解析学序論講義ノート (2013 年前期)

福井敏純

2013 年 7 月 17 日

目次

1 微分方程式とは

関数とその導関数を含む関係式を微分方程式という。関数の独立変数が 1 個のとき、常微分方程式、複数個あるとき偏微分方程式という。微分方程式が与えられた時、それを満たす関数をすべて求めることを、微分方程式を解くという。常微分方程式を解くこと、またその解の性質を調べることが本稿の主題である。

1.1 微分方程式を作る

微分方程式 $y' = f(x)$ を解くには $f(x)$ を積分すれば良い。その解の表示には積分定数と呼ばれる任意定数が含まれる。微分方程式を解くと、このようにその解の表示ははいくつかの任意定数を含むことが多い。

一般に微分方程式が与えられた時、どのような関数が解になるかを予め知りうることは滅多にない。しかしながら、いくつかの任意定数を含む与えられた関数を解にもつような微分方程式を作って見ることは、微分方程式を考察する際のヒントになることが多い。ここでは与えられた関数を解に持つような微分方程式を作ることを考えてみる。

■1 階線形微分方程式 関数 $y = cf(x)$ (c は定数) を解に持つ微分方程式を作ろう。微分して得られる式 $y' = cf'(x)$ と元の式から c を消去して次を得る。

$$f(x)y' - f'(x)y = 0$$

例 1.1. $y = \frac{c}{1-x}$, c は定数, を微分すると、$y' = \frac{c}{(1-x)^2}$ を得る。よってこれらから c を消去すると $y'/y = \frac{1}{1-x}$ を得る。

少し一般化して $y = g(x) + cf(x)$ (c は定数) を解に持つ微分方程式を作ろう。$y' = g'(x) + cf'(x)$ と連立させて c を消去すれば、次の微分方程式を得る。

$$f(x)y' - f'(x)y = g'(x)f(x) - g(x)f'(x)$$

例 1.2. $y = x + \frac{c}{1-x}$, c は定数, を微分すると、$y' = 1 + \frac{c}{(1-x)^2}$ を得る。よってこれらから c を消去すると $\frac{y'-1}{y-x} = \frac{1}{1-x}$ を得る。

■2 階線形微分方程式 $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ (c_1, c_2 は定数) を解に持つ微分方程式は

$$\begin{aligned} y - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x) =& 0 \\ y' - c_1 f_1'(x) - c_2 f_2''(x) =& 0 \\ y'' - c_1 f_1''(x) - c_2 f_2''(x) =& 0 \end{aligned}$$

から定数 c_1, c_2 を消去すれば良い。即ち

$$\begin{pmatrix} y & f_1(x) & f_2(x) \\ y' & f_1'(x) & f_2'(x) \\ y'' & f_1''(x) & f_2''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けるので求める微分方程式は次の形になる。

$$\begin{vmatrix} y & f_1(x) & f_2(x) \\ y' & f_1'(x) & f_2'(x) \\ y'' & f_1''(x) & f_2''(x) \end{vmatrix} = 0$$

例 1.3. $a > 0$ として、$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ (c_1, c_2 は定数) を解に持つ微分方程式を作ろう。

$$y' = a(-c_1 \sin ax + c_2 \cos ax) \qquad y'' = -a^2(c_1 \cos ax + c_2 \sin ax)$$

より、求める方程式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} y & \cos ax & \sin ax \\ y' & -a\sin ax & a\cos ax \\ y'' & -a^2 \cos ax & -a^2 \sin ax \end{vmatrix} = a(y'' + a^2 y) = 0$$

$y = g(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ (c_1, c_2 は定数) を解に持つ微分方程式を作りたければ

$$\begin{aligned} y - g(x) - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x) =& 0 \\ y' - g(x) - c_1 f_1'(x) - c_2 f_2''(x) =& 0 \\ y'' - g(x) - c_1 f_1''(x) - c_2 f_2''(x) =& 0 \end{aligned}$$

から定数 c_1, c_2 を消去すれば良い。即ち

$$\begin{pmatrix} y - g(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ y' - g'(x) & f_1'(x) & f_2'(x) \\ y'' - g''(x) & f_1''(x) & f_2''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので次を得る。

$$\begin{vmatrix} y-g(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ y'-g'(x) & f_1'(x) & f_2'(x) \\ y''-g''(x) & f_1''(x) & f_2''(x) \end{vmatrix} = 0$$

■曲線群を解に持つ微分方程式　曲線の 1 径数族 $f(x,y,c)=0$ を解に持つ微分方程式は、微分して得られる式 $f_x(x,y,c)+f_y(x,y,c)y'=0$ と連立させて c を消去すれば良い。

例 1.4. x 軸に接する放物線の族 $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$ (c 定数) を解に持つ微分方程式を求めよう。この式を微分すると $y'=\frac{1}{2}(x+c)$ なので、微分方程式 $(y')^2=y$ を得る。この微分方程式の解は $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$ の形に書けるもののみではない。$y=0$ もこの微分方程式を満たす。

上述のように常微分方程式は、未知関数とその導関数、または高次導関数の間の関係式として与えられる。微分方程式に含まれる最高次の導関数の階数をその微分方程式の**階数**という。n 階の微分方程式が与えられた時、n 個の任意定数を使って表された解をその微分方程式の**一般解**という。一般解の定数に特殊な値を代入して得られる解を**特殊解**という。一般解の形で表せない解をその微分方程式の**特異解**という。例 1.4 は特異解を持つ微分方程式の例を与えている。

1.2 応用

微分方程式は多くの応用を持つ。幾つか簡単な場合を説明する。

■脱出速度　地上から物体を打ち上げて、地球から脱出するための最小の初速度 v_0 を求めたい。時刻 t における物体と地球の中心との距離を $r=r(t)$ と書く。その時の物体の速度を $v=v(t)$ とすると、$v=\frac{dr}{dt}$. 万有引力の法則より

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{k}{r^2} \qquad (k \text{ 定数})$$

$r=R$ (R は地球の半径) としたとき、$a=-g$ (g は重力加速度) なので $k=-gR^2$ である。よって 次を得る。

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{gR^2}{r^2}$$

ここで v を r の関数と見ると $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}v$ なので、

$$v\frac{dv}{dr}=-\frac{gR^2}{r^2} \quad (\text{ つまり } vdv=-\frac{gR^2}{r^2}dr)$$

両辺を積分して

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + C \quad C\text{ は定数}$$

$r = R$ のとき $v = v_0$ なので $C = \frac{v_0^2}{2} - gR$

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR$$

$v = 0$ となれば物体は静止し（このとき $r = -\frac{2gR^2}{v_0^2 - 2gR}$ で）以後は地球に戻ると考えられる。よって $v_0^2 - 2gR > 0$ ならば物体は地球に戻らず、この時

$$v_0 > \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8(m/s^2) \times 6372(km)} = 11.2(km/s)$$

を得る。 脱出速度は、物体の高度が高いほど小さくなる。実際にロケットを飛ばす時地球から脱出させるには、十分高い高度でその高度での脱出速度に到達すれば、後は慣性飛行で重力圏を脱出することができる。

■電気回路　電圧 $E = E(t)$ の電池に、R オームの抵抗と、C ファラドのコンデンサーと L ヘンリーのコイルを直列につなぐ。コンデンサーに蓄電された電気量を Q クーロンとすればこの回路に流れる電流は $I = \frac{dQ}{dt}$ アンペアで、

- 抵抗での電圧低下は RI ボルト、
- コイルでの電圧低下は $L\frac{dI}{dt}$ ボルト
- コンデンサーでの電圧低下は Q/C ボルト

である。キルヒホッフの法則より次の微分方程式を得る。

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

よって

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t) \quad\text{または}\quad L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E'(t)$$

を得る。

■放射性同位元素の崩壊　時刻 t における放射性同位元素の数を $x(t)$ と書くと崩壊過程は次の方程式で表される。

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

λ は崩壊係数と呼ばれる定数である。$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ なので半減期 T は

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-\lambda T}$$

を解いて得られ $T = \log 2/\lambda$ となる。以下、ウラン系列の崩壊過程を示す。

^{238}U ウラン 238 は半減期 4.468×10^9 年で α 崩壊してトリウム 234 に

^{234}Th トリウム 234 は半減期 24.10 日で β 崩壊してプロトアクチニウム 234m に

^{234m}Pa プロトアクチニウム 234m は半減期 1.17 分で 99.34% の確率で β 崩壊してウラン 234 になり、また 0.16% の確率で核異性体転移を起こしプロトアクチニウム 234 に

^{234}Pa プロトアクチニウム 234 は半減期 6.7 時間で β 崩壊してウラン 234 に

^{234}U ウラン 234 は半減期 2.455×10^5 で α 崩壊してトリウム 230 になり

^{230}TI トリウム 230 は半減期 7.538×10^5 年で α 崩壊してラジウム 226 になり、

^{226}Ra ラジウム 226 が半減期 1600 年で α 崩壊して、ラドン 222 になり、

^{222}Rn ラドン 222 は半減期 3.824 日で α 崩壊して、ポロニウム 218 になり、

^{218}Po ポロニウム 218 は半減期 3.1 分で、99.98% の確率で α 崩壊して鉛 214 になり、0.02% の確率で β 崩壊してアスタチン 218 になり

^{218}At アスタチン 218 は半減期 1.6 秒で、99.9% の確率で α 崩壊してビスマス 214 になり 0.1% の確率で β 崩壊してラドン 218 になり

^{218}Rn ラドン 218 は半減期 3.5×10^{-2} で α 崩壊しポロニウム 214 に

^{214}Pb 鉛 214 は半減期 26.8 分で β 崩壊して、ビスマス 214 になり

^{214}Bi ビスマス 214 は半減期 19.9 分で, 00.21% の確率で β 崩壊して、タリウム 210 になり,、99.979% の確率で α 崩壊して、ポロニウム 214 になり

^{214}Po ポロニウム 214 は半減期 1.643×10^{-4} で α 崩壊し鉛 210 に

^{210}TI タリウム 210 は半減期 1.3 分で β 崩壊して鉛 210 に

^{210}Pb 鉛 210 は半減期 22.3 年で 1% の確率で α 崩壊し水銀 206 になり 99% の確率で β 崩壊して、ビスマス 210 になり

^{210}Bi ビスマス 210 は半減期 5.013 日で β 崩壊して、ポロニウム 210 になり,、

^{210}Po ポロニウム 210 は半減期 138.76 日で α 崩壊して鉛 206 になり

^{206}Hg 水銀 206 は半減期 8.15 分で β 崩壊してタリウム 206 になり

^{206}TI タリウム 206 は半減期 4.199 分で β 崩壊して鉛 206 になり

^{206}Pb 鉛 206 は安定である (実は非常に長い半減期を持つ放射性核種で α 崩壊して水銀 202 となって安定するのではないかと言う説もある)。

以上すべてを考慮して微分方程式作るのは複雑なので、ここではラジウム 226 からラドン 222 を経てポロニウム 218 に崩壊する過程を微分方程式にしてみる。時刻 t におけるラジウム、ラドン、ポロニウムの原子数をそれぞれ x_1, x_2, x_3 で表し、それぞれの崩壊係数を λ_1, λ_2 とすれば、次の微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\lambda_1 x_1\\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2\\ \frac{dx_3}{dt} &= \lambda_2 x_2\end{aligned}$$

■振動の方程式　Hooke の法則よりバネ（発条）の弾性力はバネの変位に比例する。この比例定数をバネ定数といい k で表す。

バネに質量 m の物体をつけ変位 s_0 で釣り合ったとする。すると重力と弾性力が釣り合っているのだから $mg = ks_0$. 物体を振動させたとき、時刻 t に於ける釣り合いの状態からの変位を $y = y(t)$ とすると、物体に加わる力は (重力)−(弾性力) なので

