幾何学演習

1　陰関数定理と逆写像定理（2011 年 4 月 13 日）

1.1　逆写像定理

演習 1.1. C^∞ 関数 $f:(a,b)\to\mathbf{R},\ x\mapsto f(x),$ に対して逆関数定理を述べよ。

演習 1.2. U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする。C^∞ 写像

$$F:U\to\mathbf{R}^2,\ (x,y)\mapsto(f(x,y),g(x,y)),$$

について逆関数の定理を述べよ。

演習 1.3. U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。C^∞ 写像

$$f:U\to\mathbf{R}^n,\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)),$$

について逆関数の定理を述べよ。

1.2　陰関数の定理

演習 1.4. U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする。C^∞ 関数

$$f:U\to\mathbf{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y),$$

について陰関数の定理を述べよ。

演習 1.5. U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。C^∞ 写像

$$f:U\to\mathbf{R}^p,\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_n)),$$

(ただし $n>p$) について、陰関数の定理を述べよ。

1.3　正則点、特異点、臨界点

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合，$r\geq 1$ とし，C^r 写像 $f=(f_1,\ldots,f_p):U\longrightarrow\mathbf{R}^p$ を考える．1 階偏導関数を並べてできる次の行列を $x\in U$ での f の**ヤコビ行列**という．

$$J_f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix},\quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in U.$$

演習 1.6. C^∞ 写像 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ の正則点、臨界点（特異点)、臨界値、正則値の定義を述べよ。

演習 1.7. C^∞ 写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ $(n\geq p)$ の正則点、臨界点（特異点)、臨界値、正則値の定義を述べよ。

演習 1.8. C^∞ 写像 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ の正則点、特異点の定義を述べよ。

演習 1.9. C^∞ 写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ $(n<p)$ の正則点、特異点の定義を述べよ。

f は 点 x で**はめ込み**である $\iff$ $\operatorname{rank} J_f(x)=n$
f は 点 x で**沈め込み**である $\iff$ $\operatorname{rank} J_f(x)=p$

演習 1.10. U を $\mathbf{R}^n$ の原点近傍とする。$f:U\to\mathbf{R}^p$ が $f(0)=0$ を満たし、点 $0\in U$ ではめ込みであれば、$n\leq p$ であり、$f(0)=0$ の近傍での座標変換 $(y_1,\dots,y_p)\mapsto\Phi(y_1,\dots,y_p)$ が存在して、x のある近傍上で次を満たすようにできる。$\Phi\circ f(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$

演習 1.11. U を $\mathbf{R}^n$ の原点近傍とする。$f:U\to\mathbf{R}^p$ が $f(0)=0$ を満たし、点 $0\in U$ で沈め込みであれば、$n\geq p$ であり、$f(x)$ の近傍での座標変換 $(x_1,\dots,x_n)\mapsto\Phi(x_1,\dots,x_n)$ が存在して、x のある近傍上で次を満たすようにできる。$f\circ\Phi(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_p)$

演習 1.12. 次の関数について、臨界点と臨界値を求めよ。

1. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $(x,y)\mapsto x^2-y^2$
2. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $(x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy$
3. $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, $(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2$

3. $(x,y)=(0,0),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, それぞれ 0, $-\frac{1}{27}$

演習 1.13. 次の写像について、特異点とその f による像を求めよ。

1. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x^3+xy,y)$
2. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$
3. $f_t:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x^2-y^2+2tx,2xy-2ty)$

特異点集合を Σ としたとき $f|_\Sigma$ の特異点集合とその像も調べるとよい。

2　球面 (2011 年 4 月 20 日)

2.1　ユークリッド空間の部分多様体

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X が次の条件を満たすとき**ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の C^r 部分多様体**であるという.

条件：X の各点 x_0 に対し，x_0 の $\mathbf{R}^n$ でのある開近傍 U と $\mathbf{R}^n$ の原点の開近傍 V, さらに x_0 を原点に写すような C^r 同相写像 $\boldsymbol{h} : U \longrightarrow V$ が存在して，次を満たす.

$$\boldsymbol{h}(U \cap X) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in V \mid y_1 = \cdots = y_k = 0\}$$

k をこの部分多様体 X の点 x_0 での**余次元**といい $\operatorname{cod}_{x_0} X = k$ と書く.

