

# 幾何学演習解説

## 1 陰関数定理と逆写像定理 (2011年5月11日)

演習 1.1.  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  の開集合とする。  $C^\infty$  写像

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

について逆関数の定理を述べよ。

解説 1.1. Wikipedia の Inverse function theorem の項より抜粋。

For functions of a single variable, the theorem states that, if  $f$  is a continuously differentiable function and  $f$  has a nonzero derivative at  $a$ , then  $f$  is invertible in a neighborhood of  $a$ , the inverse is continuously differentiable, and

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

where  $b = f(a)$ .

For functions of more than one variable, the theorem states that if the total derivative of a continuously differentiable function  $F$  defined from an open set  $U$  of  $\mathbf{R}^n$  into  $\mathbf{R}^n$  is invertible at a point  $p$  (i.e., the Jacobian determinant of  $F$  at  $p$  is non-zero), then  $F$  is an invertible function near  $p$ . That is, an inverse function to  $F$  exists in some neighborhood of  $F(p)$ . Moreover, the inverse function  $F^{-1}$  is also continuously differentiable. Finally, the theorem says that

$$J_{F^{-1}}(F(p)) = [J_F(p)]^{-1}$$

where  $[\cdot]^{-1}$  denotes matrix inverse and  $J_G(q)$  is the Jacobian matrix of the function  $G$  at the point  $q$ .

演習 1.2.  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  の開集合とする。  $C^\infty$  写像

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}^p, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)),$$

(ただし  $n > p$ ) について、陰関数の定理を述べよ。

解説 1.2. まずは Wikipedia の Implicit function theorem の項より抜粋。

Let  $f : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}^m$  be a continuously differentiable function, and let  $\mathbf{R}^{n+m}$  have coordinates  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (x, y)$ . Fix a point  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = (a, b)$  with  $f(a, b) = c$ , where  $c \in \mathbf{R}^m$ . If the matrix  $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b))$  is invertible, then there exists

an open set  $U$  containing  $a$ , an open set  $V$  containing  $b$ , and a unique continuously differentiable function  $g : U \rightarrow V$  such that

$$\{(x, g(x)) \mid x \in U\} = \{(x, y) \in U \times V \mid f(x, y) = c\}.$$

The partial derivatives of  $g$  is given by

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, g(x)).$$

$n$  個の変数  $x_1, \dots, x_n$  に  $p$  個の関係式

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

があった場合  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)} \neq 0$  とすれば、 $x_1, \dots, x_n$  は独立ではなく、 $x_1, \dots, x_p$  は局所的に  $x_{p+1}, \dots, x_n$  の関数と見做せる。このことを保証するのが陰関数定理である。すなわち考えている点の近傍で定義された関数  $g_1(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, g_p(x_{p+1}, \dots, x_n)$  が存在して

$$\begin{aligned} f_1(g_1(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, g_p(x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_p(g_1(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, g_p(x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

が考えている点の近傍で成立する。実は  $g_1, \dots, g_p$  は微分可能である。微分可能性を仮定して、その導関数を求めてみよう、 $x' = (x_{p+1}, \dots, x_n)$ ,  $g(x') = (g_1(x'), \dots, g_p(x'))$  と書く。上の式を  $x_j$  ( $j = p+1, \dots, n$ ) で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g(x'), x') \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x') + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(g(x'), x') \frac{\partial g_p}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(g(x'), x') &= 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(g(x'), x') \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x') + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(g(x'), x') \frac{\partial g_p}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(g(x'), x') &= 0 \end{aligned}$$

これを次のように省略して書く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \frac{\partial g_p}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} &= 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \frac{\partial g_p}{\partial x_j} + \frac{\partial f_p}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (j = p+1, \dots, n)$$

書き換えると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

となり、次を得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**演習 1.3.**  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  の原点近傍とする。  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$  が  $f(0) = 0$  を満たし、点  $0 \in U$  ではめ込みであれば、  $n \leq p$  であり、  $f(0) = 0$  の近傍での座標変換  $(y_1, \dots, y_p) \mapsto \Phi(y_1, \dots, y_p)$  が存在して、  $x$  のある近傍上で次を満たすようにできる。  
 $\Phi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

**解説 1.3.**  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(0) \neq 0$  としてよい。すると写像  $F : U \times \mathbf{R}^{p-n} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,

$$(x, x') \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x), x_{n+1} + f_{n+1}(x), \dots, x_p + f_p(x)),$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x' = (x_{n+1}, \dots, x_p)$  に逆写像定理が適用できて、  $\Phi : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$  で  $\Phi \circ F(x, x') = (x, x')$  を満たすものが存在する。これより

$$\Phi(f_1(x), \dots, f_n(x), x_{n+1} + f_{n+1}(x), x_p + f_p(x)) = (x, x')$$

であるが、  $x' = 0$  とおくと結果を得る。

**演習 1.4.**  $U$  を  $\mathbf{R}^n$  の原点近傍とする。  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$  が  $f(0) = 0$  を満たし、点  $0 \in U$  で沈め込みであれば、  $n \geq p$  であり、  $f(x)$  の近傍での座標変換  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, \dots, x_n)$  が存在して、  $x$  のある近傍上で次を満たすようにできる。  $f \circ \Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$

**解説 1.4.**  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(0) \neq 0$  としてよい。すると写像  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n),$$

に逆写像定理が適用できて、  $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  で  $F \circ \Phi(x) = x$  を満たすものが存在する。これの最初の  $p$  個の成分を見れば結果を得る。

**演習 1.5.** 次の関数について、臨界点と臨界値を求めよ。

1.  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$
2.  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$
3.  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$