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k(s_0 + y) = -ky$$

よって、振動を記述する方程式は次で与えられる。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

これを解くと

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\text{但し}\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad C = \sqrt{A^2 + B^2},\quad \tan\delta = \frac{B}{A}$$

この振動の周期は $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ で、振動数は $f = 1/T = \frac{\omega_0}{2\pi}$ で与えられている。

この振動は未来永劫続く非減衰な振動であるが、実際の振動はしばしば摩擦などで減衰してやがて止まってしまう。この現象を説明するため、速度 $\frac{dy}{dt}$ に比例する減衰力 $c\frac{dy}{dt}$ $(c > 0)$ が物体に働くと考える。このときの運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

となるので、減衰振動の方程式はで与えられる。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{1}$$

特性方程式 $\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0$ は

1. $c^2>4mk$ のとき異なる 2 実解で、(1) の解は

$$y=c_1e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}+c_2e^{-\frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}$$

2. $c^2=4mk$ のとき実重解で、(1) の解は

$$y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{c}{2m}t}$$

3. $c^2<4mk$ のとき共役複素解で、(1) の解は

$$y=e^{-\frac{c}{2m}t}(A\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}t)$$

与えられる。強制的に物体にある力 $r(t)$ を加えて、振動を続けさせたいとしよう。強制振動の方程式は次で与えられる。

$$my''+cy'+ky=r(y)$$

例えば $r(t)=F_0\cos\omega t$ $(F_0>0,\,\omega>0)$ としてみよう。$y_p=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ とおいて、特解 y_p を求めてみる。

$$y_p'=\omega(-a\sin\omega t+b\cos\omega t)\qquad y_p''=-\omega^2(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

なので、

$$[(k-m\omega^2)a+\omega cb]\cos\omega t+[(k-m\omega^2)b+\omega ca]\sin\omega t=F_0\cos\omega t$$

となり、$k=m\omega_0^2$ に注意すれば、これを満たす a,b は次で与えられる。

$$a=F_0\frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2},\qquad b=F_0\frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

$c^*=\sqrt{a^2+b^2}$ とおき $\tan\eta=\frac{b}{a}$ なる η をとれば

$$y_p=c^*\cos(\omega t-\eta)$$

となる。$c^*=F_0(m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2)^{-1/2}$ である。$c\to0,\,\omega\to\omega_0$ のとき振幅 (c^*) が ∞ となり、共振[*1]と呼ばれる現象が起こっている。

$$\frac{dc^*}{d\omega}=\omega F_0[c^2-2m^2(\omega_0^2-\omega^2)][m^2(\omega_0^2-\omega^2)+\omega^2c^2]^{-3/2}$$

[*1] 固有振動数 $\sqrt{k/m}$ に近い周期で振動を与えると、振動の振幅が非常に大きくなる現象。

なので $c>0$ のときは $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2}}$ で c^* は最大値 $\frac{F_0}{c\sqrt{\omega_0^2+\frac{c^2}{4m^2}}}$ をとる。$c>0$ が非常に小さいとして、一般解を書くと次のようになる。

$$y=e^{-\frac{ct}{2m}}(A\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}t+B\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}t)+\frac{F_0(m(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\omega c\sin\omega t)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

ここで $c=0,\ A=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ とおくと

$$y=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t)=\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{\omega_0+\omega}{2}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t$$

を得る。$\omega\to\omega_0$ のとき 振幅が ∞, $\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t$ の振動数が 0 に近くなりうなり[*2]と呼ばれる現象が起こる。

■1 次元格子振動　n 個の質量 m の質点がバネで $\mathbf{R}$ 上繋がれている。i 番目の質点の位置を x_i と書くと、x_i と x_{i+1} を結ぶバネのバネ定数を k_i とすると、運動方程式は次のように書かれる。

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2}=\begin{cases}k_1(x_2-x_1) & (i=1)\\ k_i(x_{i+1}-x_i)-k_{i-1}(x_i-x_{i-1}) & (i=2,\dots,n-1)\\ -k_{n-1}(x_n-x_{n-1}) & (i=n)\end{cases}$$

■ロジスティック方程式　x を生物の個体数とし a をその生物が実現しうる最大の増加率、b をその環境における生物の最大の個体数とする。1838 年にピエール＝フランソワ・フェルフルストは個体数の増加率は

- 個体数 0 では増加率も 0
- 個体数が増加するに連れて増加率は減少する。
- その環境における生物の最大の個体数では増加率は 0

を満たすべきと考え、次の微分方程式を考案し、ロジスティック[*3]方程式と名付けた。

$$\frac{dx}{dt}=ax(1-\frac{x}{b})$$

この方程式は変数分離形であり、容易に解ける。まず変数を分離すると

$$\frac{dx}{x(1-\frac{x}{b})}=a\,dt$$

[*2] 振動数がわずかに異なる二つの音が鳴っているとき、各々の基音の振動数の差に相当する周期で音の強弱が聞かれる現象。

[*3] 日本語では「兵站」、戦闘地帯から後方の、軍の諸活動機関諸施設を総称である。ピエール＝フランソワ・フェルフルストは兵站学の教官であったのでこの名がある。

となるが、左辺が $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{b-x}\right)dx$ となるので、積分すると

$$\log x - \log(b-x) = at + \text{定数}$$

を得る。よって $\frac{x}{b-x} = Ce^{at}$ となり、書き換えて次のような解の表示を得る。

$$x = \frac{bCe^{at}}{1+Ce^{at}}$$

バクテリアの増殖、伝染病感染者数などもこの方程式でモデルを作ることができる。

2　求積法

不定積分を用いて微分方程式を解くことを、微分方程式を求積法で解くという。この章では、求積法の基本事項を説明する。

2.1　変数分離形

$y' = f(x)g(y)$ なる微分方程式を**変数分離形**の微分方程式という。これを

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad (\text{または } \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx)$$

と書き、x で積分して

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx \qquad (\text{または } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx)$$

を得る。

■同次形　$y' = f(\frac{y}{x})$ のタイプに書ける微分方程式を**同次形**の微分方程式という。このとき $y = ux$ とおくと、$y' = u'x + u$ なので

$$u'x + u = f(u)$$

となり

$$u' = \frac{f(u)-u}{x} \qquad (\text{または}\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x})$$

変数分離形に帰着する。

2.2　完全微分方程式と積分因子

全微分方程式 $P\,dx + Q\,dy = 0$ が**完全**であるとは $P = u_x$, $Q = u_y$ となる関数 $u(x, y)$ が存在する時を言う。このとき $du = P\,dx + Q\,dy = 0$ なので、$u(x, y) = C$ (C は定数) が解曲線となる。

定理 2.1. $P\,dx + Q\,dy = 0$ が完全微分方程式である事の必要十分条件は次で与えられる。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

証明. 完全微分方程式ならば $u_x = P$, $u_y = Q$ となる関数 $u = u(x, y)$ が存在するので

$$P_y = (u_x)_y = (u_y)_x = Q_x$$

となる。逆に $P_y = Q_x$ であれば、完全微分形であることを示す。x を定数と見たとき $Q(x, y)$ の変数 x による不定積分

$$f(x, y) = \int P(x, y)dx, \quad C(x) \text{ は } x \text{ だけの関数}$$

を考える。$f_x = P$, $f_{xy} = P_y = Q_x$ なので。$(f_y - Q)_x = 0$ となり、$g(y) = f_y - Q$ は、x に依存せず、変数 y だけに依存する関数である。$G'(y) = g(y)$ となる関数 $G(y)$ をとれば

$$P\,dx + Q\,dy = f_x dx + (f_y - g)dy = df - g(y)dy = d(f(x, y) - G(y))$$

を得るので $u = f(x, y) - G(y)$ と置けば良い。 □

演習 2.2. $P\,dx + Q{\cdot}dy = 0$ が完全微分方程式ならば $P\,dx + Q\,dy = du$ なる関数 u 　が存在するが、このとき $H(u)(P\,dc + Q\,dy) = 0$ も完全微分方程式である。
解: 仮定より $P_y = Q_x$, $u_x = P$, $u_y = Q$ なので

$$(HP)_y = H'u_yP + HP_y = H'PQ + HP_y = H'u_xQLHQ_y = (HQ)_x$$

$P\,dx + Q\,dy$ が完全微分形でなくても $\lambda(P\,dx + Q\,dy) = 0$ が完全微分形であることがある。そのような λ を**積分因子**という。

例 2.3. $x\,dy - y\,dx = 0$ は完全微分方程式ではないが

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

なので、$\frac{1}{x^2}$ が積分因子となる。積分因子は他にもある。例えば

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

なので $1/(x^2 + y^2)$ も積分因子である。

積分因子の満たすべき条件は、

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$$

であるので、

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}P + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Big(\text{または移項して} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}Q - \frac{\partial\lambda}{\partial y}P = \lambda(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big)$$

となる。

系 2.4. 全微分方程式 $P\,dx + Q\,dy = 0$ について次が成り立つ。

1. x だけの関数の積分因子を持つ必要十分条件は $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$ が x だけの関数になることである。
2. y だけの関数の積分因子を持つ必要十分条件は $\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$ が y だけの関数になることである。

微分方程式 $P\,dx + Q\,dy = 0$ の解と微分方程式 $\lambda(P\,dx + Q\,dy) = 0$ の解は完全に一致するとは限らない。実際、$\lambda = 0$ なる点があれば後者の解で前者の解でないものがあるかもしれない。また λ が定義されない点があれば前者の解で後者の解でないものがあるかもしれない。

例 2.5. $(x^2\sin x - 2y)dx + 2xdy = 0$
$\dfrac{(x^2\sin x - 2y)_y - (2x)_x}{(2x)} = \frac{-4}{2x} = -\frac{2}{x}$ は x だけの式なので $e^{-\int\frac{2}{x}dx} = x^{-2}$ が積分因子。

$$(\sin x - \frac{2y}{x^2})dx + \frac{2}{x}dx = d(\frac{2y}{x} - \cos x)$$

より $\frac{2y}{x} - \cos x = C$ が解。書き直すと $y = Cx + \frac{x}{2}\cos x$ を得る,

2.3 1 階線形常微分方程式

■斉次 1 階線形常微分方程式 1 階常微分方程式 $y' + p(x)y = 0$ を斉次線形 1 階微分方程式という。この方程式は変数分離形であり簡単に解くことができる。。実際

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

なので、積分して

$$\log|y| = -\int p(x)dx$$

となり、次を得る。

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},\ C \text{ は任意定数}$$

演習 2.6. 方程式を次の形に書き直し積分因子を探して解け。

$$dy + p(x)y\,dx$$

$p(x)\,dx + \frac{dy}{y} = 0$ と見ると完全微分方程式で $d(\int p(x)dx + \log|y|) = 0$ となる。

■1 階線形常微分方程式 次の形の微分方程式を非斉次形 1 階線形微分方程式というが、これは求積法で解くことができる。

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$y' + p(x)y = 0$ の解は $y = Cy_0$, $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$, であった。定数 C を関数 u に変えた $y = uy_0$ の形をした解を探す方法を**定数変化法**というが、ここではこれがうまくいくことを示す。

$$y' + p(x)y = u'y_0 + uy_0' + p(x)y = (u' - up(x) + p(x)u)y_0 = u'y_0$$

なので、これが $q(x)$ に等しいいとすると、整理して $u' = q(x)y_0^{-1}$ を得る。よって $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$ を考慮すれば