演習 2.1. 関数 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, の臨界点をすべて求めよ。正の数 r に対し $f^{-1}(r)$ は $\mathbf{R}^3$ の部分多様体であることを示せ。

2 次元球面 S^2 を次で定める。

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

2.2　立体射影

演習 2.2. S^2 の点を P とする。点 $N = (0, 0, 1)$ を北極と呼び、直線 NP と、平面 $z = 0$ との交点 Q の座標を $(u, v, 0)$ とする。$P \neq N$ のとき Q が定まる。対応 $P \mapsto Q$ を北極 N 中心とした**立体射影**と呼ぶ。

1. x, y, z を u, v を用いて表せ。
2. u, v を x, y, z を用いて表せ。

対応 $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 φ_+ を定めている。

$$\varphi_+ : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

3. 写像 φ_+ は各点ではめ込みであることを示せ。
4. 写像 φ_+ の像は S^2 の北極を除いた部分である。はめ込み φ_+ の第 1 基本形式 ds^2 を計算せよ。

演習 2.3. S^2 の点を P とする。点 $S = (0, 0, -1)$ を南極と呼び、直線 SP と、平面 $z = 0$ との交点 Q' の座標を $(u', v', 0)$ とする。$P \neq S$ のとき Q' が定まる。対応 $P \mapsto Q'$ を南極 S 中心とした**立体射影**と呼ぶ。

1. x, y, z を u', v' を用いて表せ。
2. u', v' を x, y, z を用いて表せ。

対応 $(u', v') \mapsto (x, y, z)$ は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 φ_- を定めている。

$$\varphi_- : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

3. はめ込み φ_- の第 1 基本形式 ds^2 を計算せよ。
4. u', v' を u, v を用いて表せ。写像 $\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+$ のヤコビ行列式の符号を調べよ。（ただし定義されている点で）
5. 複素平面 $\mathbf{C}$ を 2 つ用意し、それぞれの座標を z, w とする。関係式 $w = \frac{1}{z}$ で $\mathbf{C}$ を貼り合わせると、S^2 が出来ることを示せ。

2.3 中心射影

演習 2.4. S^2 の点を P とする。平面 $z = 1$ との点 Q の座標を $(u_1, v_1, 1)$ とする。線分 OQ と S^2 の交点を P とする。対応 $P \mapsto Q$ を**中心射影**という。

1. x, y, z を u_1, v_1 を用いて表せ。
2. u_1, v_1 を x, y, z を用いて表せ。

対応 $(u_1, v_1) \mapsto (x, y, z)$ は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 ϕ を定めている。

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

3. 写像 ϕ は各点ではめ込みであることを示せ。
4. はめ込み ϕ の第 1 基本形式 ds^2 を計算せよ。

3　球面とトーラス (2011 年 4 月 27 日)

3.1　S^2 上の関数と写像の例

演習 3.1. 次で定まる S^2 上の関数を考える。

$$f : S^2 \to \mathbf{R}, \qquad (x, y, z) \to z$$

1. $f \circ \varphi_\pm : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の臨界点および臨界値を求めよ。
2. 求めた臨界点での $f \circ \varphi_\pm : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ のヘッセ行列を求めよ。

演習 3.2. 次で定まる S^2 上の写像を考える。

$$f : S^2 \to \mathbf{R}^2, \qquad (x, y, z) \to (x, y)$$

$f \circ \varphi_\pm : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の特異点集合およびその f による像を求めよ。

3.2　n 次元球面

演習 3.3. 次で定まる n 次元球面 S^n を考える。

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\}$$

1. S^n は $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを示せ。
2. S^n に対し北極 $N = (1, 0, \ldots, 0)$ および南極 $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ を中心とした立体射影を書き下せ。$\varphi_\pm$ も定義せよ。

演習 3.4. S^n 上の次の関数を考える。

$$f : S^n \to \mathbf{R}, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \to x_0$$

1. $f \circ \varphi_\pm : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ の臨界点を求めよ。
2. 求めた臨界点での $f \circ \varphi_\pm : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ のヘッセ行列の値を求めよ。
3. $\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+$ のヤコビ行列式の符号を調べよ。(ただし定義されている点で)

3.3　トーラス

$T^2 = S^1 \times S^1$ を 2 次元トーラスという。

演習 3.5. 次の写像を考える。

$$\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad (u, v) \mapsto ((2 + \cos u) \sin v,\ (2 + \cos u) \cos v, \sin u)$$

1. φ の像の絵を描け。
2. φ は各点ではめ込みであることを示せ。
3. φ は単射ではないが、φ を $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})^2$ （または $A = [0, 2\pi)^2, [-\pi, \pi)^2$ など）に制限したものは単射であることを示せ。
4. φ の第 1 基本形式を求めよ。
5. φ の第 2 基本形式を求めよ。
6. 主曲率とガウス曲率を求めよ。

3.4 トーラス上の関数

演習 3.6. 写像 φ の像を X で表す。関数 $f : X \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$, を考える。

1. $f \circ \varphi|_A$ の臨界点と臨界値をすべて求めよ。
2. またその臨界点でのヘッセ行列の固有値を求めよ。
3. t を定数としたとき $X \cap \{(x, y, z) \mid x \leq t\}$ の絵を描け。(t によって絵が異なることに注意。)

演習 3.7. 写像 φ の像を X で表す。

1. $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$ となる g を求めよ。
2. 上で求めた $f \circ \varphi$ の臨界点は、$g = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ で定まる点と対応していることを示せ。