**解説 1.5.** 1. 3. 省略 (易しい)

2.  $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ , それぞれ  $0, -1$

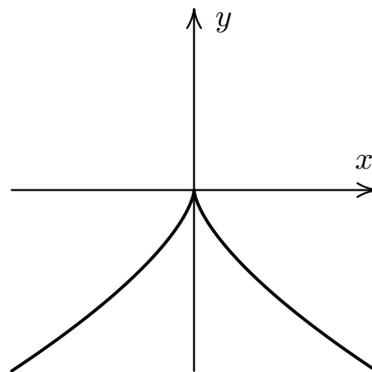
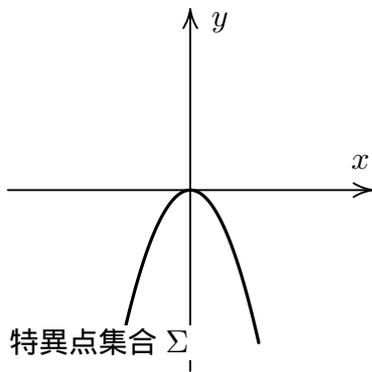
等高線やグラフを書く事は理解に役立つので是非やっておいてください。

**演習 1.6.** 次の写像について、特異点とその  $f$  による像を求めよ。

1.  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$
2.  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$
3.  $f_t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2tx, 2xy - 2ty)$

特異点集合を  $\Sigma$  としたとき  $f|_{\Sigma}$  の特異点集合とその像も調べるとよい。

解説 1.6. 1.  $Jf = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  なので、特異点集合は  $3x^2 + y = 0$  で定義される。  
 $f|_{\Sigma}$  の臨界点を求めるため  $f(x, -3x^2) = (-2x^3, -2x^2)$  を  $x$  で微分すると  $(-6x^2, -4x)$  である。  
 $(0, 0)$  が  $f|_{\Sigma}$  の臨界点である。



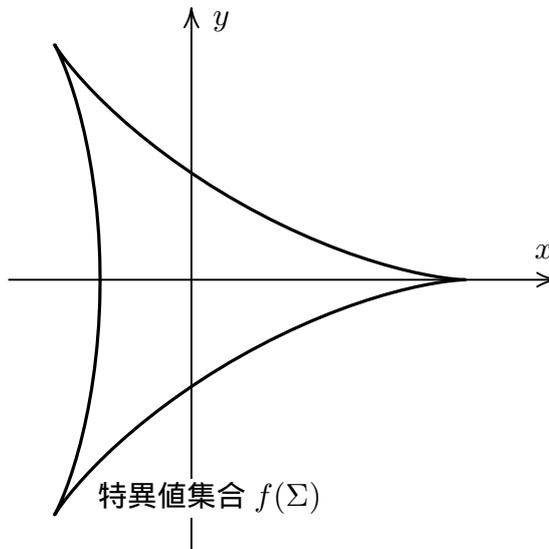
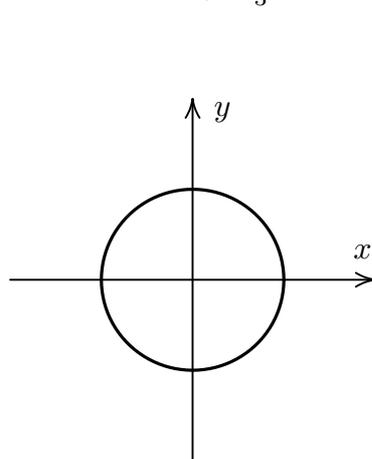
3.  $Jf = \begin{pmatrix} 2x + 2t & -2y \\ 2y & 2x - 2t \end{pmatrix}$  なので、特異点集合は  $x^2 + y^2 = t^2$  で定義される。

$$f(t \cos \theta, t \sin \theta) = t^2(\cos 2\theta + 2 \cos \theta, \sin 2\theta - 2 \sin \theta)$$

を  $\theta$  で微分すると

$$2t^2(-\sin 2\theta - \sin \theta, \cos 2\theta - \cos \theta)$$

となり、 $\theta = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$  でこの行列のランクが落ちる。



## 2 球面 (2011 年 5 月 18 日)

解説 2.1. なし。

解説 2.2.  $\vec{NP} = t\vec{NQ}$  となる実数  $t$  があるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。  $1 = x^2 + y^2 + z^2 = (tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = t^2(u^2 + v^2 + 1) - 2t + 1$  より  $t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} = 1 - z$  となり次の関係を得る。

$$u = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}$$

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

$\varphi_+$  のヤコビ行列を計算すると

$$J\varphi_+ = \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & -2uv \\ -2uv & 1 + u^2 - v^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

この行列は常にフルランクである。第 1 基本形式を計算すると

$$ds^2 = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

となり、等温座標であることがわかる。

解説 2.3. 写像  $\varphi_-$  は各点ではめ込みであり写像  $\varphi_-$  の像は  $S^2$  の南極  $S$  を除いた部分である。対応  $(u, v) \mapsto (u'v')$  は、写像  $\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+^{-1}$  を (定義されている点で) 定めていると考えられる。  $S = (0, 0, -1)$  を南極とし、直線  $SP$  と、平面  $z = 0$  との交点  $Q'$  の座標を  $(u', v', 0)$  とする。  $P \neq S$  のとき  $Q'$  が定まる。このとき  $\vec{SP} = t\vec{SQ'}$  となる実数  $t$  があるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。  $1 = x^2 + y^2 + z^2 = (tu')^2 + (tv')^2 + (t-1)^2 = t^2((u')^2 + (v')^2 + 1) - 2t + 1$  より  $t = \frac{2}{(u')^2 + (v')^2 + 1} = z + 1$  となり次の関係を得る。

$$u' = \frac{x}{1+z}, \quad v' = \frac{y}{1+z}$$

$$x = \frac{2u'}{(u')^2 + (v')^2 + 1}, \quad y = \frac{2v'}{(u')^2 + (v')^2 + 1}, \quad z = \frac{1 - (u')^2 - (v')^2}{(u')^2 + (v')^2 + 1}$$

第 1 基本形式を計算すると

$$ds^2 = \frac{4}{((u')^2 + (v')^2 + 1)^2} ((du')^2 + (dv')^2)$$

となり、等温座標であることがわかる。

$$u' = \frac{x}{1+z} = \frac{2u/(u^2+v^2+1)}{1+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}} = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$v' = \frac{y}{1+z} = \frac{2v/(u^2+v^2+1)}{1+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}} = \frac{v}{u^2+v^2}$$

よって

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = \det \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} -u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2}$$