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

を得る。よって解は次のように表示される。

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

■ベルヌーイの微分方程式　次の形の微分方程式を**ベルヌーイの微分方程式**という。

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq 0, 1) \tag{2}$$

$u = y^{1-n}$ とおくと $\frac{du}{dy} = -(n-1)y^{-n}$. これを (2) の両辺にかけると

$$y'\frac{du}{dy} - (n-1)p(x)y^{1-n} = -(n-1)q(x)$$

$y'\frac{du}{dy} = u'$ なので、次の 1 階線形微分方程式を得る。

$$u' - (n-1)p(x)u = (1-n)q(x)$$

■リカッチの微分方程式　次の形の微分方程式を**リカッチの微分方程式**という。

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

この方程式の解 y_1 が 1 つ分かったとして、一般解を求める。$y = y_1 + u$ とおくと

$$y_1' + u' + p(x)(y_1 + u)^2 + q(x)(y_1 + u) + r(x) = 0$$

すると $y_1' + p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x) = 0$ より

$$u' + p(x)(2y_1u + u^2) + q(x)u = 0$$

これは次の形のベルヌーイの微分方程式に還元される。

$$u' + (2p(x)y_1 + q(x))u = -p(x)u^2$$

2.4　特異解を持つ微分方程式

c を定数として $F(x,y,c) = 0$ の定める曲線の族の包絡線は

$$F(x,y,c) = F_c(x,y,c) = 0$$

から c を消去して得られる。$F(x,y,c) = 0$ を x で微分すると

$$F_x(x,y,c) + F_y(x,y,c)y' = 0$$

これと $F(x,y,c) = 0$ から c を消去すると曲線族 $F(x,y,c)$ が満たす微分方程式を得る。
$F_{xc}(x,y,c) + F_{yc}(x,y,c)y' \neq 0$ ならば

$$F_x(x,y,\varphi(x,y,p)) + F_y(x,y,\varphi(x,y,p))p = 0$$

なる関数 $\varphi(x,y,p)$ が存在する。求める方程式は次の形をしている。

$$F(x,y,\varphi(x,y,y'))=0$$

曲線族に包絡線が存在すれば、包絡線は曲線族の各曲線に接するのでこの微分方程式の解になる。

例 2.7 (クレーローの方程式)**.** 曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は次で与えられる。

$$y=f'(c)(x-c)+f(c)$$

これを x で微分する $y'=f'(c)$ を得るので、連立させて c を消去する。f' の逆関数を g と書くと、$y=f'(c)$ より $c=g(y')$ と書けるので、

$$y=y'(x-g(y'))+f(g(y'))=xy'+F(y'),\qquad F(y')=f(g(y'))-y'g(y')$$

を得る。微分方程式

$$y=xy'+F(y') \tag{3}$$

をクレーローの微分方程式という。(3) を微分すると

$$y'=y'+xy''+F'(y')y''\quad \text{なので整理すると } y''(x+F'(y'))=0$$

$y''=0$ とすると、$y=c_1x+c_2$ (c_1, c_2 は定数。) その解は $y=cx+F(c)$ である。これを (3) に代入すると、

$$c_1x+xc_2=c_1x+F(c_1)\quad\text{なので}\quad c_2=F(c_1)\quad\text{を得る。}$$

よって $y=cx+F(c)$ が (3) の一般解である。一般解の式を c で微分して零と置くと $x+F'(c)=0$ であるが、この式と一般解の式から c を消去すると包絡線の式 (特異解) を得る。

$(t,\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots.x_n)$, を座標系とする $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の超曲面 $t=f(\boldsymbol{x})$ とその上のベクトル

$$v=\partial_t+v_1\partial_{x_1}+\cdots+v_n\partial_{x_n}$$

が与えられた時 点 $(f(c),c)$, $c=(c_1,\ldots,c_n)$, を通り $(1,v(c))$ 方向の直線の方程式は

$$\boldsymbol{x}(t)=c+(t-f(c))v(c) \tag{4}$$

で与えられる。$\dot{\boldsymbol{x}}=v(c)$ なのでこれを c について解いて $c=\varphi(\dot{\boldsymbol{x}})$ と書くとき, 次の微分方程式を得る。

$$\boldsymbol{x}=\varphi(\dot{\boldsymbol{x}})+(t-f(\varphi(\dot{\boldsymbol{x}})))v(\varphi(\dot{\boldsymbol{x}}))$$

$p(\dot{\boldsymbol{x}}) = v(\varphi(\dot{\boldsymbol{x}}))$, $q(\dot{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{x}}) - f(\varphi(\dot{\boldsymbol{x}}))v(\varphi(\dot{\boldsymbol{x}}))$ と置けば

$$\boldsymbol{x} = tp(\dot{\boldsymbol{x}}) + q(\dot{\boldsymbol{x}})$$

(4) はこの方程式の解であるが、v の積分曲線もこの方程式を満たす。

2.5　2 階線形常微分方程式

■斉次線形常微分方程式

定理 2.8. 斉次線形常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5}$$

の 1 次独立な解を y_1, y_2 とすると、

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad c_1,\, c_2 \text{ は任意定数} \tag{6}$$

は (5) の解である。逆に、(5) の任意の解は (6) の形に表すこと事ができる。

このとき y_1, y_2 は (5) の**基本解**であるという。

証明. y_0, y_1, y_2 が (5) の解であるとすると

$$y_i'' + p(x)y_i' + q(x)y_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

なので、$w_0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ と書くと、Cramer の公式より $p(x) = -\dfrac{\begin{vmatrix} y_1'' & y_1 \\ y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}} = -\dfrac{w_0'}{w_0}$ となり

$$p(x) = -\frac{w_0'}{w_0} \quad \text{つまり} \quad w_0 = A_0e^{-\int p(xd)dx} \qquad A_0 \text{ は定数}$$

同様にして $w_1 = \begin{vmatrix} y_0 & y_2 \\ y_0'' & y_2' \end{vmatrix}$ とおくと、$p(x) = -\frac{w_1'}{w_1}$ で　$w_1 = A_1e^{-\int p(x)dx}$, A_1 は定数

$w_2 = \begin{vmatrix} y_0' & y_0 \\ y_1' & y_1 \end{vmatrix}$ とおくと、$p(x) = -\frac{w_2'}{w_2}$ で　$w_2 = A_2e^{-\int p(x)dx}$, A_2 は定数.

よって

$$0 = \begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ y_0' & y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_0 w_0 - y_1 w_1 + u_2 w_2 = (y_0 A_0 - y_1 A_1 + u_2 A_2) e^{-\int p(x)dx}$$

より $y_0 = \frac{A_1}{A_0} y_1 - \frac{A_2}{A_0} y_2$. y_0 は y_1 と y_2 の 1 次結合で表された。 □

証明中に現れた $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ を y_1, y_2 の**ロンスキアン**といい $W(y_1, y_2)$ で表す。y_1, y_2 が (5) の解ならば、上の証明中に示したように

$$W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p(x)cx}, A \text{ は定数}$$

となるので、$W(y_1, y_2)$ がある点で 0 となる事は $A = 0$ であること、即ち $W(y_1, y_2)$ が恒等的に 0 であることと同値であり、これは y_1 と y_2 が 1 次従属であることと同値である。したがって、(5) の解 y_1, y_2 が基本解であるための必要十分条件は $W(y_1, y_2)$ が恒等的には 0 でないことである。

定理 2.9. 非斉次線形常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{7}$$

の 1 つの解を y_0, 斉次線形常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{8}$$

の 1 次独立な解を y_1, y_2 とすると、

$$y = y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad c_1, c_2 \text{ は任意定数} \tag{9}$$

は (7) の解である。逆に、(7) の任意の解は (9) の形に表すこと事ができる。

証明. y を (7) の解とすると、$y - y_0$ は (5) の解なので前定理より $y - y_0$ は基本解 y_1, y_2 の 1 次結合で表せる。 □

■2 階定数係数線形微分方程式　a, b を定数として、次の定数係数の斉次 2 階線形微分方程式を考える。

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{10}$$

$D = \frac{d}{dx}$ とおくと、この方程式は $(D^2 + aD + b)y = 0$ と書ける。$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ とすれば、(10) は

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = 0$$

となる。よって $(D-\alpha)y=0$, $(D-\beta)y=0$ の解は (10) の解である。$(D-\alpha)y=0$ は $y'=\alpha y$ なので $y=e^{\alpha x}$ が解である。同様に $(D-\beta)y=0$ は $y=e^{\beta x}$ が解である。よって $y_1=e^{\alpha x}$, $y_2=e^{\beta x}$ が (10) の基本解であると期待できる。α,β が相異なる実数のときはこれでよいが、そうでないことも起こりうる。α,β が実数でない複素数のときは (10) の解として実数値関数を得るためには複素数の指数関数 $e^{p+q\sqrt{-1}}=e^p(\cos q+\sqrt{-1}\sin q)$ を考慮して書き換える必要がある。重解の時は定数変化法を用いる。即ち、$y=ue^{\alpha x}$ を (10) に代入すると

$$u''e^{\alpha x}+2\alpha u'e^{\alpha x}+u\alpha^2e^{\alpha x}-2\alpha(u'e^{\alpha x}+u\alpha e^{\alpha x})+\alpha^2ue^{\alpha x}=0$$

であるが整理すると、$u''e^{\alpha x}=0$ となる。よって、$u''=0$ の解として $u=x$ を選べば、$xe^{\alpha x}$ が (10) の解である事がわかる。以上を考慮すると次が成り立つ。

定理 2.10. (10) の基本解は次で与えられる。

- $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が相異なる 2 実解を持つならば $y_1=e^{\alpha x}$, $y_2=e^{\beta x}$ が基本解
- $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重解 α をもてば $y_1=e^{\alpha x}$, $y_2=xe^{\alpha x}$ が基本解
- $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役複素解 $p\pm q\sqrt{-1}$ をもてば $y_1=e^{px}\cos qx$, $y_2=e^{px}\sin qx$ が基本解

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ を (10) の**特性方程式**という。

証明. これらが (10) の解である事を代入して確かめ、ロンスキアンを計算し 1 次独立性を示せば良い。

$$\begin{aligned}
W(e^{\alpha x},e^{\beta x})&=\begin{vmatrix}e^{\alpha x}&e^{\beta x}\\ \alpha e^{\alpha x}&\beta e^{\beta x}\end{vmatrix}=(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)x}\\
W(e^{\alpha x},xe^{\alpha x})&=\begin{vmatrix}e^{\alpha x}&xe^{\alpha x}\\ \alpha e^{\alpha x}&(1+\alpha x)e^{\alpha x}\end{vmatrix}=e^{2\alpha x}\begin{vmatrix}1&x\\ \alpha&1+\alpha x\end{vmatrix}=e^{2\alpha x}\\
W(e^{px}\cos qx,e^{px}\sin qx)&=\begin{vmatrix}e^{px}\cos qx&e^{px}\sin qx\\ e^{px}(p\cos qx-q\sin qx)&e^{px}(p\sin qx+q\cos qx)\end{vmatrix}\\
&=e^{2px}q(\cos^2qx+\sin^2qx)=qe^{2px}
\end{aligned}$$

□

定理 2.9 より、微分方程式

$$y''+ay'+by=r(x) \tag{11}$$

を解くには、この方程式の解 y_p を 1 つ見つければ十分である。そのために $r(x)$ の形から y_p の形を推測して、(11) に代入し未定係数法で係数を決めてやる方法がうまくいくならば最も手軽である。以下にいくつか典型的な場合に推測特解の形を示す。

$r(x)$	y_p のタイプ（推測特解）
kx^n	$K_nx^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1x + K_0$
ke^{px}	Ce^{px}
$k\cos qx$ $k\sin qx$	$K\cos qx + L\sin qx$
$kx^n\cos qx$ $kx^n\sin qx$	$(K_nx^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_0)\cos qx$ $+(L_nx^n + L_{n-1}x^{n-1} + \cdots + L_0)\sin qx$

$r(x)$ が左の列の関数の和の時は対応する推測特解の和をとる。もし、$r(x)$ が $y''+ay'+b=0$ の解であれば、対応する推測特解 y_p に x を掛けた xy_p を推測特解とする。もし xy_p も $y''+ay'+b=0$ の解であれば、x^2y_p を推測特解とする。

■階数の低下　$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ の解 $y_1(x)$ が 1 つわかっている時、$y=uy_1$ とおいて