3.5 トーラスから平面への写像

演習 3.8. 写像 φ の像を X で表す。t を定数として、次で定まる X 上の写像を考える。

$$f_t : X \to \mathbf{R}^2, \qquad (x, y, z) \to (x, ty + z)$$

1. $f_0 \circ \varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の特異点集合およびその f_0 による像を求めよ。
2. $t \neq 0$ のとき、$f_t \circ \varphi$ の特異点集合 Σ の定義方程式 $g(u, v) = 0$ を求めよ。
3. $t = 1/3, 2/3$ のとき、$f_t \circ \varphi(\Sigma)$ の像を描け。$f_t \circ \varphi|_\Sigma$ の特異点集合の像が $f_t(\Sigma)$ のカスプとなっている。

4 射影空間 (2011 年 5 月 11 日)

4.1 非退化特異点

$\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上の関数 $f : U \to \mathbf{R}$ が点 P で臨界点 (特異点) であるとする。すなわち $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする。f が P で**非退化**であるとは f の臨界点 P でのヘッセ行列

$$H(f,P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(P) \end{pmatrix}$$

が、非退化である（行列式が 0 でない）ときをいう。$H(f,P)$ の負の固有値の個数を臨界点（特異点） P の**指数**とよぶ。

4.2 射影空間

K を実数体 $\mathbf{R}$ または複素数体 $\mathbf{C}$ とする。K^{n+1} の 0 でないベクトル $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ に対して、同値関係 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ を、0 でない K の元 t が存在して

$$x_i = ty_i, \qquad i = 0, 1, .., n$$

であることとして定義する。この同値関係による $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ の同値類を $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ で表す。射影空間 $P^n(K)$ を次で定める。

$$P^n(K) = (K^{n+1} \setminus 0)/ \sim$$

$P^n(\mathbf{R})$ を実射影空間、$P^n(\mathbf{C})$ を複素射影空間という。射影空間の点を比として表す表し方 $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ を射影空間の斉次座標（あるいは同次座標, homogeneous coordinate）と呼ぶ。射影空間には $K^{n+1} \setminus 0$ の商位相を入れておく。

$x_0 \neq 0$ となる射影空間 $P^n(K)$ の点全体 U_0 は、斉次座標の最初の成分を x_0 で割って $[1 : x_1/x_0 : ... : x_n/x_0]$ とただ一通りに書けるので、U_0 は、アフィン空間 K^n と自然な全単射がある。同様に $x_i \neq 0$ となる点全体 U_i も同様にしてアフィン空間との間の全単射 $\phi_i : K^n \to U_i$ がある。

演習 4.1. ϕ_i は位相同型となり、$U_0, U_1, \ldots, U_n$ は $P^n(K)$ の開被覆となる事を示せ。

演習 4.2. $\phi_j^{-1} \circ \phi_i(a_1, \ldots, a_n)$ を $a_1, \ldots, a_n$ で表せ。($n = 1, 2, 3$ としてやってよい。)

開被覆 $\cup_i U_i$ は $P^n(K)$ に多様体の構造を与える。

演習 4.3. $P^1(\mathbf{C}) \simeq S^2$ を示せ。

演習 4.4. n 次元球面

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\}$$

に対し、次の写像を考える。

$$p : S^n \to P^n(\mathbf{R}), \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$$

p のファイバーを求めよ。

演習 4.5. $(2n+1)$ 次元球面

$$S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$$

に対し、次の写像を考える。

$$p : S^{2n+1} \to P^n(\mathbf{C}), \quad (z_0, z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$$

p のファイバーを求めよ。

写像 $p : S^3 \to P^1(\mathbf{C}) = S^2$ を**ホップファイブレーション**という。

演習 4.6 (Veronese 埋込)**.** 写像

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6, \quad (x_0, x_1, x_2) \mapsto ({x_0}^2, x_0x_1, x_0x_2, {x_1}^2, x_1x_2, {x_2}^2)$$

を S^2 に制限すると、その像は $P^2(\mathbf{R})$ であることを示せ。

演習 4.7. $0 < c_0 < c_1 < c_2$ とし、次の関数を考える。

$$f : P^2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R},\ [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \frac{c_0{x_0}^2 + c_1{x_1}^2 + c_2{x_2}^2}{{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2}$$

1. これで実射影平面 $P^2(\mathbf{R})$ 上の関数が定まることを示せ。
2. $f \circ \phi_i$ $(i = 0, 1, 2)$ の臨界点と臨界値を求めよ。またその点での $f \circ \phi_i$ のヘッセ行列の指数を求めよ。

演習 4.8. $0 < c_0 < c_1 < c_2$ とし、次の関数を考える。

$$f : P^2(\mathbf{C}) \to \mathbf{R},\ [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto \frac{c_0|z_0|^2 + c_1|z_1|^2 + c_2|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}$$