特に  $u' - \sqrt{-1}v' = \frac{1}{u+v\sqrt{-1}}$  なので  $z = u + v\sqrt{-1}$ ,  $w = u' - v'\sqrt{-1}$  とおけば、最後の主張も分る。

解説 2.4. 原点  $O$  を中心とする単位球面上の点を  $P$  とする。平面  $z = 1$  との交点  $Q$  の座標を  $(u, v, 1)$  とする。このとき  $\vec{OP} = t\vec{OQ}$  となる実数  $t$  があるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。  $1 = x^2 + y^2 + z^2 = (tu)^2 + (tv)^2 + t^2 = t^2(u^2 + v^2 + 1)$  より  $t = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$  となり、次の関係式を得る。

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}, \quad x = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$

ヤコビ行列を計算すると

$$J\phi = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \\ -u & -v \end{pmatrix}$$

となり、これはフルランクであることも確認できる。第 1 基本形式を計算すると

$$ds^2 = \frac{1}{u^2+v^2+1} ((1+v^2)du^2 - 2uvdu dv + (1+u^2)dv^2)$$

となり、 $(u, v) = (0, 0)$  以外では等角性もなく、 $EG - F^2 = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$  なので、面積も保たない。

これを地図作成に利用したのが心射方位図法で、すべての大円を直線に投影する図法である。それゆえに、実際の 2 地点間の最短経路は、地図上でも最短距離になる。

### 3 球面とトーラス (2011 年 5 月 25 日)

解説 3.1.  $f \circ \varphi_+(u, v) = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$  であり、勾配  $((f \circ \varphi_+)_u, (f \circ \varphi_+)_v)$  は

$$\frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(u, v)$$

である。 $(u, v) = (0, 0)$  が臨界点でその時の臨界値は  $-1$ . その点でのヘッセ行列は

$$\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^3} \begin{pmatrix} 1 - 3u^2 + v^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + u^2 - 3v^2 \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)=(0,0)} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f \circ \varphi_-$  は上の計算で符号を変えればよい。

解説 3.2.  $f \circ \varphi_+(u, v) = \frac{2}{u^2+v^2+1}(u, v)$  なので、このヤコビ行列式は、

$$\det \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 - u^2 - v^2 & -2uv \\ -2uv & 1 + u^2 - v^2 \end{pmatrix} = 4 \frac{u^2 + v^2 - 1}{(u^2 + v^2 + 1)^3}$$

特異点集合は  $u^2 + v^2 = 1$  で定義され、その像は  $x^2 + y^2 = 1$  で決まる円。 $f \circ \varphi_-$  の計算も同様。

解説 3.3.  $\varphi$  が各点ではめ込みであることは、 $\varphi$  のヤコビ行列が次の形なので明らか。

$$J\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v & (2 + \cos u) \cos v \\ -\sin u \cos v & -(2 + \cos u) \sin v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

第一基本形式は次の様になる。

$$I = du^2 + (2 + \cos u)^2 dv^2$$

単位法ベクトルは  $\mathbf{n} = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u)$  で与えられるので、第二基本形式は

$$II = -du^2 - (2 + \cos u) \cos u dv^2$$

となり、 $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  が主方向、主曲率は  $-1, -\frac{\cos u}{2 + \cos u}$  で、ガウス曲率はこの積となる。

解説 3.4.  $f \circ \varphi(u, v) = (2 + \cos u) \sin v$  なので、その勾配は

$$((f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_v) = (-\sin u \sin v, (2 + \cos u) \cos v)$$

である。よって次を得る。

臨界点 $(u, v)$	$(0, -\frac{\pi}{2})$	$(\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$(0, \frac{\pi}{2})$
$\varphi(u, v)$	$(-3, 0, 0)$	$(-1, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(3, 0, 0)$
臨界値	$-3$	$-1$	$1$	$3$
ヘッセ行列	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

解説 3.5.  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$  なので、 $x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 2^2 + z^2 = 1$  を得る。よって  $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 4\sqrt{x^2 + y^2}$  であり  $X$  の方程式として次を得る。

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$$

よって  $g = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$  と置けばよい。

$$g_y = 4y(x^2 + y^2 + z^2 - 5), \quad g_z = 4z(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$$

より最後の主張も分る。

### 3.1 トーラスから平面への写像

解説 3.6.  $f_t \circ \varphi(u, v) = ((2 + \cos u) \sin v, t(2 + \cos u) \cos v + \sin u)$  より、ヤコビ行列式を求めると、

$$\det \begin{pmatrix} -\sin u \sin v & (2 + \cos u) \cos v \\ \cos u - t \cos v \sin u & -t(2 + \cos u) \sin v \end{pmatrix} = -(2 + \cos u)(\cos u \cos v - t \sin u)$$

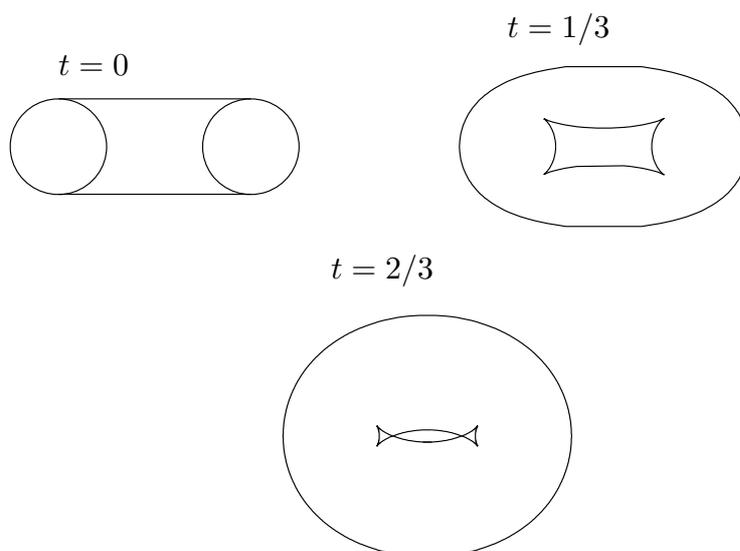
なので、 $\Sigma = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid t \tan u = \cos v\}$  である。 $f_t \circ \varphi|_{\Sigma}$  の特異点集合は、

$$u \mapsto (\pm(2 + \cos u)\sqrt{1 - t^2 \tan^2 u}, (2 + \cos u)t^2 \tan u + \sin u)$$