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{12}$$

に代入して整理すると u' についての 1 階の微分方程式が得られる。実際

$$\begin{aligned} y &= uy_1 \\ y' &= uy_1' + u'y_1 \\ y'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 \end{aligned}$$

なので (12) に代入して整理すると

$$u''y_1 + (2y_1' + p(x))u' = r(x)$$

となり、$v=u'$ を未知関数と見た時、v についての 1 階の微分方程式となる。

例 2.11 (Cauchy の微分方程式)**.** $x^2y''+axy'+by=0$ に $y=x^m$ を代入すると、

$$[m(m-1)+am+b]x^m = 0$$

となり、$m(m-1)+am+b=0$ が 2 つの解 m_1, m_2 を持てば、$y_1=x^{m_1}$, $y_2=x^{m_3}$ が基本解となる。$m(m-1)+am+b=0$ が重解 m を持てば、$b=(a-1)^2/4$ であり

$m = \frac{1-a}{2}$ が解となる。$y = ux^m$ を元の微分方程式に代入すると $y' = u'x^m + mux^{m-1}$, $y'' = u''x^m + 2u'mx^{m-1} + um(m-1)x^{m-2}$ であるから

$$u''x^{m+2} + 2mu'x^{m+1} + au'x^{m+1} = 0$$

なので $2m + a = 1$ に注意すれば $u''x + u' = 0$ を得る。$p = u'$ と置くと $p'x + p = 0$ なので $dp/dx + p/x = 0$ よって $dp/p = -dx/x$ であり $\log p = -\log x$ すなわち $p = 1/x$ を得る。よって $u = \int p\,dx = \log x$ よって $y = (c_1 + c_2 \log x)x^m$ が一般解となる。

例 2.12. $xy'' + xy' - y = 0$ は $y = x$ を解に持つので、$y = ux$ とおいて次式に代入してみる。

$$xy'' + xy' - y = r(x) \tag{13}$$

$y' = u'x + u$, $y'' = u''x + 2u'$ なので $x(u''x + 2u') + x(u'x + u) - ux = 0$ となり

$$u'' + (1 + 2/x)u' = r(x)/x^2 \tag{14}$$

を得る。$p = u'$ と置くと $p' + (1 + 2/x)p = 0$ を得るが、これを解くと

$$\frac{dp}{dx} = -(1 + \frac{2}{x})p$$

となり $\frac{dp}{p} = -(1 + \frac{2}{x})dx$ を得るので

$$\log p = -x - 2\log x \quad \text{つまり} \quad p = x^{-2}e^{-x}$$

$p = vx^{-2}e^{-x}$ を (14) に代入すると $p' = v'x^{-2}e^{-x} + v(x^{-2}e^{-x})'$ より

$$v'x^{-2}e^{-x} = r(x)/x^2 \qquad \text{つまり} \qquad v' = e^x r(x) \qquad \text{書き換えて} \qquad v = \int r(x)e^x dx$$

を得る。よって (13) の特殊解として次を得る。

$$y = ux = x\int p\,dx = x\int vx^{-2}e^{-x}dx = x\int\left(\int r(x)e^x dx\right)x^{-2}e^{-x}dx$$

$r(x) = 0$ の時は $y = x\int x^{-2}e^{-x}dx$ となる。

3 常微分方程式の解の存在と一意性

微分方程式が与えられた時、求積法で解く事ができれば、与えられた微分方程式の解は存在することがわかる。しかし、求積法では解けない微分方程式も多い。そのような方程

式を扱うときは、解が存在するかどうか、存在したときその解はどんな振る舞いをするか（たとえな初期条件に関する一意性）が問題になる。本節では、解の存在と一意性について、基本事項を解説する。

3.1　高階の微分方程式の 1 階の微分方程式への還元

n 階常微分方程式 $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ は、変数を増やせば 1 階の常微分方程式に還元することができる。実際、

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

とおくと、次の 1 階連立微分方程式を得る。

$$\frac{d}{dt}y_1 = y_2 \qquad \cdots \qquad \frac{d}{dt}y_{n-1} = y_n \qquad \frac{d}{dt}y_n = f(x, y_1, \dots, y_n)$$

これは、ベクトル記法を用いて、次のように書くこともできる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

3.2　解の存在と一意性

ここではより一般に独立変数 t が区間 $I = [a, b]$ を動くとき, n 個の関数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ が満たす連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = & f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ & \cdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = & f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

を，$x_1(a) = x_{0,1}, \dots, x_n(a) = x_{0,n}$ なる条件 (初期条件という) の下に，考える．

$\boldsymbol{x}(t)$ で t を変数とするベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ を表すと，この方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0 \tag{15}$$

となる．この 2 番目の式を初期条件という。ここで

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$$

である．この式を，区間 $[a,t]$ で積分すると，次の積分方程式を得る．

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(a) = \int_a^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds$$

ここで右辺は，成分毎の積分 $(\int_a^t f_1(s,\boldsymbol{x}(s))ds,\dots,\int_a^t f_n(s,\boldsymbol{x}(s))ds)$ を表す．$\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$ を左辺から右辺に移項して次の積分方程式を得る．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds \tag{16}$$

微分方程式 (15) を解くことは，積分方程式 (16) を解くことと同値である．さて積分方程式 (16) の解を，Picard の逐次近似法と呼ばれる方法で構成する．これは (16) の解の近似列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$ を次の方法で定める方法である．

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_k(s))ds, \qquad k = 0,1,2,\dots \tag{17}$$

ただし $\boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{x}_0$ と定めておく．もし，$\boldsymbol{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ が存在するならば，(17) で，$k \to \infty$ とすれば $\boldsymbol{x}(t)$ は積分方程式 (16) となるので，極限関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は微分方程式 (15) の解と考えられる．

定義 3.1 (Lipschitz 連続性)**.** ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が $t \in [a,b]$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対し定義されているとする．$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ に関し **Lipschitz 連続**であるとは，ある定数 L があって

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}')| \le L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \tag{18}$$

が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}^n$ について成り立つときを言う．

例 3.2. $f(t,x)$ が $x \in \mathbf{R}$ に関して連続微分可能で $|\frac{df}{dx}| \le L$ なる定数 L が存在すれば，$f(t,x) - f(t,x') = \frac{df}{dx}(\xi)(x-x')$ なる ξ が x と x' の間に存在するので

$$|f(t,x) - f(t,x')| = \left|\frac{df}{dx}(\xi)(x-x')\right| \le L|x-x'|$$

となり，$f(t,x)$ は，Lipschitz 連続である．

例えば，α を正の定数とするとき，$f(x) = x^\alpha$ が $x \in \mathbf{R}$ に関して Lipschitz 連続であることと $\alpha \ge 1$ は同値である．

例 3.3. n を正の整数とし，ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = (f_1(t,\boldsymbol{x}),\dots,f_n(t,\boldsymbol{x}))$ が $t \in [a,b]$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対し定義されているとする．$f_j(t,\boldsymbol{x})$, $j=1,\dots,n$, が $\boldsymbol{x}$ に関して連続偏微分可能で $|\frac{df_j}{dx_i}| \le L$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,n$ なる定数 L が存在すれば，$f_j(t,\boldsymbol{x}) - f_j(t,\boldsymbol{x}') = \sum_{i=1}^n \frac{df_j}{dx_i}(\boldsymbol{\xi})(x_i - x_i')$ なる $\boldsymbol{\xi}$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ を結ぶ線分上に存在するので

$$|f_j(t,\boldsymbol{x}) - f_j(t,\boldsymbol{x}')| \le \sum_{i=1}^n \left|\frac{df_j}{dx_i}(\xi)\right| |x_i - x_i'| \le nL|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$$

となり，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ は，Lipschitz 連続である．

定理 3.4. $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が t について連続で，$\boldsymbol{x}$ に関し Lipschitz 連続であれば，(17) で定義した $\boldsymbol{x}_k(t)$ に対し，その極限 $\boldsymbol{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ が存在し，連続である．

証明. $f(t,\boldsymbol{x}_0)$ は t に関して連続なので $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)| \le K_1$, $t \in I$, なる定数 K_1 が存在する．

$$|\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_0| = \left|\int_a^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_0)ds\right| \le \int_a^t |\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_0)|ds \le \int_a^t K_1 ds = K_1(t-a) \le K$$

なる評価式が成り立つ．ここで $K = K_1(b-a)$ とおいている．さて次の評価式が成り立つことを k に関する数学的帰納法で示そう．

$$|\boldsymbol{x}_{k+1}(t) - \boldsymbol{x}_k(t)| \le KL^k \frac{(t-a)^k}{k!}$$

$k=0$ の時は，今，示した式そのものである．$k-1$ の時を仮定して k の時を示す．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}_{k+1}(t) - \boldsymbol{x}_k(t)| &= \left|\int_a^t (\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_k(s)) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{k-1}(s)))ds\right| \\
&\le \int_a^t |\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_k(s)) - \boldsymbol{x}(s,\boldsymbol{f}_{k-1}(s))|ds \\
&\le \int_a^t L|\boldsymbol{x}_k(s) - \boldsymbol{x}_{k-1}(s))|ds \quad (\text{Lipschitz 連続性}) \\
&\le \int_a^t KL^{k-1}\frac{(s-a)^{k-1}}{(k-1)!}ds \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&\le KL^k \frac{(t-a)^k}{k!}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}_k(t)| &\le |\boldsymbol{x}_0| + |\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_0| + |\boldsymbol{x}_2(t) - \boldsymbol{x}_1(t)| + \cdots + +|\boldsymbol{x}_k(t) - \boldsymbol{x}_{k-1}(t)| \\
&\le |\boldsymbol{x}_0| + K + KL(t-a) + KL^2\frac{(t-a)^2}{2} + \cdots + KL^{k-1}\frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

$$\to |\boldsymbol{x}_0| + Ke^{L(t-a)} \quad (k \to \infty)$$

となり $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ の存在と，一様収束性がわかった．よって極限関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は連続である． □

$\mathbf{R}^n$ の領域 U に属する $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対し、条件 (18) が成り立つとき、領域 U で Lipshitz 連続という．このときも上の証明と同様にして，$\boldsymbol{x}(t)$ が収束することを証明することが出来る．しかしながら，上の証明法では，すべての k に対し $\boldsymbol{x}_k(t)$ が U に属している必要がある．よって，証明できることは，t に関して局所的な $\boldsymbol{x}(t)$ の存在である．つまり，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$a \le t \le a+\varepsilon$ なる任意の t に対しては $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ が収束することが証明できる．

定理 3.5 (解の一意性)**.** $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が t について，区間 $I=[a,b]$ で連続で，$\boldsymbol{x}$ に関し Lipschitz 連続であれば (15) の解は (存在するならば) 唯一つである．

証明. $t_0 = a$ と置く．$\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ を 2 つの解とすると，次を満たす。

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds \qquad \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}_0 = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))ds$$

辺々を引き算して、Lipschitz 連続性を使うと次を得る．

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)| \le \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(s))|ds \le L\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}(s)|ds$$

t_1 を任意にとり $M = \max_{t\in[t_0,t_1]} |\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)| = |\boldsymbol{x}(t_1')-\boldsymbol{y}(t_1')|$ なるように t_1' を選ぶと

$$\begin{aligned} M =& |\boldsymbol{x}(t_1')-\boldsymbol{y}(t_1')| \le L\int_{t_0}^{t_1'} |\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}(s)|ds \quad (\text{今示した不等式}) \\ \le& L\int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{x}(s)-\boldsymbol{y}(s)|ds \le L\int_{t_0}^{t_1} Mds = LM(t_1-t_0) \end{aligned}$$

ここで t_1 は任意に選べたから，$t_1 - t_0 = \frac{1}{2L}$ なるように t_1 を選ぶと，

$$M \le LM(t_1-t_0) = \frac{M}{2}$$

となり，$M \ge 0$ なので，$M=0$ でなければならない．M の定義より $[t_0,t_1]$ 上 $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ は一致することがわかる．さて，区間 $[t_0,t_1]$ の幅 $1/2L$ は，$t_0, \boldsymbol{x}_0$ に関係ない定数であった．よって区間 $[t_0,t_1]$ の隣の幅 $1/2L$ の区間でも $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ が一致することが示せる．この操作を必要なだけ繰り返せば，考えている区間 $I=[a,b]$ での $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}(t)$ となり，解の一意性が示せたことになる． □

演習 3.6. 次の微分方程式に対して逐次近似を実行せよ.