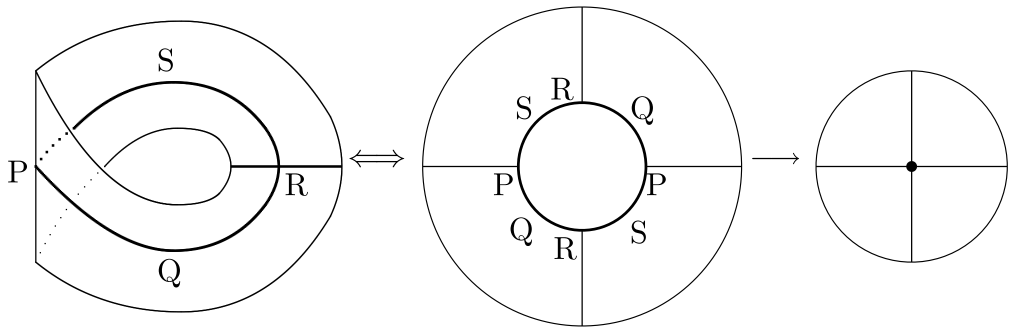
1. これで複素射影平面 $P^2(\mathbf{C})$ 上の関数が定まることを示せ。
2. $f \circ \phi_i$ $(i = 0, 1, 2)$ の臨界点と臨界値を求めよ。またその点での $f \circ \phi_i$ のヘッセ行列の指数を求めよ。

5　ブローアップ (2011 年 5 月 18 日)

演習 5.1. アニュラス $S^1 \times [0,1]$ を考える。

1. アニュラスの内側の円上で，原点について対称な点同志を同一視して得られる図形を考えると，メビウスの帯が得られる事を示せ。
2. アニュラスの内側の円を 1 点に潰すと円板になるので、メビウスの帯の中心線を 1 点につぶすと円板になる事を示せ。

ここで決まるメビウスの帯から円板への写像を**平面のブローアップ**と言う.



$K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする。

$$M = \{(x,y) \times [\xi : \eta] \in K^2 \times P^1(K) \mid x\eta = y\xi\}$$

とおき，自然な射影 $K^2 \times P^1(K) \to K^2$ の M への制限を

$$\pi : M \longrightarrow K^2, \quad (x,y) \times [\xi : \eta] \mapsto (x,y)$$

と書く．これを平面 K^2 の原点での**ブローアップ**という.

演習 5.2. 次を示せ。

1. $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times P^1(K)$.
2. $\pi|_{M \setminus \pi^{-1}(\mathbf{0})} : M - \pi^{-1}(\mathbf{0}) \to K^2 - \{\mathbf{0}\}$ は全単射.
3. $K = \mathbf{R}$ のとき M はメビウスの帯である。

M の開集合 U, V を

$$\begin{aligned} U =& \{(x,y) \times [\xi : \eta] \in M \mid \xi \neq 0\} \\ V =& \{(x,y) \times [\xi : \eta] \in M \mid \eta \neq 0\} \end{aligned}$$

とし、写像 φ, ϕ を次で定める。

$$\varphi : U \to K^2, \qquad (x,y) \times [\xi : \eta] \mapsto (u,v) = \left(x, \frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$\phi : V \to K^2, \qquad (x, y) \times [\xi : \eta] \mapsto (u', v') = \left(\frac{\xi}{\eta}, y\right)$$

演習 5.3. 1. φ, ϕ は全単射である事を示せ（逆写像を求めよ)。

2. (u', v') を (u, v) で表せ。

3. 対応 $(u, v) \mapsto (u', v')$ は全単射

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbf{R}^2 \cap \varphi(V) \to \mathbf{R}^2 \cap \phi(U),$$

を定めることを示せ。

4. $\pi \circ \varphi^{-1}$, $\pi \circ \phi^{-1}$ の特異点集合とその像を求めよ。

$E = \pi^{-1}(0)$ をブローアップの**例外集合**という。これを変形してみよう。

演習 5.4. $K = \mathbf{R}$ として、次で写像 φ_t を定める。

$$\varphi_t : P^1(\mathbf{R}) \to M, \qquad [\xi : \eta] \to \left(\frac{t\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \frac{t\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) \times [\xi : \eta]$$

1. これで写像 φ_t がきちんと定義されていることを示せ。
2. $\operatorname{Im}\varphi_t$ $(t \neq 0)$ と E の交点を求めよ。

演習 5.5. $K = \mathbf{C}$ として、次で写像 φ_t を定める。

$$\varphi_t : P^1(\mathbf{C}) \to M, \qquad [\xi : \eta] \to \left(\frac{t\xi\bar{\eta}}{|\xi|^2 + |\eta|^2}, \frac{t|\eta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2}\right) \times [\xi : \eta]$$

2. $\operatorname{Im}\varphi_t$ $(t \neq 0)$ と E の交点を求めよ。

3*. 交点数の定義を調べ、E と $\varphi_t(P^1(\mathbf{C}))$ $(t \neq 0)$ の M 内での交点数を計算せよ。

演習 5.6. t を定数とする。写像

$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbf{R} \times S^1 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R}) \\ (r, \theta) &\mapsto (r\cos\theta + t\cos 2\theta, r\sin\theta - t\sin 2\theta) \times [\cos\theta : \sin\theta]\end{aligned}$$