の特異点集合である。この写像のヤコビ行列は

$$\left( -\frac{(2t^2 + (1 + t^2) \cos^3 u) \sin u}{(\cos^3 u \sqrt{1 - t^2 \tan^2 u})}, \frac{2t^2 + (1 + t^2) \cos^3 u}{\cos^2 u} \right)$$

なので、 $2t^3 + (1 + t^2) \cos^3 u = 0$  となる  $u$  が  $f_t \circ \varphi|_{\Sigma}$  の特異点である。このとき  $\cos^3 u = -\frac{2t^3}{1+t^2}$  であり、 $f_t \circ \varphi|_{\Sigma}$  の特異点の像は4点からなる。







## 5 ブローアップ (2011 年 6 月 15 日)

解説 5.1. 図を見て考えよ。

解説 5.2.  $(u, v)$  平面と  $(u', v')$  平面の貼り合わせを見ればよい。 $(x, y) = (u, uv) = (u'v', v')$  を用いる。

解説 5.3. 1.  $[\xi : \eta] = [\xi' : \eta']$  のとき  $\varphi_t([\xi : \eta]) = \varphi_t([\xi' : \eta'])$  を言えばよい。

2.  $t \neq 0$  のとき、 $[\xi : \eta] = [1 : 0]$  の  $\varphi_t$  による像が交点。

解説 5.4. 1.  $[\xi : \eta] = [\xi' : \eta']$  のとき  $\varphi_t([\xi : \eta]) = \varphi_t([\xi' : \eta'])$  を言えばよい。

2.  $t \neq 0$  のとき、 $[\xi : \eta] = [1 : 0]$  の  $\varphi_t$  による像  $P$  が交点。

3.  $M$  の座標として  $(u, v)$  を取る。 $u = u_1 + \sqrt{-1}u_2, v = v_1 + \sqrt{-1}v_2$  ( $u_1, u_2, v_1, v_2$  は実数) とおくと、 $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}$  が  $T_P M$  の向き付けられた基底で、 $\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}$  が  $T_P E$  の向き付けられた基底。になっている。 $y = \eta/\xi$  とおくと  $\varphi_t$  は

$$y \mapsto \left( \frac{t\bar{y}}{1 + |y|^2}, y \right)$$

で表されるので、 $y = y_1 + y_2\sqrt{-1}$  ( $y_1, y_2$  は実数) と表すと  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$  が  $P^1(\mathbb{C})$  の向き付けられた基底で

$$d\varphi_{t[1:0]} \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad d\varphi_{t[1:0]} \frac{\partial}{\partial y_2} = -\frac{\partial}{\partial u_2}$$

なので、交点数は  $-1$ 。

$$\begin{pmatrix} d\varphi_{t[1:0]} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ d\varphi_{t[1:0]} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial v_1} \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial v_1} \\ \frac{\partial}{\partial v_2} \end{pmatrix}$$

解説 5.5.  $\phi_t$  は 2 対 1 の写像である。

2.  $f \circ \phi_t(r, \theta) = r \cos \theta + t \cos 2\theta$  の勾配は  $(\cos \theta, -r \sin \theta - 2t \sin 2\theta)$  なので  $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$  特異点に対応する。ヘッセ行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -r \sin \theta - 4t \sin \theta \end{pmatrix} \Big|_{(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4t \end{pmatrix}$$

なので指数は 1。

3.  $\pi_t \circ \phi_t(r, \theta) = (r \cos \theta + t \cos 2\theta, r \sin \theta - t \sin 2\theta)$  のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta - 2t \sin 2\theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 2t \cos 2\theta \end{vmatrix} = r - 2t \cos 3\theta$$

なので特異点集合  $\Sigma$  は  $r = 2t \cos 3\theta$  で定義される。

$$\pi_t \circ \phi_t(2t \sin 3\theta, \theta) = t(\cos \theta \sin 3\theta + \cos 2\theta, \sin \theta \sin 3\theta - \sin 2\theta)$$

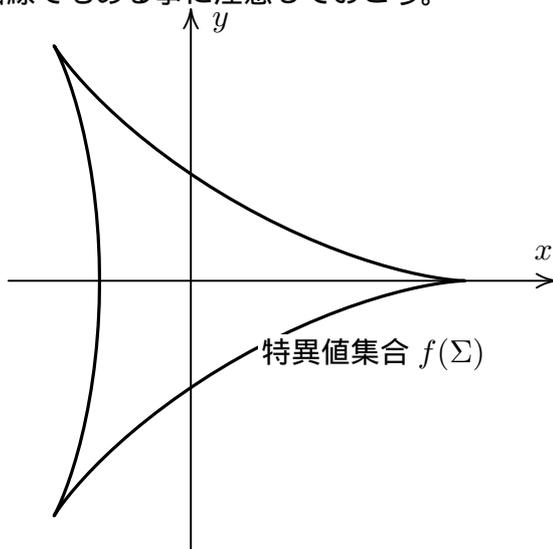
を  $\theta$  で微分すると

$$-4t(\sin 2\theta + \sin 4\theta, 2(1 + 2 \cos 2\theta) \sin^2 \theta)$$

なので  $\theta = \frac{n}{3}\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) が  $\pi_t \circ \phi_t|_{\Sigma}$  の特異点。この写像の特異点集合の像を図に示す。  
これは直線族

$$x \sin \theta - y \cos \theta = t \sin 3\theta$$

の包絡線でもある事に注意しておこう。



## 6 行列の群 (1) (2011 年 6 月 22 日)

### 6.1 行列の群の例

解説 6.1. 有界閉集合のものをリストアップすればよい。  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ .

