．X をコボルディズムという．

埋込 $N \subset M$ の枠とは，$T^{\perp}N$ の基底

$$v(x) = (v_1(x), \ldots, v_p(x))$$

のことを言う．多様体 M への枠付きの埋込 (N, v), (N', v') が**枠付きコボルダント** (framed cobordant) とは N と N' の間のコボルディズム X と $X \subset M \times I$ の枠 $V(x,t)$ $((x,t) \in X)$ が存在して，

$$v(x) = V(x,t) \ \ ((x,t) \in N \times [0, \varepsilon)), \quad v'(x) = V(x,t) \ \ ((x,t) \in N' \times (1-\varepsilon, 1])$$

となる時を言う．

なめらかな写像 $f : M \to S^p$ で，$y \in S^p$ を正則値に持つものを考える．T_pS^p の向き付けられた基底 $v = (v_1, \ldots, v_p)$ を取る．$x \in f^{-1}(y)$ に対し $df_x : T_x f^{-1}(y) \to T_yS^p$ は同型 $T_x^{\perp} f^{-1}(y) \to T_yS^p$ を定めるので v の f による引き戻し f^*v で $T^{\perp}N$ の枠を定めることができる．

定理 6.3. コンパクト多様体 M 内の任意の余次元 p の枠付き部分多様体 (N, v) (v は $T^{\perp}N$ の枠) は上の構成で得られる．

証明. 境界のないコンパクト多様体 M の境界のない枠付き部分多様体 (N, v) をとると，N の開近傍 V への微分同相写像

$$g : N \times \mathbb{R}^p \to V \subset M$$

が定義される．$\pi : V \to \mathbb{R}^p$ を $\pi(g(x,y)) = y$ で定めると 0 は正則値で $\pi^{-1}(0) = N$. 写像 $\varphi : \mathbb{R}^p \to S^p$ を，原点中心の単位開球外の点を基点 $*$ に写し，開単位球を基点以外に微分同相で写すとする．

$$f : M \to S^p, \qquad x \mapsto \begin{cases} \varphi(\pi(x)) & x \in V \\ * & x \notin V \end{cases}$$

とおくと，f は滑らかで，$\varphi(0)$ は f の正則値で，$N = f^{-1}(\varphi(0)) = \pi^{-1}(0)$ の枠をも S^p の $\varphi(0)$ の法ベクトルから誘導される． □

定理 6.4. コンパクト多様体 M 上のなめらかな写像 $f : M \to S^p$ をとり，$y, y' \in S^p$ を f の正則値とする．v, v' を向き付けられた T_yS^p の基底とすると，$(f^{-1}(y), f^*v)$ と $(f^{-1}(y'), f^*v')$ は枠付きコボルダント．

証明. 次の 2 補題を用いれば良い． □

補題 6.5. コンパクト多様体 M 上のなめらかな写像 $f : M \to S^p$ をとり，$y \in S^p$ を f の正則値とする．

1. v, v' を向き付けられた T_yS^p の基底とすると，$(f^{-1}(y), f^*v)$ と $(f^{-1}(y), f^*v')$ は枠付きコボルダント．
2. z を y の近くの正則値とすると $(f^{-1}(y), f^*v)$ と $(f^{-1}(z), f^*v)$ は枠付きコボルダント．

証明. 1. 行列式が正の行列の空間 $\mathrm{Map}^+(p, \mathbb{R})$ は連結なのでこれは可能．
2. f の臨界値集合はコンパクトなので，y 中心の ε 開球で f の正則値のみを含むものをとれる．

$$R : S^p \times I \to S^p$$

- $R(x,t) = x$ $(t \in [0, \varepsilon'])$
- $R(x,t) = r_1(x)$ $(t \in [1-\varepsilon', 1])$, $r_1(y) = z$
- $R(y,t)$ は y と z を結ぶ大円弧上にある．（特に f の正則値）