と、M の変形 M_t を考える。$M_0 = M$ に注意。

$$M_t = \left\{(x, y) \times [\cos\theta : \sin\theta] \in \mathbf{R}^2 \times P^1(\mathbf{R}) \mid x\sin\theta - y\cos\theta = t\sin 3\theta\right\}$$

1. $\operatorname{Im}\phi_t = M_t$ を示せ。
2. 関数 $f : M_t \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \times [\cos\theta : \sin\theta] \to x$, の特異点を求め、その指数を計算せよ。(ヒント：関数 $f \circ \phi_t$ の特異点を求める)
3. $\pi_t : M_t \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \times [\cos\theta : \sin\theta] \to (x, y)$, の特異点集合を求め、その像の絵を描け。(ヒント：写像 $\pi_t \circ \phi_t$ の特異点集合 Σ とその像を調べればよい。$\pi_t \circ \phi_t|_\Sigma$ も調べること。)

6　行列の群 (1) (2011 年 5 月 25 日)

6.1　行列の群の例

体 K の元を要素とする $n\times p$ 行列全体を $M(n\times p, K)$ で表す。定義から $M(n\times p, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{np}$ である。

$$
\begin{aligned}
GL(n,K) =& \{A \in M(n\times n, K) \mid \det A \neq 0\} && \text{一般線形群}\\
SL(n,K) =& \{A \in M(n\times n, K) \mid \det A = 1\} && \text{特殊線形群}\\
O(n) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{R}) \mid {}^tAA = I_n\} && \text{直交群}\\
SO(n) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{R}) \mid {}^tAA = I_n,\ \det A = 1\} && \text{特殊直交群}\\
O(p,q) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{R}) \mid {}^tAI_{p,q}A = I_{p,q}\} && \text{ローレンツ群}\\
SO(p,q) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{R}) \mid {}^tAI_{p,q}A = I_{p,q},\ \det A = 1\} && \text{特殊ローレンツ群}\\
U(n) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{C}) \mid {}^t\overline{A}A = I_n\} && \text{ユニタリー群}\\
SU(n) =& \{A \in M(n\times n, \mathbf{C}) \mid {}^t\overline{A}A = I_n,\ \det A = 1\} && \text{特殊ユニタリー群}
\end{aligned}
$$

I_n は単位行列で、$I_{p,q}$ は次で定義される行列である。

$$I_{p,q} = \mathrm{diag}(\overbrace{1,\ldots,1}^{p}, \overbrace{-1,\ldots,-1}^{q}).\quad \text{ただし } p+q=n.$$

ここで $\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)$ で対角成分が c_1, $\ldots$, c_n の対角行列を表す。

演習 6.1. 位相空間としてコンパクトなものはどれか？

6.2　行列の指数関数

$M(n\times n, K)$ は体 K 上の n^2 次元のベクトル空間であり、次で内積を定めておく。

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{trace}\,{}^t\overline{X}Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x_{ij}}y_{ij}, \qquad X=(x_{ij}),\quad Y=(y_{ij}).$$

ノルム $\|X\|$ は次のようになる。

$$\|X\| = \langle X, X\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

演習 6.2. ノルムについては次が成り立つ事を示せ。

- $\|aX\| = |a|\|X\|$, $a\in K$.

- $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$

行列 $X \in M(n \times n, K)$ に対し $\exp X$ を次で定める。

$$\exp X = I_n + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{k!}X^k + \cdots$$

演習 6.3. 行列の列 $\{A_n\}$ に対し $S_n = \sum_{k=0}^n A_k X^k$, $s_n = \sum_{k=0}^n \|A_k\|\|X\|^k$ とすると $\{s_n\}$ が収束すれば $\{S_n\}$ も収束する。

行列の指数関数の基本性質をまとめておこう。

1. $\exp O_n = I_n$
2. $XY = YX$ ならば $\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y)$
3. $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$
4. $\exp({}^tX) = {}^t(\exp X)$, $\exp({}^t\overline{X}) = {}^t\overline{(\exp X)}$
5. $A \in GL(n, \mathbf{R})$ に対し $\exp(AXA^{-1}) = A(\exp X)A^{-1}$
6. $\det(\exp X) = \exp(\operatorname{trace} X)$
7. $\frac{d}{dt}\exp tX = X(\exp tX) = (\exp tX)X$
8. 行列 X, Y の括弧積 $[X,Y]$ を $[X,Y] = XY - YX$ で定めると、次が成り立つ。

$$\exp tX \exp tY = \exp\bigl(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\bigr)$$

9. exp は零行列の近傍から単位行列の近傍への位相同型を定める。正確には、

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} =& \{X \in M(n \times n, \mathbf{R}) \mid \|\exp X - I_n\| < 1\}, \\ U =& \{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) \mid \|A - I_n\| < 1\} \end{aligned}$$