### 6.2 行列の指数関数

解説 6.2. ノルムについては次が成り立つ。

- $\|aX\| = |a|\|X\|$ ,  $a \in K$ .
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$

実際、  $X = (x_{i,j})$ ,  $Y = (y_{i,j})$  とすると

$$\begin{aligned}\|aX\|^2 &= \sum_{i,j} |ax_{i,j}|^2 = |a|^2 \sum_{i,j} |x_{i,j}|^2 = |a|\|X\| \\ \|X + Y\|^2 &= \sum_{i,j} |x_{i,j} + y_{i,j}|^2 \leq \sum_{i,j} (|x_{i,j}| + |y_{i,j}|)^2 = \sum_{i,j} (|x_{i,j}|^2 + 2|x_{i,j}||y_{i,j}| + |y_{i,j}|^2) \\ &\leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ \|XY\|^2 &= \sum_{i,j} \left| \sum_k x_{i,k} y_{k,j} \right|^2 \leq \sum_{i,j} \left( \sum_k |x_{i,k}|^2 \sum_l |y_{l,j}|^2 \right) \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \sum_{i,k} |x_{i,k}|^2 \sum_{l,j} |y_{l,j}|^2 = \|X\|\|Y\|\end{aligned}$$

解説 6.3. 行列の級数の収束が気になる人は、次の事実に注意しておけば安心であろう。

$S_n = \sum_{k=0}^n A_k X^k$ ,  $s_n = \sum_{k=0}^n \|A_k\| \|X\|^k$  とすると  $\{s_n\}$  が収束すれば  $\{S_n\}$  も収束する。なぜなら  $m < n$  のとき

$$\|S_n - S_m\| \leq \left\| \sum_{k=m+1}^n A_k X^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|A_k\| \|X\|^k = |s_n - s_m|$$

となり、 $\{s_n\}$  の収束性から  $\{S_n\}$  の収束性がわかる。

冪級数については、収束円内での項別微分や項別積分は無論問題ない。

解説 6.4. 1, 4, 5, は自明。2.  $XY = YX$  なら 2 項定理が成り立つので、証明できる。

3.  $\exp X \exp(-X) = \exp(X + (-X)) = \exp O_n = I_n$  より、3 が従う。

6.  $X$  の固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とすると、正則行列  $A$  が存在し

$$X = A\Lambda A^{-1} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \det(\exp X) &= \det(\exp(A\Lambda A^{-1})) = \det(A \exp(\Lambda) A^{-1}) = \det(\exp(\Lambda)) \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \exp(\text{trace } X) \end{aligned}$$

7. も明らかであろう。

8.  $(\exp tX)(\exp tY) = \exp Z$ ,  $Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Z_k$ , とおいて  $Z_k$  を順次決定していく。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp Z|_{t=0} &= Z' \exp Z|_{t=0} = Z_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} \exp Z|_{t=0} &= [(Z'' + Z'^2) \exp Z]|_{t=0} = Z_2 + Z_1^2 \\ \frac{d^3}{dt^3} \exp Z|_{t=0} &= [(Z^{(3)} + 2Z''Z' + Z'Z'' + Z'^2Z) \exp Z]|_{t=0} = Z_3 + 2Z_2Z_1^2 + Z_1Z_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

であるから  $\exp(tX) \exp(tY)$  の  $k$  階までの微分係数を求めれば  $Z_k$  が求まる。

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) \exp(tY)|_{t=0} = \exp(tX)X \exp(tY) + \exp(tX)Y \exp(tY) = X + Y$$

より  $Z_1 = X + Y$  である。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \exp(tX) \exp(tY)|_{t=0} &= [\exp(tX)X^2 \exp(tY) + \exp(tX)XY \exp(tY) \\ &\quad + \exp(tX)XY \exp(tY) + \exp(tX)Y^2 \exp(tY)]|_{t=0} \\ &= X^2 + 2XY + Y^2 \end{aligned}$$

より  $Z_2 + Z_1^2 = X^2 + 2XY + Y^2$  なので  $Z_2 = [X, Y]$  がわかる。

9. は次のように示す。

$$\log(I_n + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}X^k + \dots$$

と置くと、 $\|X\| < 1$  の時これは収束する。次の事実より、微分可能写像写像  $\exp : \mathfrak{u} \rightarrow U$ ,  $X \mapsto \exp X$ , と  $\log : U \rightarrow \mathfrak{u}$ ,  $X \mapsto \log X$ , は互いに逆写像である。

- $\|X - I_n\| < 1$  ならば  $\exp(\log X) = X$ .
- $\|\exp X - I_n\| \in U$  ならば  $\log(\exp X) = X$ .

## 7 行列の群 (2) (2011 年 6 月 29 日)

### 7.1 $G$ と $\mathfrak{g}$

### 7.2 直交群の性質

解説 7.1. 1.  $\langle Ax, Ay \rangle = {}^t(Ax)Ay = {}^tx({}^tAA)y = {}^txy = \langle x, y \rangle$

2.  $\langle Ax, Ay \rangle = {}^t(Ax)I_{p,q}Ay = {}^tx({}^tAI_{p,q}A)y = {}^txI_{p,q}y = \langle x, y \rangle$

解説 7.2. 1.  $O(n)$  の定義式は次で与えられる。

$$x_{i,1}x_{j,1} + \cdots + x_{i,n}x_{j,n} = \delta_{i,j}$$

$n = 3$  として定義式のヤコビ行列を書いてみると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

この行列の階数が落ちるのは  $\det X = 0$  の時のみである。

$p = n, q = 0$  のときはローレンツ群  $O(p, q)$  は直交群  $O(n)$  である。一般に、ローレンツ群  $O(p, q)$  が  $\frac{n(n-1)}{2}$  次元の多様体であることを示そう。 $n$  次実対称行列全体を  $S(n, \mathbf{R})$  で表す。

$$f : M(n \times n, \mathbf{R}) \rightarrow S(n, \mathbf{R}), \quad A \mapsto {}^tAI_{p,q}A - I_{p,q}$$

と置けば、 $t \mapsto {}^tA(t)I_{p,q}A(t) - I_{p,q}$  を  $t$  で微分すると  ${}^tA'(t)I_{p,q}A(t) + {}^tA(t)I_{p,q}A'(t)$  なので

$$df_A : T_A M(n \times n, \mathbf{R}) \rightarrow T_{f(A)} S(n, \mathbf{R}), \quad X \mapsto {}^tXI_{p,q}A + {}^tAI_{p,q}X$$