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0$$

演習 3.7. 微分方程式 $x'' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ を次の連立微分方程式に直して, 逐次近似を実行せよ.

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = & 0 \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

演習 3.8. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 1$, とする. $U = \{x \mid |x| \leq R\}$, R は正定数, とするとき, $f(x)$ は U 上 Lipschitz 連続であることを示せ.

例 3.9. p を正の実数とし、実数値関数 $x = x(t)$ が次を満たすとする。

$$\dot{x}(t) = ax^p, \qquad x(t_0) = x_0$$

この方程式は変数分離形であり、簡単に解くことができる。実際 $x \neq 0$ のとき $\frac{dx}{x^p} = adt$ なので、 $p \neq 1$ ならば $\frac{x^{1-p}}{1-p} = at + c$ となり

$$x = [(1-p)(at+c)]^{\frac{1}{1-p}} \tag{19}$$

$t = t_0$ のときは $\frac{{x_0}^{1-p}}{1-p} = at_0 + c$ を得るので

$$x = [(1-p)a(t-t_0) + {x_0}^{1-p}]^{\frac{1}{1-p}}$$

$x_0 = 0$ のときは $p > 1$ のときは (19) は定義されないが $0 < p < 1$ のとき (19) は定義され微分可能である。$x(t) = 0$ も解なので次のような解も存在する。

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq t_1) \\ [(1-\alpha)a(t-t_1)]^{\frac{1}{1-\alpha}} & (t \geq t_1) \end{cases}$$

これは解の一意性が成立しない例になっている。$p = 1$ のときは、$\log|x| = at + c$ なので、$x = Ce^{at}$ が解となる。$p \geq 1$ のときは $0 \leq x \leq 1$ で Lipschitz 条件は満たすが、$0 < p < 1$ のときは満たさないことに注意しておこう。

演習 3.10. $x = x(t)$ に関する, 次の微分方程式を (求積法で) 解き, 解 $x = x(t)$ のグラフを, 初期値 $x(0) = x_0 = 0, 1, 2$ のとき (出来れば他の場合も) 書け. また, 解の一意性が成り立つかどうか論ぜよ.

$$(1) \quad x' = x^2 \qquad (2) \quad x' = \sqrt{|x|}$$

4 行列の指数関数

4.1 行列の指数関数

微分方程式 (15) で，$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が t に依存しない $\boldsymbol{x}$ の同次一次式の場合を考えよう．すなわちある $n \times n$ 次の定数行列 A が存在して

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$$

これを積分方程式に直すと次のようになる．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A\boldsymbol{x}(s)dx$$

さて Picard の逐次近似法を使って，この積分方程式の解の近似関数を作ってみる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A\boldsymbol{x}_0 ds = \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0(t-a) \\
\boldsymbol{x}_2(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A\boldsymbol{x}_1 ds = \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A(\boldsymbol{x}_0 + A(s-a))ds \\
&= \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0(t-a) + A^2\boldsymbol{x}_0\frac{(t-a)^2}{2} \\
&\cdots \\
\boldsymbol{x}_{k+1}(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A\boldsymbol{x}_k(s)ds = \boldsymbol{x}_0 + \int_a^t A\left(\boldsymbol{x}_0 + A(s-a) + \cdots + A^k\boldsymbol{x}_0\frac{(s-a)^k}{k!}\right)ds \\
&= \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0(t-a) + A^2\boldsymbol{x}_0\frac{(t-a)^2}{2} + \cdots + A^{k+1}\boldsymbol{x}_0\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

ここで $k \to \infty$ なる極限をとれば，極限関数は

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-a)^k}{k!}\,\boldsymbol{x}_0 \tag{20}$$

であり、指数関数の Taylor 展開の形をしているので，$e^{A(t-a)}\boldsymbol{x}_0$ と書くべきものとなる．$\boldsymbol{x}(t)$ の右辺は無限級数であるから，収束することを示さなければならない．しかしながら一般の逐次近似解の収束定理からこれが収束する事がわかる．

定義 4.1. n 次正方行列 A に対し e^A を次で定める．

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \tag{21}$$

これは無限級数であるから収束することを示さなければならない．

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{t^4}{4!} A^4 + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^k + \cdots \tag{22}$$

である．$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．上述したように，一般の逐次近似解の収束定理から (20) は任意の $\boldsymbol{x}_0$ に対して収束する．よって $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{e}_i$ とおけば，e^{At} の第 i 列が収束する事がわかる．これより (22) が収束する事がわかる．特に $t = 1$ とおけば (21) が収束することがわかる．

簡単な例を計算してみよう．

例 4.2. A が対角行列のときは，e^A は対角行列で，その成分は対応する対角成分の指数関数となる．例えば

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{のときは} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \quad \text{となる．}$$

例 4.3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき e^{At} を求めよ．

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$, E は単位行列，なので $A^3 = -A$, $A^4 = E$, $A^5 = A$, $A^6 = -A$, $\ldots$ と順に A^k を求めることが出来る．よって

$$\begin{aligned} e^{At} &= E + \frac{t}{1} A + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{t^4}{4!} A^4 + \frac{t^5}{5!} A^5 + \frac{t^6}{6!} A^6 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \right) E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \right) A \\ &= \cos t E + \sin t A \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

演習 4.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，e^{At} を双曲線関数を用いて表せ．

定理 4.5. n 次正方行列 A と正則行列 P に対し,

$$\frac{d}{dt}\ e^{At} = A\ e^{At}, \qquad e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P$$

証明. 最初の式は $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$ を t で微分すれば得られる。次の式は次のように示される。$e^{P^{-1}APt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}e^{At}P$ □

定理 4.6. n 次正方行列 A, B が交換可能, すなわち $AB = BA$, ならば,

$$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t} \quad (\text{特に } t = 1 \text{ と置けば } e^Ae^B = e^{A+B} \text{を得る.})$$

証明. $AB = BA$ より $A^kB = B^{k-1}AB = B^{k-1}BA = \cdots = BA^k$ となり B は A^k とも交換可能である. よって B は $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$ とも交換可能である. すなわち $e^{At}B = Be^{At}$. $F(t) = e^{At}e^{Bt}$, $G(t) = e^{(A+B)t}$ と置く. $F(t) = G(t)$ を示したい.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) =& Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)F(t) \\
\frac{d}{dt}G(t) =& (A+B)e^{(A+B)t} = (A+B)G(t)
\end{aligned}$$

よって, $j = 1, \ldots, n$ に対し, $F(t)$, $G(t)$ の第 j 列ベクトルは同じ微分方程式を満たす. また $\frac{dF}{dt}(0) = A + B$, $\frac{dG}{dt}(0) = A + B$ となり初期条件も同じである. よって解の一意性より $F(t)$, $G(t)$ の第 j 列ベクトルは一致する. よって $F(t) = G(t)$. □

例 4.7. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ のとき $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$A = aE + bJ$, $EJ = JE$ なので

$$e^{At} = e^{Eat+Jbt} = e^{Eat}e^{Jbt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ a^{at}\sin bt & e^{at}\cos at \end{pmatrix}$$

演習 4.8. A が次の行列のとき, e^{At} を求めよ.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

実は一般に次の式が成り立つ。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad e^{At} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E を単位行列、$A=\lambda E+N$ と書くと、N の第 (i,j) 成分は $j-i=1$ のとき 1 でそれ以外は 0 である。計算すると N^k の第 (i,j) 成分は $j-i=k$ のとき 1 でそれ以外は 0 である。とくに $N^n=O$ となる。

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda E+N)^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^k E + k\lambda^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}N^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}N^{n-1})\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda^k t^k}{k!}E + \frac{\lambda^{k-1}t^k}{(k-1)!}N + \frac{\lambda^{k-2}t^k}{2(k-2)!}N^2 + \cdots + \frac{\lambda^{k-n+1}t^k}{(n-1)!(k-n+1)!}N^{n-1} \Big) \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(E + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} \Big)
\end{aligned}
$$

となり主張を得る。

4.2 2 次行列のスペクトル分解

2 次行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とする．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ をそれぞれの固有ベクトルとする．すなわち

$$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_i \neq 0 \quad i=1,2$$

すると

$$A(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

なので $U=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)$ の逆行列 U^{-1} が存在すれば A は対角化可能，つまり

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる．以後，逆行列 U^{-1} が存在すると仮定する．この条件は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が一次独立であること同値である．よって，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2$ と表せる．このとき次の対応で定まる写像を考える

$$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i := a_i\boldsymbol{u}_i, \quad i=1,2$$

この写像は線形写像であり，対応する行列を P_i と書くと，次を満たす．

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_1P_2 = P_2P_1 = O, \quad E = P_1 + P_2 \tag{23}$$

尚，最後の等式は，任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + P_2\boldsymbol{x}$ であることから従う．(23) を満たす P_1, P_2 を**射影**と言う．

$\boldsymbol{x}_i$ は A の固有ベクトルなので $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$．よって

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ は任意であったから，

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

となる．これを 2 次行列 A の**スペクトル分解**と言う．性質 (23) を用いると，任意の多項式 $f(\lambda)$ に対し次が成立することがわかる．

$$f(A) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2$$

特に，もし $f_1(\lambda_1) = 1$, $f_1(\lambda_2) = 0$ を満たす多項式 $f_1(\lambda)$ があれば $f_1(A) = P_1$ がわかる．そのような多項式は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは，$f_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ と置けば得られる．同様に，$f_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ と置けば，$P_2 = f_2(A)$ が得られる．

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，次が成立する．

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2, \qquad \text{但し} \qquad P_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

証明は次のようにすればよい．

$$\begin{aligned}
e^{At} =& e^{At}E = e^{At}(P_1 + P_2) = e^{(A-\lambda_1 E)t + \lambda_1 E t}P_1 + e^{(A-\lambda_2 E)t + \lambda_2 E t}P_2 \\
=& e^{\lambda_1 E t}e^{(A-\lambda_1 E)t}P_1 + e^{\lambda_2 E t}e^{(A-\lambda_2 E)t}P_2 \\
=& e^{\lambda_1 t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda_1 E)^k P_1 + e^{\lambda_2 t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda_2 E)^k P_2 = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2
\end{aligned}$$

演習 4.9. 次の連立微分方程式を解け．但し，初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とする．

$$(1) \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \qquad (2) \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \qquad (3) \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$(4) \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \qquad (5) \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

4.3 n 次行列のスペクトル分解

A を n 次正方行列とし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を相異なる A の固有値とする．このとき次の性質を持つ r 個の行列 $P_1, \ldots, P_r$ を考える．

- $P_i^2 = P_i$, $P_iP_j = O$, $(i \neq j)$
- $P_1 + \cdots + P_r = E$,
- ある正の整数 ℓ_i が存在して $(A - \lambda_i E)^{\ell_i} P_i = O$, $i = 1, \ldots, r$.