とおくと、写像 $\exp : \mathfrak{u} \to U$, $X \mapsto \exp X$, は位相同型である。

演習 6.4. 上の 2-9 を確かめよ。

ヒント 8.　$(\exp tX)(\exp tY) = \exp Z(t)$, $Z(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{t^k}{k!}Z_k$, とおいて Z_k を順次決定していく。

7 行列の群 (2)(2011 年 6 月 8 日)

7.1 G と $\mathfrak{g}$

前回現れた行列の群を G と書き、G に対し $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ を次で定める。

$$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)=\{X\in M(n\times n,K)\mid \exp(tX)\in G\ \forall t\in K\}$$

例えば、$G=GL(n,\mathbf{R})$ のとき $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ を $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ と書く。すると次がわかる。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}) =&M(n\times n,\mathbf{R})\\
\mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{R})\mid \operatorname{trace}X=0\}\\
\mathfrak{o}(n) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{R})\mid X+{}^tX=O_n\}\\
\mathfrak{so}(n) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{R})\mid X+{}^tX=O_n,\ \operatorname{trace}X=0\}\\
\mathfrak{o}(p,q) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{R})\mid I_{p,q}X+{}^tXI_{p,q}=O_n\}\\
\mathfrak{so}(p,q) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{R})\mid I_{p,q}X+{}^tXI_{p,q}=O_n,\ \operatorname{trace}X=0\}\\
\mathfrak{u}(n) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{C})\mid X+{}^t\overline{X}=O_n\}\\
\mathfrak{su}(n) =&\{X\in M(n\times n,\mathbf{C})\mid X+{}^t\overline{X}=O_n,\ \operatorname{trace}X=0\}
\end{aligned}$$

ただし O_n は零行列である。

- $\exp(\operatorname{trace}X)=\det(\exp X)$ より $\det(\exp X)=1\iff \operatorname{trace}X=0$
- $X\in\mathfrak{o}(p,q)$ ならば $I_{p,q}={}^t(\exp(tX))I_{p,q}\exp(tX)$ であり、これを微分すると

  $$O_n={}^t((\exp(tX)X)I_{p,q}\exp(tX)+{}^t(\exp(tX))I_{p,q}X\exp(tX)$$

  を得るので、$t=0$ とおくと、$O_n={}^tXI_{p,q}+I_{p,q}X$ を得る。
- $\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(p,q)=\mathfrak{o}(p,q)$ に注意しよう。

次の写像により、多様体 G の単位元 I_n での接空間と $\mathfrak{g}$ は同一視される。

$$\mathfrak{g}\to T_{I_n}G,\qquad X\mapsto \frac{d}{dt}\exp(tX)|_{t=0}$$

$A\in G$ に対し、同型写像

$$L_A:G\to G,\ B\mapsto AB,\qquad R_A:G\to G,\ B\mapsto BA$$

（逆写像はそれぞれ $L_{A^{-1}}$, $R_{A^{-1}}$）の接写像は、接ベクトル空間の同型写像を定める。

$$\begin{aligned}
dL_A:\mathfrak{g}=T_{I_n}G\to T_AG,\qquad dL_A(X)=\frac{d}{dt}(A\exp(tX))|_{t=0}=AX\\
dR_A:\mathfrak{g}=T_{I_n}G\to T_AG,\qquad dR_A(X)=\frac{d}{dt}(\exp(tX)A)|_{t=0}=XA
\end{aligned}$$

このとき $A\mathfrak{g}=dL_A(\mathfrak{g})\simeq T_AG\simeq dR_A(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}A$ に注意しておこう。

7.2 直交群の性質

演習 7.1. 次を示せ。

1. $A \in O(n)$ に対し、変換 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $x \mapsto Ax$, はユークリッド内積 $\langle x, y\rangle = {}^t xy$ を不変にする。
2. $A \in O(p,q)$ に対し、変換 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $x \mapsto Ax$, はローレンツ擬内積 $\langle x, y\rangle = {}^t xI_{p,q}y$ を不変にする。

演習 7.2.
1. $O(n)$ は $M(n \times n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$ の $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元部分多様体であることを示せ ($n = 3$ としてやってよい)。
2. $O(n)$ は連結でなく、単位行列を含む連結成分は $SO(n)$ であることを示せ。（ヒント：$SO(n)$ の連結性を示すには直交行列の標準形を使え。）

$n \times n$ 行列 A の列ベクトルを順に $a_1, \dots, a_n$ とすると $A = (a_1 \ \dots a_n)$ と書ける。

演習 7.3. 次を示せ。

1. 写像 $f : SO(2) \to S^1$, $A = (a_1\ a_2) \mapsto a_1$, は位相同型であることを示せ。
2. 写像 $f : SO(n) \to S^{n-1}$, $A = (a_1\ \dots\ a_n) \mapsto a_1$, のファイバーは $SO(n-1)$ と位相同型である事を示せ。

7.3 ユニタリー群の性質

演習 7.4. $A \in U(n)$ に対し、変換 $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, $x \mapsto Ax$, はエルミート内積 $\langle x, y\rangle = {}^t\overline{x}y$ を不変にする事を示せ。