が全射であることを示す。 $T_A M(n \times n, \mathbf{R})$  を  $M(n \times n, \mathbf{R})$  と同一視し、 $T_{f(A)} S(n, \mathbf{R})$  を  $S(n \times n, \mathbf{R})$  と同一視する。任意の  $S \in S(n, \mathbf{R})$  に対し、 $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ {}^tS_2 & S_3 \end{pmatrix}$  と書いて、

$$S' = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ -{}^tS_2 & -S_3 \end{pmatrix} \text{ と置けば}$$

$$\begin{aligned} df_A(\tfrac{1}{2}AS') &= {}^t(\tfrac{1}{2}AS')I_{p,q}A + {}^tAI_{p,q}(\tfrac{1}{2}AS') \\ &= \tfrac{1}{2}{}^tS'{}^tAI_{p,q}A + \tfrac{1}{2}{}^tAI_{p,q}AS' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}({}^tS'I_{p,q} + I_{p,q}S') \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ {}^tS_2 & -S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ -{}^tS_2 & -S_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ {}^tS_2 & S_3 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ {}^tS_2 & S_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ {}^tS_2 & S_3 \end{pmatrix} = S
\end{aligned}$$

2. 行列式をとる写像  $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$  は連続な全射なので  $O(n)$  は連結でない。  
 $SO(n)$  は弧状連結であることを示す。 $X \in SO(n)$  はある  $T \in O(n)$  により

$$T^{-1}XT = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_m & \\ & & & I_{n-m} \end{pmatrix}, \quad X_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix},$$

と書ける。このとき

$$X(t) = T \begin{pmatrix} X_1(t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_m(t) & \\ & & & I_{n-m} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad X_k(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta_k & -\sin t\theta_k \\ \sin t\theta_k & \cos t\theta_k \end{pmatrix}$$

とおけば  $X(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は単位行列と  $X$  を結ぶ  $SO(n)$  の道である。

$n \times n$  行列  $A$  の列ベクトルを順に  $a_1, \dots, a_n$  とすると  $A = (a_1 \dots a_n)$  と書ける。

解説 7.3. 1. 次が逆写像。  $(\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

2.  $A, A' \in p^{-1}(a_1)$  に対し  $a_1 = Ae_1 = A'e_1$  なので  $T = {}^tAA' \in SO(n)$  で  $Te_1 = e_1$ .  
よって  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$ ,  $T' \in SO(n-1)$ , である。言い換えると、 $A \in p^{-1}(a_1)$  を一つ  
とって固定すれば、次が同型を与える。

$$SO(n-1) \rightarrow p^{-1}(a_1), \quad T' \mapsto A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

### 7.3 ユニタリー群の性質

解説 7.4.  $\langle Ax, Ay \rangle = \overline{{}^t(Ax)}Ay = \overline{{}^t\bar{x}}({}^t\bar{A}A)y = \overline{{}^t\bar{x}}y = \langle x, y \rangle$

解説 7.5. 1. 次が逆写像。

$$(z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

2. 解説 7.3 の 2 と同様。



$t \mapsto \text{trace}(CA(\exp tX))$  を  $t$  で微分して  $t = 0$  とおくと、 $\text{trace}(CAX)$  を得る。

$t \mapsto \text{trace}(C(\exp tX)A)$  を  $t$  で微分して  $t = 0$  とおくと、 $\text{trace}(CXA)$  を得る。

$X = X_{p,q}$  と置くと

$$\text{trace}(CAX_{p,q}) = c_q a_{p,q} - c_p a_{q,p} = 0$$

$$\text{trace}(CX_{p,q}A) = c_p a_{p,q} - c_q a_{q,p} = 0$$

なので、 $0 < c_1 < \dots < c_n$  であったから  $a_{p,q} = a_{q,p} = 0$  ( $p \neq q$ )  $a_{p,p} = \pm 1$  を得る。

$I_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  ( $\varepsilon_i \pm 1$ ) が臨界点であり、その臨界値は  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i c_i$  である。

$t \mapsto \text{trace}(CA(\exp tX))$  を  $t$  で 2 回微分して  $t = 0$  とおくと、ヘッセ 2 次形式

$H(X) = \text{trace}(CAX^2)$  を得る。従ってヘッセ双一次形式  $B(X, Y)$  は

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}(H(X + Y) - H(X) - H(Y)) = \frac{1}{2} \text{trace}(CA(XY + YX))$$

となる。 $A = I_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$  として、(8.2) と  $\text{trace}(CAE_{p,q}) = c_q a_{p,q}$  に注意すれば、

$$B(X_{p,q}, X_{p',q'}) = \begin{cases} -c_p \varepsilon_p - c_q \varepsilon_q & (\{p, q\} = \{p', q'\}) \\ 0 & (\{p, q\} \neq \{p', q'\}) \end{cases}$$

なので、指数は  $\sum_{p: \varepsilon_p = 1} (i_p - 1)$  である。実際、 $\{p \mid i_p = 1\} = \{i_1, \dots, i_k\}$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ) とすると次を得る。

$$B(X_{p,q}, X_{p,q}) < 0 \iff (p, q) = \begin{cases} (1, i_1), & (2, i_1), & \dots, & (i_1 - 1, i_1), \\ (1, i_2), & (2, i_2), & \dots, & (i_2 - 1, i_2), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1, i_k), & (2, i_k), & \dots, & (i_k - 1, i_k) \end{cases}$$

$SO(2)$

臨界点	臨界値	指数
$I_{(1,1)}$	$c_1 + c_2$	1
$I_{(-1,-1)}$	$-c_1 - c_2$	0

$SO(3)$

臨界点	臨界値	指数
$I_{(1,1,1)}$	$c_1 + c_2 + c_3$	3
$I_{(-1,-1,1)}$	$-c_1 - c_2 + c_3$	2
$I_{(-1,1,-1)}$	$-c_1 + c_2 - c_3$	1
$I_{(1,-1,-1)}$	$c_1 - c_2 - c_3$	0