このとき $N = A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r$ と書くと，N は冪零行列になる事が知られている．

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N$$

を行列 A の**スペクトル分解**と言う．このとき

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\left(E + t(A-\lambda_i E) + \frac{t^2}{2}(A-\lambda_i E)^2 + \cdots + \frac{t^{\ell_i - 1}}{(\ell_i - 1)!}(A - \lambda_i E)^{\ell_i - 1}\right) P_i$$

証明.

$$e^{At} = e^{At}E = e^{At}(P_1 + \cdots + P_r) = \sum_{i=1}^{r} e^{At} P_i = \sum_{i=1}^{r} e^{(A-\lambda_i E)t + \lambda_i E t} P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i E t} e^{(A-\lambda_i E)t} P_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i E)^k P_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\ell_i - 1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i E)^k P_i$$

□

少し理論的背景を説明しておく．A の固有多項式を

$$\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

とする．m_i は固有値 λ_i の重複度である．λ_i は A の固有値であったから，その固有空間

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$$

は 0 ではないベクトル (固有ベクトルと言うのであった) を含んでいる．さて λ_i に対応する**一般固有空間** G_i を次で定義する．

$$G_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid (A - \lambda_i E)^{m_i} \boldsymbol{x} = 0\}$$

λ_i の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = 0$ を満たすから，$F_i \subset G_i$ である．一般固有空間を考えるメリットは，全空間が一般固有空間達の直和となることである：

定理 4.10. $\mathbf{R}^n = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r$．言い替えると，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_r, \quad \boldsymbol{x}_i \in G_i$$

の形に表され，更にこのような性質を持つ $\boldsymbol{x}_i$ 達は，$\boldsymbol{x}$ から一意に定まる．

定理 4.10 を示すために、補題を準備する。

補題 4.11. $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ は共通根を持たない多項式とし,

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} \mid f_1(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \quad W_2 = \{\boldsymbol{x} \mid f_2(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \quad W = \{\boldsymbol{x} \mid f_1(A)f_2(A)\boldsymbol{x} = 0\}$$

とおくと, $W = W_1 \oplus W_2$.

証明. $f_1(\lambda)$ と $f_2(\lambda)$ は共通根を持たないから適当な多項式 $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ を選べば

$$f_1(\lambda)g_1(\lambda) + f_2(\lambda)g_2(\lambda) = 1$$

となる. λ に A を代入すれば $f_1(A)g_1(A) + f_2(A)g_2(A) = E$ を得るので, $\boldsymbol{x} \in W$ に対し

$$\boldsymbol{x} = f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}_1 = f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{x}$ とすれば $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$. $\boldsymbol{x}_2 = f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x}$ とすれば $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$. よって $W = W_1 + W_2$ である.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in W_1, \quad \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$$

と書けたとする. すると, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{x}_2$ は W_1 の元でもあり W_2 の元でもある.

$$\boldsymbol{z} = g_1(A)f_1(A)\boldsymbol{z} + g_2(A)f_2(A)\boldsymbol{z} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

より $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ となり, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$ もわかった. □

この補題を繰り返し適用すれば次を得る.

系 4.12. $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$ をどの二つも共通根を持たない多項式とし,

$$V_i = \{\boldsymbol{x} \mid f_i(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \quad i = 1, \ldots, r \quad V = \{\boldsymbol{x} \mid f_1(A)f_2(A)\ldots f_r(A)\boldsymbol{x} = 0\}$$

とおくと, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

定理 4.10 **の証明**. 前の系で $f_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ とおくと, $G_i = V_i$ である. $G_1 \oplus \cdots \oplus G_r = \{\boldsymbol{x} \mid \phi_A(A)\boldsymbol{x} = 0\}$ であるが, 次の Cayley-Hamilton の定理より、これは全空間 $\mathbf{R}^n$ である. □

補題 4.13 (Cayley-Hamilton の定理)**.** $\phi_A(A) = O$.

証明. $A=(a_{ij})$ とする．

$$Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n, \quad j=1,\dots,n$$

なので

$$\begin{aligned}(a_{11}E-A)\boldsymbol{e}_1 + a_{21}E\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}E\boldsymbol{e}_n &= \mathbf{0}\\ a_{12}E\boldsymbol{e}_1 + (a_{22}E-A)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n2}E\boldsymbol{e}_n &= \mathbf{0}\\ &\cdots\\ a_{1n}E\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}E\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (a_{nn}E-A)\boldsymbol{e}_n &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

である．これを $\boldsymbol{e}_i$ を未知変数の連立方程式と思って解く事が出来る．これを行列表示して

$$\begin{pmatrix} a_{11}E-A & a_{21}E & \cdots & a_{n1}E \\ a_{12}E & a_{22}E-A & & a_{n2}E \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}E & a_{2n}E & \cdots & a_{nn}E-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

を得るが，連立方程式と思って解く事は，この左辺の「行列」の「余因子行列」を左からかける事であり，それを実行すると

$$\phi_A(A) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

となる．これより $\phi_A(A)=O$ を得る． □

本節冒頭に述べた P_i を構成するには次のようにすればよい．任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_r, \quad \boldsymbol{x}_i \in G_i$$

と一意的に表せるのであるから, 射影 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}_i$ の表す行列を P_i とする．つまり $\boldsymbol{x}_i = P_i\boldsymbol{x}$. このとき，次がわかる．(各自理由を考えて欲しい．)

$$P_i^2 = P_i, \quad P_iP_j = O\ (i\neq j), \quad E = P_1 + \cdots + P_r, \qquad (A-\lambda_iE)^{m_i}P_i = O$$

最後の式より ℓ_i としては m_i 以下のある整数をとればよいこともわかる．そこで ℓ_i としては，次を満たすような，最小の正整数 ℓ_i をとることにする．

$$G_i = \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid (A-\lambda_iE)^{\ell_i}\boldsymbol{x} = 0\}$$

このことは，$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}$ としたとき $\varphi(A)=O$ となるような最小の正整数 ℓ_i をとると言っても同じことである．このような $\varphi(\lambda)$ を行列 A の**最小多項式**という．

P_i を計算する方法を説明する．A が対角化可能ならば $\ell_1=\cdots=\ell_r=1$ となり，固有空間は一般固有空間に一致している．このときは

$$P_i=\frac{\prod_{j\neq i}(A-\lambda_j E)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

となる．A が対角化可能でないときは

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^r(\lambda-\lambda_i)^{\ell_i}}=\frac{h_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}}+\cdots+\frac{h_r(\lambda)}{(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}},\qquad h_i(\lambda)\ \text{は}\ \ell_i-1\ \text{次以下の多項式,}$$

と部分分数分解しておく．この両辺に $\prod_{i=1}^r(\lambda-\lambda_i)^{\ell_i}$ をかけると，

$$1=h_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+h_r(\lambda)g_r(\lambda),\quad g_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)^{\ell_j}$$

となる．このとき λ に A を代入すれば、$P_i=h_i(A)g_i(A)$ と置くとき次を得る。

$$E=P_1+\cdots+P_r,\quad P_iP_j=O\ (i\neq j)$$

また $P_i=P_iE=P_i(P_1+\cdots+P_r)=P_i^2$ もわかる。

$N=A-\lambda_1P_1-\cdots-\lambda_rP_r$ は冪零である。実際 $k\geq\max\{\ell_1,\dots,\ell_r\}$ のとき

$$\begin{aligned}N^k=&N^kE=(A-\lambda_1P_1-\cdots-\lambda_rP_r)^k(P_1+\cdots+P_i)\\=&\sum_{i=1}^r(A-\lambda_iP_i)^kP_i=\sum_{i=1}^r(A-\lambda_iE)^kP_i=0\end{aligned}$$

となる。

演習 4.14. 次の連立微分方程式を解け．但し，初期条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ とする．

$$(1)\quad \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\qquad(2)\quad \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

4.4　2 次元線形方程式の解軌道

2 次正方行列 A に対し，微分方程式

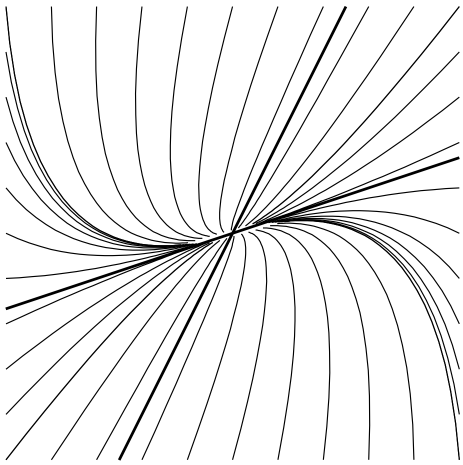
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

の解の表す曲線達の様子を調べてみよう．

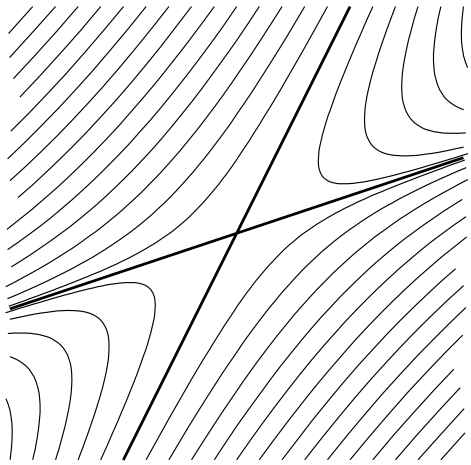
(i) A が異なる実固有値を持つとき，解曲線は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda_t} P_1 \boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda_2 t} P_2 \boldsymbol{x}_0$$

となる．この曲線の典型的な例は次のような図で表される．



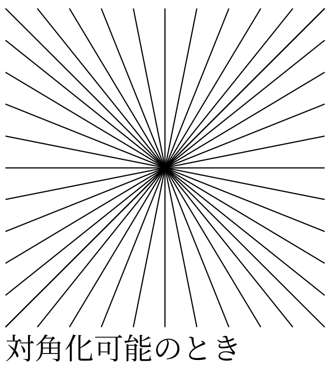
$\lambda_1\lambda_2 > 0$ のとき
(演習 4.9 (2) の例)



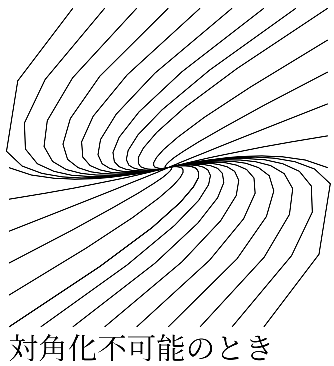
$\lambda_1\lambda_2 < 0$ のとき
(演習 4.9 (3) の例)

$\lambda_1\lambda_2 > 0$ のときは t が増加するとき $\boldsymbol{x}(t)$ は $\lambda_1 > 0$ の時は外向きに進み，$\lambda_1 < 0$ の時は内向きに進む．

(ii) A が唯一つの実固有値を持つとき



対角化可能のとき



対角化不可能のとき

(iii) A が複素固有値を持つときは $\lambda_1 = \mu + \nu\sqrt{-1}$, $\lambda_2 = \mu - \nu\sqrt{-1} = \overline{\lambda_1}$, μ, ν は実数，となっている．

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - \overline{\lambda_1}}{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}, \quad f_2(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\overline{\lambda_1} - \lambda_1}$$

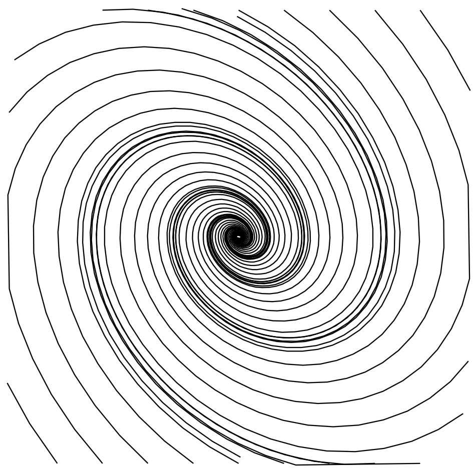
より，$\overline{f_1(\lambda)} = f_2(\lambda)$. よって $P_2 = f_2(A) = \overline{f_1(A)} = \overline{P_1}$.

$$P_1 = Q_1 + Q_2\sqrt{-1}, \quad P_2 = Q_1 - Q_2\sqrt{-1}, \quad Q_1, Q_2 \text{ は実行列}$$

と書くと，解曲線は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda_1 t}P_1\boldsymbol{x}_0 + e^{\overline{\lambda_1}t}\overline{P_2}\boldsymbol{x}_0 = 2\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}P_1)\boldsymbol{x}_0 = 2e^{\mu t}\big((\cos\nu t)Q_1\boldsymbol{x}_0 - (\sin\nu t)Q_2\boldsymbol{x}_0)\big)$$

となる．この曲線の典型的な例は次のような図で表される．(演習 4.9 (5) の例)



t が増加するとき $\boldsymbol{x}(t)$ は $\mu > 0$ の時は外向きに進み，$\mu < 0$ の時は内向きに進む.