次の事実は演習問題としないが、興味がある人は証明にチャレンジしてみるとよい。

- $U(n)$ は $M(n \times n, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n^2} = \mathbf{R}^{2n^2}$ の n^2 次元部分多様体である。
- $SU(n)$ は $M(n \times n, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n^2} = \mathbf{R}^{2n^2}$ の $n^2 - 1$ 次元部分多様体である。

演習 7.5.
1. $\mathbf{C}^2$ 内の 3 次元球面 $S^3 = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ を考える。写像 $f : SU(2) \to S^3$, $A = (a_1, a_2) \mapsto a_1$, は位相同型であることを示せ（逆写像を構成すること)。
2. 写像 $SU(n) \to S^{2n-1}$, $A = (a_1\ \dots\ a_n) \mapsto a_1$, のファイバーは $SU(n-1)$ と位相同型であることを示せ。

8　行列の群 (3)(2011 年 6 月 15 日)

8.1　$SU(2)$ の随伴表現

演習 8.1. 次の写像を考える。

$$p : S^3 \to SO(3), \qquad (z,w) \mapsto \begin{pmatrix} |z|^2-|w|^2 & 2\,\mathrm{Im}(zw) & -2\,\mathrm{Re}(zw) \\ 2\,\mathrm{Im}(z\overline{w}) & \mathrm{Re}(z^2+w^2) & \mathrm{Im}(z^2+w^2) \\ 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) & -\mathrm{Im}(z^2-w^2) & \mathrm{Re}(z^2-w^2) \end{pmatrix}$$

1. 写像 p がうまく定義されていることを確かめよ。
2. (z,w) と $(1,0)$ のなす角を θ とするとき $p(z,w)$ は $\mathbf{C}^2$ 内で $\mathrm{Re}\, z = 0$ で定まる 3 次元実ベクトル空間での $(\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\, z, w)$ を軸とする 2θ 回転であることを示せ。写像 p は 2 対 1 の写像である。（ヒント：$w=0$ のときと $w \neq 0$ のときで分けて考える。）
3. 写像 p は、写像 $\bar{p} : P^3(\mathbf{R}) \to SO(3)$ を誘導することを示せ。これは全単射である。

写像 p は $SU(2)$ の随伴表現

$$SU(2) \to SO(3), \qquad X \mapsto (A \mapsto XA{}^t\overline{X}) \qquad A \in \mathfrak{su}(2)$$

から決まる写像である。

8.2　$SO(n)$ 上の関数

演習 8.2. $C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_n)$ $(0 < c_1 < \cdots < c_n)$ として、次の $SO(n)$ 上の関数を考える。

$$f : SO(n) \to \mathbf{R},\ X \mapsto \mathrm{trace}(CX)$$

1. f の臨界点と臨界値を求めよ。
2. $n = 2,3,4$ のとき、各臨界点の指数を求めよ。

ヒント: 臨界点を求めるためには $A \in SO(n)$, $X \in \mathfrak{so}(n)$ として、次の微分が 0 となる条件を見る。

$$t \mapsto f(L_A(\exp(tX)))$$
$$t \mapsto f(R_A(\exp(tX)))$$

(p,q) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列を $E_{p,q}$ とし、$X_{p,q} = E_{p,q} - E_{q,p}$ $(p < q)$ を $\mathfrak{so}(n)$ の基底に取るとよい。次に注意しておく。

$$E_{p,q}E_{p',q'} = \begin{cases} E_{p,q'} & q = p' \\ O_n & p \neq q' \end{cases}$$

指数を求めるにはヘッセ 2 次形式 $H(X) = \frac{d^2}{dt^2}(f(L_A(\exp tX)))|_{t=0}$ を求め、ヘッセ双一次形式

$$B(X,Y) = \frac{1}{2}(H(X+Y) - H(X) - H(Y))$$

の係数行列をみる。

8.3 $U(n)$, $SU(n)$ 上の関数

$C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ として、ユニタリー群 $U(n)$ 上の関数

$$f : U(n) \to \mathbf{R}, \qquad X \mapsto \mathrm{Re}\,\mathrm{trace}(CX)$$

および、特殊ユニタリー群 $SU(n)$ 上の関数

$$f : SU(n) \to \mathbf{R}, \qquad X \mapsto \mathrm{Re}\,\mathrm{trace}(CX)$$

についても同様の解析が可能であるが、演習問題とはしない。

9 グラスマン多様体 (2011 年 6 月 22 日)

9.1 グラスマン多様体の定義

n 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の k 次元部分ベクトル空間の全体をグラスマン多様体といい $G(k,n)$ （または $G_{\mathbf{R}}(k,n)$, $G(k,\mathbf{R}^n)$) と表す。$\mathbf{R}^n$ の元 $a_1,\cdots,a_k$ に対しそれらの張る部分空間を、$\langle a_1 \ \ldots \ a_k\rangle$ で表す。