$SO(4)$

臨界点	臨界値	指数
$I_{(1,1,1,1)}$	$c_1 + c_2 + c_3 + c_4$	6
$I_{(-1,-1,1,1)}$	$-c_1 - c_2 + c_3 + c_4$	5
$I_{(-1,1,-1,1)}$	$-c_1 + c_2 - c_3 + c_4$	4
$I_{(-1,1,1,-1)}$	$-c_1 + c_2 + c_3 - c_4$	3
$I_{(1,-1,-1,1)}$	$c_1 - c_2 - c_3 + c_4$	3
$I_{(1,-1,1,-1)}$	$c_1 - c_2 + c_3 - c_4$	2
$I_{(1,1,-1,-1)}$	$c_1 + c_2 - c_3 - c_4$	1
$I_{(-1,-1,-1,-1)}$	$-c_1 - c_2 - c_3 - c_4$	0

## 9 グラスマン多様体 (2011 年 7 月 13 日)

### 9.1 グラスマン多様体の定義

解説 9.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{13}}{a_{23}} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{13}}{a_{23}} & \frac{1}{a_{23}} \\ 0 & 1 \\ \frac{a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}}{a_{23}} & \frac{a_{24}}{a_{23}} \end{pmatrix}$$

よって

$$b_{12} = -\frac{a_{13}}{a_{23}} \quad b_{14} = \frac{a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}}{a_{23}} \quad b_{23} = \frac{1}{a_{23}} \quad b_{24} = \frac{a_{24}}{a_{23}}$$

$$\frac{\partial(b_{12}, b_{14}, b_{23}, b_{24})}{\partial(a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24})} = \begin{vmatrix} -\frac{a_{13}}{a_{23}} & 0 & \frac{a_{13}}{a_{23}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a_{23}^2} & 0 \\ -\frac{a_{24}}{a_{23}} & 1 & \frac{a_{13}a_{24}}{a_{23}^2} & -\frac{a_{13}}{a_{23}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_{24}}{a_{23}^2} & \frac{1}{a_{23}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_{23}^4}$$

同様に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a_{24} & -a_{23} \\ -a_{14} & a_{13} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$c_{11} = -\frac{a_{24}}{a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}} \quad c_{12} = \frac{-a_{23}}{a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}}$$

$$c_{21} = \frac{-a_{14}}{a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}} \quad c_{22} = \frac{a_{13}}{a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22})}{\partial(a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24})} &= \det \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{vmatrix}^2} \begin{pmatrix} -a_{24}^2 & a_{23}a_{24} & a_{14}a_{24} & -a_{14}a_{23} \\ a_{23}a_{24} & -a_{23}^2 & -a_{13}a_{24} & a_{13}a_{23} \\ a_{14}a_{24} & -a_{13}a_{24} & -a_{14}^2 & a_{13}a_{14} \\ -a_{14}a_{23} & a_{13}a_{24} & a_{13}a_{14} & -a_{13}^2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{vmatrix}^4} \end{aligned}$$

解説 9.2. 1.  $W$  の別の正規直交基底  $b_1, \dots, b_k$  をとり、 $B = (b_1, \dots, b_k)$  とする。 $A^t A = B^t B$  を示す。

${}^t B B = I_k$  であり、 $A = B T$  を満たす  $k$  次正則行列  $T$  が存在する。

$$I_k = {}^t A A = {}^t (B T) (B T) = {}^t T {}^t B B T = {}^t T T$$

なので  $T$  は直交行列である。

$$A^t A = (BT)^t (BT) = BT^t T^t B = B^t B$$

2.  $P^2 = (A^t A)^2 = (A^t A)^t (A^t A) = A^t A A^t A = A^t A = P$ .  $\det P$  は  $A$  の  $k \times k$  小行列式の 2 乗の和なので  $\text{rank } A = k$  より  $\text{rank } P = k$  を得る。

3.  $w \in W$  とすると  $w = Av$  と書けるが  $Pw = A^t A w = A^t A A w = A w = v$   $W$  の直交補空間の元  $v$  に対し  ${}^t A v = 0$  なので、 $Pv = A^t A v = 0$ .

## 9.2 商空間としてのグラスマン多様体

解説 9.3.  $W \in G(k, n)$  に対しその直交補空間  $W^\perp$  を対応させる写像が  $\langle A \rangle \mapsto \langle A \rangle^\perp$  がこの同型を定める。

## 9.3 グラスマン多様体上の関数

解説 9.4. 1.  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$  の張る空間を  $W_I$  ( $I = (i_1, \dots, i_k)$ ) で表す。ただし  $e_i$  は  $i$  番目の成分が 1 の単位ベクトルを表す。 $X \in \mathfrak{so}(n)$  を取り、道

$$t \mapsto L_{\tilde{A}}(\exp(tX)) = \tilde{A} \exp(tX) = (A(t) \ A^\perp(t)), \quad A(t) = \tilde{A} \exp(tX) K, \quad K = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

に沿った  $f$  の微分を計算しよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(L_{\tilde{A}}(\exp(tX))) &= \frac{d}{dt} \text{trace}(C A(t) {}^t A(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \text{trace}(C (\tilde{A} \exp(tX) K) {}^t (\tilde{A}(\exp(tX)) K))|_{t=0} \\ &= \text{trace } C ((\tilde{A} \exp(tX) X K) {}^t (\tilde{A}(\exp(tX)) K) + (\tilde{A} \exp(tX) K) {}^t (\tilde{A}(\exp(tX)) X K))|_{t=0} \\ &= \text{trace } C ((\tilde{A} X K) {}^t A + A {}^t (\tilde{A} X K)) = 2 \text{trace } C ((\tilde{A} X K) {}^t A) \end{aligned}$$

$X = X_{p,q} = E_{p,q} - E_{q,p}$  ( $1 \leq p \leq k < q \leq n$ ) とすると、この値は次で与えられる。

$$-2(c_1 a_{p,1} a_{q,1} + \dots + c_n a_{p,n} a_{q,n}) \tag{9.1}$$

$\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{i,j}$  であるから、 $a_1, \dots, a_k$  は一次独立。ここで最初の  $k$  個の行のなす正方行列の行列式が 0 でないと仮定しよう。すると  $SO(k) \times SO(n-k)$  の作用で  $a_{i,j} = 0$