ホモトピー

$$F : M \times I \to S^p, \quad (x,t) \mapsto R(f(x), t)$$

は z を正則値として持つ．よって $V = F^{-1}(z)$ が求める枠付きコボルディズムを与える． □

補題 6.6. $f, g : M \to S^p$ がホモトピックで y を f, g の正則値とする．$(f^{-1}(y), f^*v)$ と $(g^{-1}(y), g^*v)$ は枠付きコボルダント．

証明．ホモトピー $F: M\times I \to S^p$ を，次を満たすように取る．

$$F(x,t)=f(x)\ (t\in[0,\varepsilon)) \qquad F(x,t)=g(x)\ (t\in(1-\varepsilon,1])$$

F の正則値 z を y の近くに取る．$V=F^{-1}(z)$ が $f^{-1}(z)$ と $g^{-1}z$ の間の枠付きコボルディズムを与えるので，前補題より証明が終わる． □

補題 6.7. コンパクト多様体 M の余次元 p の枠付き部分多様体 (N,v) をとる．すると N の近傍で $N\times\mathbb{R}^p$ と微分同相なものが存在する．

証明．まず $M=\mathbb{R}^{m+p}$ として証明する．

$$g: N\times\mathbb{R}^p, \quad (x,t_1,\dots,t_p)\mapsto x+t_1v_1(x)+\cdots+t_pv_p(x)$$

は $N\times\{0\}$ 上埋込であるので，コンパクト性よりある開円板 D が存在して，g の $N\times D$ への制限は埋込写像．D は $\mathbb{R}^n$ と同一視できるので定理の主張が従う．

一般の M については，直線の代わりに測地線を用いて定まる

$$\exp: N\times\mathbb{R}^n=T^{\perp}N\to M$$

を用いて計算すればよい． □

定理 6.8. $f,f': M\to S^p$ がホモトピックであることと $(f^{-1}(y),f^*v)$ と $({f'}^{-1}(y'),f^*v')$ は枠付きコボルダントである事は同値である．但し y, y' はそれぞれ f, f' の正則値．

まとめるとコンパクト多様体 M について次の対応を得た．

$[M^{n+p},S^p]$ $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ M の余次元 p の枠付きのコンパクト部分多様体の枠付きコボルディズム類の集合

$M=S^{n+p}$ とすると，S^{n+p} を $\mathbb{R}^{n+p}$ の一点コンパクト化とみて，無限遠点を基点と考えれば次を得る．

$\pi_{n+p}(S^p)$ $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ $\mathbf{R}^{n+p}$ の余次元 p の枠付きのコンパクト部分多様体の枠付きコボルディズム類の集合

6.3 $\dim M=p$ のとき (Hopf の定理)

$\dim M=p$ のとき，向き付けられたコンパクト連結多様体 M の余次元 p の枠付きコンパクト部分多様体とは，各点に基底を定めた有限個の集合に他ならない．M の向きと両立するか否かでその点 x での符号数 $\mathrm{sgn}(x)$ を $+1$ 又は -1 と定めると，写像 $M\to S^n$ の正則値 y に対し $\sum_{f(x)=y}\mathrm{sgn}(x)$ は，写像 $M\to S^n$ の写像度に等しい．

0 次元多様体の枠付きコボルディズム類は $\sum\mathrm{sgn}(x)$ で定まる事を示すのは難しくない．

定理 6.9. $\dim M = p$ のとき向きづけられた M から S^p への写像のホモトピー類はその写像度で定まる．特に

$$[M, S^p]_* = \mathbb{Z}, \qquad M = S^p \text{ として } \pi_p(S^p) = \mathbb{Z}.$$

定理 6.10. $\dim M = p$ のとき向きづけ不可能な M から S^p への写像のホモトピー類はその法 2 写像度で定まる．特に

$$[M, S^p]_* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

謝辞

最後に，本稿を準備するにあたり参考にした書物を掲げて謝意を表する．

- J. Milnor, Topology from the differential viewpoint, University Press of Virginia, 1965.
- A. T. Fomenko, D. B. Fuchs, and V. L. Gutenmacher, Homotopic topology, (translated by K. Malyusz, Akademiai Kiado (Budapest) 1986).
- G. Bredon, Topology and Geometry, GTM 139, Springer-Verlag 1993.
- A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.

索引