5　線形常微分方程式

2.5 節では、2 階線形常微分方程式を扱ったが、そこでの議論は n 階の線形常微分方程式に拡張される。n 階の線形常微分方程式での議論は、さらに 1 階の連立線形常微分方程式に一般化される。本節ではそのことを見る。

5.1　n 階線形微分方程式

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x) = q(x)$ の解 $y_1, \cdots, y_n$ に対し、そのロンスキアン (Wronskian) $W(y, \ldots, y_n)$ を次で定める。

$$W(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$y_1 = y,\, y_2 = y',\, \dots,\, y_n = y^{(n-1)}$ とおくと、

$$\begin{aligned} y_1' =& y_2 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' =& y_n \\ y_n' =& -p_1(x)y_n - \cdots - p_{n-1}(x)y_2 - p_n(x)y_1 + q(x) \end{aligned}$$

となるので

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_1 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix},$$

とおけば、次の形に表すことができる。

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$$

次節ではより一般に、$A, \boldsymbol{b}$ を t の関数とした時のこの形の方程式の解を考察する。

5.2 線形常微分方程式

$\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ を考える。

定理 5.1. $A(t)$ を t に依存する $n \times n$ 行列値関数とするとき、斉次線形常微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{24}$$

の解 $\boldsymbol{x}(t)$ 全体は n 次元ベクトル空間をなす。言い換えると (24) の n 個の解 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x_n}$ が存在して、(24) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ は次の形に表すことができる。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \qquad (c_1, \dots, c_n \text{ は定数})$$

証明. $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ を (24) の解とすると、任意の定数 a, b に対して

$$(a\boldsymbol{x}(t) \dot{+}\, b\boldsymbol{y}(t)) = a\dot{\boldsymbol{x}}(t) + b\dot{\boldsymbol{y}}(t) = aA\boldsymbol{x}(t) + bA\boldsymbol{y}(t) = A(a\boldsymbol{x}(t) + b\boldsymbol{y}(t))$$

なので $a\boldsymbol{x}(t) + b\boldsymbol{y}(t)$ も (24) の解である。よって (24) の解全体はベクトル空間をなす。$\mathbf{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ をとり、$\boldsymbol{x}_i(t)$ を初期値 $\boldsymbol{a}_i$ をとる、(24) の解とする。(24) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ の 1 次結合で書けることを示す。$\boldsymbol{x}$ の初期値を $\boldsymbol{a}$ とおく。$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の基底であるから

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

なる 実数 $c_1, \ldots, c_n$ が存在する。すると

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t)$$

は $\boldsymbol{a}$ を初期値とする (24) の解であり、解の一意性定理より $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ がわかる。つまり、(24) の解全体は、$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を基底とするベクトル空間である。 □

証明中に現れた $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots \boldsymbol{x}_n(t)$ を (24) の**基本解**という。

$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n$ を解に持つ微分方程式を求めるには次のようにすれば良い。まず

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= c_1 \boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= c_1 \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) + \cdots + c_n \dot{\boldsymbol{x}}_n(t) \end{aligned}$$

を $X = (\boldsymbol{x}_1(t) \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n(t))$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ とおいて行列の形に書くと $\boldsymbol{x}(t) = Xc$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{X}c$ となるので求める微分方程式は次の様になる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{X} X^{-1} \boldsymbol{x}(t)$$

$\boldsymbol{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対し、その**ロンスキアン** (Wronskian) $W(\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n)$ を次で定める。

$$W(\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$$

次の定理より、(24) の解 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が基本解であるための必要十分条件は ある $t = t_1$ で $W(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \neq 0$ となることがわかる。

定理 5.2. (24) の解 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対し、次の条件は同値である。

1. $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次従属である。
2. $W(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ は恒等的に零である。
3. $W(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ はある $t = t_1$ で零である。

証明. 1.$\Longrightarrow$2. は線形代数のよく知られた定理である。2.$\Longrightarrow$3. は自明。3.$\Longrightarrow$1. を示そう。$W(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ はある $t = t_1$ で零であれば、

$$c_1 \boldsymbol{x}_1(t_1) + \cdots + c_n \boldsymbol{x}_n(t_1) = 0, \quad (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

を満たす $c_1, \dots, c_n$ が存在する。すると

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

は (24) の解であり、$\boldsymbol{y}(t_1) = c_1\boldsymbol{x}_1(t_1) + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n(t_1) = 0$ である。$\boldsymbol{y}(t)$ が恒等的に零であえことが示せれば $\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_n$ が 1 次従属であることが示せたことになる。ところで恒等的に零である関数も (24) の解であり、$t = t_1$ で値 0 をとるので、解の一意性より $\boldsymbol{y}(t) \equiv 0$. よって 1. が示せた。 □

定理 5.3 (Abel の公式)**.** (24) の解 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ に対し、$W(t) = W(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ とおけば

$$W(t) = W(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{trace}(A(s))ds$$

証明. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ と置く。
$\dot{x}_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_{il}$ $(i, k = 1, \dots, n)$ なので

$$\dot{W} = \sum_{k=1}^{m}\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{1k} & \dots & \dot{x}_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{kl}x_{lk} & \cdots & a_{kl}x_{lk} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} (k\text{ 行目}) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\Big)W$$

これを W に関する微分方程式と見て解けば結果を得る。 □

定理 5.4. A を t に依存する $n \times n$ 行列値関数、$\boldsymbol{b}$ を t に依存するベクトル

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{25}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ は (25) のある解 $\boldsymbol{x}_0$ と (24) の基本解 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \qquad (c_1, \dots, c_n\text{ は任意定数})$$

証明. $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は (24) の解なので基本解 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ の 1 次結合で表すことができる。 □

定理 5.5 (重ね合わせの原理)**.** $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ をそれぞれ

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1, \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 \tag{26}$$

の解とすれば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ は次の方程式の解である。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

■定数変化法で解く　定数変化法で微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ を解くことができる。以下それを説明しよう。$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ の基本解とし $X(t) = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ とする。$\boldsymbol{x}(t) = X(t)C$ $(C \in \mathbf{R}^n)$ が $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ の一般解である。C を t の関数と見て微分すれば

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{X}C + X\dot{C} = AXC + X\dot{C} = A\boldsymbol{x} + X\dot{C}$$

なので $X\dot{C} = \boldsymbol{b}$ なる C がとれれば良い。$\det X \neq 0$ であるから、

$$\boldsymbol{x}(t) = X(t)\int_{t_0}^{t} X(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)ds$$

と置けば $\boldsymbol{x} = AX + \boldsymbol{b}$ の解であり。$\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ である。$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$ となる解は初期値が $\boldsymbol{a}$ となる $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 解 $\boldsymbol{x} = X(t)X(t_0)^{-1}\boldsymbol{a}$ を加えればよい。

$$\boldsymbol{x} = X(t)X(t_0)^{-1}\boldsymbol{a} + X(t)\int_{t_0}^{t} X(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)ds$$

6　自励系

連立微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

に於いて，右辺が t に依存しないとき，すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

の形であるとき，**自励系**という．本節では，自励系の微分方程式を考える．

t を独立変数とし 未知関数 $x = x(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ なる点 $\boldsymbol{x}_0$ があれば $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$ は，微分方程式 (27) の解となる．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = 0$ となる $\boldsymbol{x}_0$ を微分方程式 (27) の**平衡点**という．

平衡点 $\boldsymbol{x}_0$ が，**漸近安定な平衡点**であるとは，$\boldsymbol{x}_0$ の近くを出発した (27) の任意の解曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ は，$t \to \infty$ としたとき $\boldsymbol{x}_0$ に近付く時を言う．

例 6.1. A の固有値がすべて負の実数ならば，原点は微分方程式 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の漸近安定な平衡点である．

定理 6.2 (**線形近似定理**)**.** 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \text{ に関して 2 次以上の項の和}$$

の A の固有値がすべて負の実数ならば，原点は漸近安定な平衡点である．

この定理の証明はしない．

■Liénard の微分方程式　$f(x)$, $g(x)$ は x の関数とし，微分方程式

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

を考える．$y = x'$ と置いて連立微分方程式に直すと

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -f(x)y - g(x) \end{cases} \tag{28}$$

この方程式は，2 次元の自励系の微分方程式である．$G(x) = \int_0^x g(z)dz$ とおく．

定理 6.3. $f(x)$, $G(x)$ が $x \neq 0$ なる $x = 0$ の近くの点で，共に正の値をとるならば，原点は微分方程式 (28) の漸近安定な平衡点である．

証明. $E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$ と置く．$E(x,y) = 0$ となるのは，原点の近くでは原点のみであることに注意しておく．$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を一つの解とすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y(t)^2 + \int_0^{x(t)} g(z)dz\right) \\ &= y(t)y'(t) + g(x(t))x'(t) \\ &= y(t)[-f(x(t))y(t) - g(x(t))] + g(x(t))y(t) \\ &= -f(x(t))y(t)^2 \end{aligned}$$

仮定より $E(x(t), y(t))$ は t の減少関数である．$E(x(t), y(t)) \to 0$, $t \to \infty$, を示したい．

$$\lim_{t\to\infty} E(x(t), y(t)) = a > 0$$

と仮定すると解曲線 $(x(t), y(t))$ は $E(x,y) = a$ で定まる曲線 (原点を囲む閉曲線) に巻き付くことになる．よって．

$$-\lim_{t\to\infty} f(x(t))y(t)^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = 0$$

よって $E(x,y) = a$ ならば $f(x)y^2 = 0$ となるが，仮定より原点の近くでは $x = 0$ か $y = 0$ でなければならず矛盾．　□

例 6.4 (減衰振り子の方程式)**.** 微分方程式 $x'' + kx' + \omega^2 \sin x = 0$, k, ω を正の定数，を連立化すると，

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -\omega^2 \sin x - ky \end{cases}$$

よって平衡点は $(x, y) = (n\pi, 0)$, n は整数，となる．各平衡点の周りで線形近似を考える．$u = x - n\pi$ とおくと，考えている微分方程式は

$$\begin{cases} u' = & y \\ y' = & -\omega^2 (-1)^n \sin u - ky \end{cases}$$

となる．$(u, y) = (0, 0)$ で右辺を Taylor 展開すると

$$\begin{cases} u' = & y \\ y' = & -\omega^2 (-1)^n u - ky + (-1)^{n+3} \frac{\omega^2}{3!} u^3 + \cdots \end{cases}$$

線形部分の固有値は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (-1)^{n+1}\omega^2 & -k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\lambda + (-1)^n \omega^2 = 0$$

を解いて，$\lambda = \frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - (-1)^n 4\omega^2})$ となる．n が奇数ならば，固有値は正と負の実数で $(n\pi, 0)$ は不安定平衡点である．n が偶数ならば，固有値の実部は負で漸近安定平衡点である事がわかる．

演習 6.5. 次の自励系の平衡点を求め，漸近安定平衡点かどうかを論ぜよ

$$(1) \quad \begin{cases} x' & = -2x - y + 2 \\ y' & = xy \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} x' & = -6x + 2xy - 8 \\ y' & = y^2 - x^2 \end{cases}$$