( $1 \leq i < j \leq k, k < i < j \leq n$ ) と仮定でき、 $\tilde{A}$  は次の形をしている。

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{k-1,k} & a_{k-1,k+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & a_{k,k} & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,k} & a_{k+2,k+1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

この行列が直交行列であるということと (9.1) が零であるという条件から、 $f$  の臨界値  $W$  は座標空間  $W_{(1,\dots,k)}$  であることがわかる。

同様にして、 $a_1, \dots, a_k$  の  $i_1, \dots, i_k$  行のなす正方行列の行列式が 0 でないとするとき  $W_I$  ( $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ) が  $f$  の臨界点である事もわかる。その臨界値は  $f(W_I) = \sum_{i \in I} c_i$  である。

2. 2 階微分を計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \text{trace}(CA(t)^t A(t))|_{t=0} \\ &= \text{trace} C((\tilde{A}X^2K)^t A + 2(\tilde{A}XK)^t(\tilde{A}XK) + A^t(\tilde{A}X^2K)) \\ &= 2 \text{trace} C((\tilde{A}X^2K)^t A + (\tilde{A}XK)^t(\tilde{A}XK)) \end{aligned}$$

なので、ヘッセ双一次形式を

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}(H(X + Y) - H(X) - H(Y))$$

(但し  $H(X) = 2 \text{trace} C((\tilde{A}X^2K)^t A + (\tilde{A}XK)^t(\tilde{A}XK))$ ) で定めれば、

$$B(X, Y) = \text{trace} C((\tilde{A}(XY + YX)K)^t A + (\tilde{A}XK)^t(\tilde{A}YK) + (\tilde{A}YK)^t(\tilde{A}XK))$$

である。 $\tilde{A}X_{p,q} = (0 \cdots -a_q^p \cdots a_p^q \cdots 0)$  と

$$\tilde{A}X_{p,q} X_{p',q'} = \begin{cases} (0 \cdots a_q^p \cdots a_p^q \cdots 0) & (p = p', q = q') \\ (0 \cdots -a_q^{q'} \cdots 0) & (p = p', q \neq q') \\ (0 \cdots -a_p^{p'} \cdots 0) & (p \neq p', q = q') \\ (0 \cdots a_p^{q'} \cdots 0) & (p < q = p' < q') \\ (0 \cdots a_q^{p'} \cdots 0) & (p' < q' = p < q) \\ O_n & (\{p, q\} \cap \{p', q'\} = \emptyset) \end{cases}$$

に注意すれば、 $n \times k$  行列  $A = (a_{i,j})$ ,  $B = (b_{i,j})$  に対し

$$\text{trace}(CA^tB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k c_i a_{i,j} b_{i,j}$$

なので、 $1 \leq p \leq k < q \leq n$ ,  $1 \leq p' \leq k < q' \leq n$  のとき、次が成り立つ。

$$B(X_{p,q}, X_{p',q'}) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n c_i (a_{i,q}^2 - a_{i,p}^2) & (p = p', q = q') \\ 2 \sum_{i=1}^n c_i a_{i,p} a_{i,p'} & (p \neq p', q = q') \\ 2 \sum_{i=1}^n c_i a_{i,q} a_{i,q'} & (p = p', q \neq q') \\ 0 & (\{p, q\} \cap \{p', q'\} = \emptyset) \end{cases}$$

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$$

$$\{1, \dots, n\} \setminus I = \{j_1, \dots, j_{n-k}\} \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n)$$

とすれば  $W_I$  では

$$a_1 = e_{i_1}, \dots, a_k = e_{i_k}, a_{k+1} = e_{j_1}, \dots, a_n = e_{j_{n-k}}$$

なので、 $1 \leq p \leq k < q \leq n$  のとき

$$a_{i,p} = \begin{cases} 1 & i = i_p \\ 0 & i \neq i_p \end{cases} \quad a_{i,q} = \begin{cases} 1 & i = j_q \\ 0 & i \neq j_q \end{cases}$$

となり、次を得る。

$$B(X_{p,q}, X_{p',q'}) = \begin{cases} 2(c_{j_q} - c_{i_p}) & (p = p', q = q') \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

よって、臨界点  $W_I$  での指数は  $\#\{(i,j) \in I \times (\{1, \dots, n\} \setminus I) \mid j < i\}$  である。

$G(2,4)$			$G(2,5)$			$G(3,5)$		
$I$	$f(W_I)$	指数	$I$	$f(W_I)$	指数	$I$	$f(W_I)$	指数
(1,2)	$c_1 + c_2$	0	(1,2)	$c_1 + c_2$	0	(1,2,3)	$c_1 + c_2 + c_3$	0
(1,3)	$c_1 + c_3$	1	(1,3)	$c_1 + c_3$	1	(1,2,4)	$c_1 + c_2 + c_4$	1
(1,4)	$c_1 + c_4$	2	(1,4)	$c_1 + c_4$	2	(1,2,5)	$c_1 + c_2 + c_5$	2
(2,3)	$c_2 + c_3$	2	(1,5)	$c_1 + c_5$	3	(1,3,4)	$c_1 + c_3 + c_4$	2
(2,4)	$c_2 + c_4$	3	(2,3)	$c_2 + c_3$	2	(1,3,5)	$c_1 + c_3 + c_5$	3
(3,4)	$c_3 + c_4$	4	(2,4)	$c_2 + c_4$	3	(1,4,5)	$c_1 + c_4 + c_5$	4
			(2,5)	$c_2 + c_5$	4	(2,3,4)	$c_2 + c_3 + c_4$	3
			(3,4)	$c_3 + c_4$	4	(2,3,5)	$c_2 + c_3 + c_5$	4
			(3,5)	$c_3 + c_5$	5	(2,4,5)	$c_2 + c_4 + c_5$	5
			(4,5)	$c_4 + c_5$	6	(3,4,5)	$c_3 + c_4 + c_5$	6