特に $G_{\mathbf{R}}(1,n+1)=P^n(\mathbf{R})$ である。$I=(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ $(1\le i_1<\cdots<i_k\le n)$ に対し

$$U_I=\{\langle a_1 \ \ldots \ a_k\rangle \mid a_{p,i_q}=\delta_{p,q}\}$$

とおくと、U_I 達は $G(k,n)$ を覆う。

演習 9.1. $G(2,4)$ について

$$U_{(1,2)}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a_{13}&a_{23}\\a_{14}&a_{24}\end{pmatrix}\right\},\quad U_{(1,3)}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\b_{12}&b_{22}\\0&1\\b_{14}&b_{24}\end{pmatrix}\right\},\quad U_{(3,4)}=\left\{\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}\\c_{12}&c_{22}\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

として、$(a_{13},a_{14},a_{23},a_{24})$, $(b_{12},b_{14},b_{22},b_{24})$, $(c_{11},c_{12},c_{21},c_{22})$ の間の変換式を求めよ。またそのヤコビ行列を計算せよ。

$W\in G(k,n)$ に対しその正規直交基底 $a_1,\ldots,a_k$ をとり、$A=(a_1,\ldots,a_k)$ とおくと ${}^tAA=I_k$ である。W への正射影を表す行列は $P=A{}^tA$ である。

演習 9.2. 写像 φ を次で定める。

$$\varphi: G(k,n)\to M(n\times n,\mathbf{R}),\quad W\mapsto P=A{}^tA$$

1. この写像は正規直交基底の選び方によらず定まることを示せ。
2. $P^2=P$ を示せ。$\operatorname{rank}P=k$ を示せ。
3. $W=\operatorname{Im}\{\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\ v\mapsto Pv\}$ を示せ。P は W への正射影を表す行列である。

9.2 商空間としてのグラスマン多様体

演習 9.3. $G(k,n)\simeq G(n-k,n)$ を示せ。

$\tilde{A}=(A\ A^{\perp})\in SO(n)$ $(A=(a_1\ \ldots\ a_k)$, $A^{\perp}=(a_{k+1}\ \ldots\ a_n)$, $a_i\in\mathbf{R}^n)$ に対し $P\in SO(k)$, $Q\in SO(n-k)$ の元を次で右から作用させる。

$$A\cdot(P,Q)=(AP\ A^{\perp}Q)$$

$\langle A\rangle = \langle AP\rangle$, $\langle A^{\perp}\rangle = \langle A^{\perp}Q\rangle$ なので、写像

$$p : SO(n) \to G(k,n), \qquad \tilde{A} = (A\ A^{\perp}) \mapsto \langle A\rangle,$$

は位相同型

$$\bar{p} : SO(n)/SO(k) \times SO(n-k) \to G(k,n)$$

を定める。実際 $W \in G(k,n)$ に対し、W の正規直交基底をとりそれを A とし、それを $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底に拡張したものを $\tilde{A}$ とすればこれが $\bar{p}$ の逆写像を与える。

自然な写像 $p : SO(n) \to G(k,n)$ に対し、次の完全列がある。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{I_k}SO(k) \times T_{I_{n-k}}SO(n-k) & \longrightarrow & T_{I_n}SO(n) & \longrightarrow & T_{p(I_n)}G(k,n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ & & \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k) & & \mathfrak{so}(n) & & & & \end{array}$$

よって $T_{p(I_n)}G(k,n) = \mathfrak{so}(n)/\mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k)$ である。$X_{p,q}$ $(1 \le p \le k < q \le n)$ の像がグラスマンの接空間を張っている事がわかる。この完全列に $L_{\tilde{A}}$ または $R_{\tilde{A}}$ $(\tilde{A} \in SO(n))$ を施して

$$T_{p(\tilde{A})}G(k,n) \simeq \frac{\tilde{A}\mathfrak{so}(n)}{\tilde{A}(\mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k))} \simeq \frac{\mathfrak{so}(n)\tilde{A}}{(\mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(n-k))\tilde{A}}$$

を得る。

9.3 グラスマン多様体上の関数

演習 9.4. $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ $(0 < c_1 < \cdots < c_n)$ とし $\mathbf{R}^n$ の部分空間 W の正規直交基底 $a_1, \ldots, a_k$ をとり $A = (a_1, \ldots, a_k)$ とおく。次で定まる関数を考える。

$$f : G(k,n) \to \mathbf{R}, \quad W = \langle A\rangle \mapsto \mathrm{trace}(CA^tA)$$

1. $G(2,4)$ について、臨界点と臨界値を求めよ。
2. $G(2,4)$ について、臨界点でのヘッセ行列を求め、その指数を計算せよ

ヒント: $X \in \mathfrak{so}(n)$ を取り、次の曲線に沿った f の微分を考える。

$$t \mapsto L_{\tilde{A}}(\exp(tX)) = \tilde{A}\exp(tX) = (A(t)\ A^{\perp}(t)), \quad A(t) = \tilde{A}\exp(tX)K, \quad K = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$$