演習 6.6. 次の微分方程式を連立化し自励系を作り，その平衡点を求め，漸近安定性を論ぜよ．

$$x'' + x' + 6x + 3x^2 = 0$$

7 級数解

冪級数 $\sum a_n x^n$ に対し、次を満たす R が存在する。

- $|x| < R$ なら $\sum a_n x^n$ は収束
- $|x| > R$ なら $\sum a_n x^n$ は発散

但し、任意の x に対し $\sum a_n x^n$ が収束するときは $R=\infty$ とおく。この R を**収束半径**という。$R>0$ のとき M を十分大きく取れば

$$|a_n| < \frac{M}{R^n} \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{29}$$

が成り立ち、逆に評価式 (29) が成り立つ最も大きい正の数 R が収束半径になる。本章では常微分方程式の級数解を求めることが主題である。

7.1 確定特異点

線形微分方程式

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

において、$x=x_0$ の近傍で、$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$, $q(x)$ が解析的であるとき $x=x_0$ はこの方程式の**正則点**であるという。正則点でない点を**特異点**というが、$(x-x_0)^j p_j(x)$ $(j=1,2,\dots,n)$ が解析的であるときは、特に**確定特異点**と呼ばれる。

原点に確定特異点を持つ 2 階線形常微分方程式

$$y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0 \tag{30}$$

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, \qquad b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$$

の解で $y(x) = x^\lambda(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$ の形のものを探そう。(30) を次の形に書いておく。

$$x^2y'' + a(x)xy' + b(x)y = 0 \tag{31}$$

このとき

$$\begin{aligned}
x^2y'' &= \sum_{m=0}^{\infty}(\lambda+m)(\lambda+m-1)c_m x^{m+\lambda} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n)c_n x^n \\
a(x)xy' &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty}(\lambda+m)c_m x^{m+\lambda} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{k+m=n} a_k(\lambda+m)c_m\Bigg)x^n \\
b(x)y &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\lambda+m} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\big(\sum_{k+m=n} b_k c_m\big)x^n
\end{aligned}$$

なので

$$0 = x^2y'' + axy' + by$$

$$=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n+\sum_{k+m=n}(a_k(\lambda+m)+b_k)c_m\right]x^n$$

となる。$F(s)=s(s-1)+a_0s+b_0$, $f_k(s)=a_ks+b_k$ とおくと、$x^{\lambda+n}$ の係数が零であるという条件は次のように書ける。

$$F(\lambda+n)c_n+\sum_{m=0}^{n-1}f_{n-m}(\lambda+m)c_m=0 \tag{32}$$

特に x^{λ} の係数は $F(\lambda)c_0$. よって $F(\lambda)=0$ の解を λ_1, λ_2 $(\lambda_1\leq\lambda_2)$ とすれば $y(x)$ が解であるためには $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ でなければならない。そのとき c_0 は 0 でない任意の数を選ぶことができる。$F(\lambda)=0$ をこの方程式の**決定方程式**という。

以後 $\lambda=\lambda_1$ または λ_2 として議論を進める。

$\lambda_2-\lambda_1$ が整数でなければ $F(\lambda+n)$ が 0 でなく、順次係数 c_n を決定することができる。このとき級数 $\sum c_nx^n$ の収束半径が正であることを示す。そのため $n=0,1,2,\ldots$ について

$$|c_n|\leq\frac{M}{S^n} \tag{33}$$

を満たす、正定数 M, S が存在する事を示そう。ここで $\sum a_nx^n$, $\sum b_nx^n$ について次が成り立つことを仮定しよう。

$$|a_n|\leq\frac{K}{R^n},\qquad |b_n|\leq\frac{K}{R^n},\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

すると $m=0,1,\ldots,n-1$ に対し次が成り立つ。

$$|f_{n-m}(\lambda+m)|=|a_{n-m}(\lambda+m)+b_{n-m}|\leq\frac{K}{R^{n-m}}(|\lambda|+m+1)\leq\frac{K}{R^{n-m}}(|\lambda|+n)$$

また $F(\lambda+n)/n^2\to1$ $(n\to\infty)$ なので、

$$\frac{|F(\lambda+n)|}{n^2}\geq\alpha>0\qquad(n=1,2,\ldots)$$

なる α が存在する。ここで $S<R$, $S<\frac{\alpha}{K(1+|\lambda|)}R$ を満たす S をとる。$|c_0|<M$ なる M をとれば $n=0$ のとき評価 (33) が成り立つ。$n-1$ まで評価 (33) が成り立つと仮定すると、

$$|c_n|=\frac{1}{|F(\lambda+n)|}\left|\sum_{m=0}^{n-1}f_{n-m}(\lambda+m)c_m\right|\qquad\leq\frac{1}{|F(\lambda+n)|}\sum_{m=1}^{n-1}|f_{n-m}(\lambda+m)c_m|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha n^2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{K(|\lambda|+n)}{R^{n-m}}\frac{M}{S^m} && =\frac{KM}{\alpha S^n}\frac{|\lambda|+n}{n^2}\sum_{m=0}^{n-1}\Big(\frac{S}{R}\Big)^{n-m}\\
&=\frac{KM}{\alpha S^n}\Big(1+\frac{|\lambda|}{n}\Big)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{S}{R}\Big)^k\\
&\leq \frac{M}{S^n}\frac{K(1+|\lambda|)}{\alpha}\frac{S}{R} && (S<R\text{ より})\\
&\leq \frac{M}{S^n} && (S<\frac{\alpha}{K(1+|\lambda|)}R\text{ より})
\end{aligned}
$$

$\lambda_2 = \lambda_1 + k$ (k は 0 または正の整数) として議論を続けよう。$\lambda = \lambda_2$ のときは、上の方法で級数解 y_1 を求めることができる。$\lambda = \lambda_1$ のときは上の方法で $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ までは求めることができるが (32) で $n = k$ とした条件式は c_k の項を含まず次のようになる。

$$f_1(\lambda_1 + k - 1)c_{k-1} + \cdots + f_{k-1}(\lambda_1 + 1)c_1 + f_k(\lambda_1)c_0 = 0$$

c_0 は任意で c_0 の線形関数として順次 $c_1, \ldots, c_k$ を決めていくのであったからこの式が成立するように c_0 を選べば $c_0 = 0$ となる。そして c_k として任意の零でない値を与え、$c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots$ を上と同様に順次決めていくことができるが、これは $\lambda = \lambda_2$ の時と同じ解である。

(30) の別の解を見出すためには、λ を任意とし $c_0 = 1$ として (32) を満たすように順次定めた c_n を $c_n(\lambda)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) と書く。つまり

$$c_n(\lambda) = -\frac{1}{F(\lambda+n)}\left(f_n(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda+l)c_m(\lambda)\right)$$

$z = x^\lambda z_1$ (但し $z_1 = 1 + \sum_{n=1}^\infty c_n(\lambda)x^n$) とおくと、次が成り立つ。

$$x^2z'' + axz' + bz = F(\lambda)x^\lambda = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)x^\lambda \tag{34}$$

$\Lambda(P) = \frac{d}{d\lambda}P|_{\lambda=\lambda_1}$ とおく．$\lambda_1 = \lambda_2$ のときは、

$$x^2\Lambda(z'') + ax\Lambda(z') + b\Lambda(z) = \Lambda(x^2z'' + axz' + bz) = \Lambda((\lambda-\lambda_1)^2x^\lambda) = 0$$

なので $w = \Lambda(z)$ は (30) の解であることがわかる。w は次の様に表示される。

$$w = \Lambda(z) = \Lambda(x^\lambda z_1) = \Lambda(x^\lambda)z_1|_{\lambda=\lambda_1} + x^{\lambda_1}\Lambda(z_1) = x^{\lambda_1}[(\log x)y_1 + \sum_{n=1}^\infty \Lambda(c_n(\lambda))x^n]$$

$\lambda_2 - \lambda_1 = k$ （k は正の整数）とする。

$$\hat{c}_n = (\lambda - \lambda_1)c_n(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_1}, \qquad \hat{c}'_n = \frac{d}{d\lambda}\Big[(\lambda - \lambda_1)c_n(\lambda)\Big]_{\lambda=\lambda_1}$$

と置くと、次を得る。

$$\begin{aligned}
\hat{c}_n =& \frac{\lambda - \lambda_1}{F(\lambda + n)}\left(f_n(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda + m)c_m(\lambda)\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_1} \\
=& \frac{\lambda - \lambda_1}{(\lambda + n - \lambda_1)(\lambda + n - \lambda_1 - k)}\left(f_n(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda + m)c_m(\lambda)\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_1} \\
=& \begin{cases} 0 & (1 \le n < k) \\ \frac{1}{n}[f_n(\lambda_1) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda_1 + m)c_m(\lambda_1)] & (n = k) \\ \frac{1}{n(n-k)} \sum_{m=k}^{n-1} f_{n-m}(\lambda_1 + m)\hat{c}_m & (n > k) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}'_n =& \frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda - \lambda_1}{(\lambda + n - \lambda_1)(\lambda + n - \lambda_1 - k)}\left(f_n(\lambda) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda + m)c_m(\lambda)\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_1} \\
=& \begin{cases} \frac{1}{n(n-k)}(f_n(\lambda_1) + \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda_1 + m)c_m(\lambda_1)) & (1 \le n < k) \\ \frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda + k - \lambda_1}[f_k(\lambda) + \sum_{m=1}^{k-1} f_{k-m}(\lambda + m)c_m(\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} & (n = k) \\ \frac{1}{n(n-k)} \sum_{m=1}^{n-1} f_{n-m}(\lambda_1 + m)c_m(\lambda_1) & (n > k) \end{cases}
\end{aligned}$$

(34) に $(\lambda - \lambda_1)$ をかけると次式を得る。

$$(\lambda - \lambda_1)(x^2 z'' + axz' + bz) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)x^\lambda$$

この式を λ で微分して $\lambda = \lambda_1$ とおくと

$$\begin{aligned}
0 =& \Lambda[(\lambda - \lambda_1)(x^2 z'' + axz' + bz)] \\
=& x^2\Lambda([(\lambda - \lambda_1)z]'') + ax\Lambda([(\lambda - \lambda_1)z]') + b\Lambda((\lambda - \lambda_1)z)
\end{aligned}$$

よって $w = \Lambda[(\lambda - \lambda_1)z]$ も解である。$z = x^\lambda z_1$ なので

$$\begin{aligned}
w =& \Lambda[(\lambda - \lambda_1)z] = \Lambda(x^\lambda(\lambda - \lambda_1)z_1) \\
=& \Lambda(x^\lambda)[(\lambda - \lambda_1)z_1]_{\lambda=\lambda_1} + x^{\lambda_1}\Lambda[(\lambda - \lambda_1)z_1] \\
=& x^{\lambda_1}\left[\log x[(\lambda - \lambda_1)z_1]_{\lambda=\lambda_1} + \Lambda((\lambda - \lambda_1)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda)x^n))\right] \\
=& x^{\lambda_1}\left[\log x \sum_{n=k}^{\infty} \hat{c}_n x^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}'_n x^n\right]
\end{aligned}$$

例 7.1 (Bessel の方程式)**.**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

$y = x^\nu(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots)$ を $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)$ に代入すると $x^{\nu+n}$ の係数は、

$$[(\nu+n)^2 - \nu^2]c_n + c_{n-2}$$

なので $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$, $c_{2m} = -\frac{c_{2m-2}}{2m(2\nu+2m)} = -\frac{c_{2m-2}}{2^2m(\nu+m)}$ であり

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2(\nu+1)} \\ c_4 &= \frac{c_0}{2^2 2(\nu+1)(\nu+2)} \\ &\cdots \\ c_{2m} &= \frac{(-1)^m c_0}{2^m m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} \end{aligned}$$

を得る。$|c_{2m}/c_{2m-2}| = 1/(2^2m(\nu+m)) \to 0$ $(m \to \infty)$ よりこの冪級数の収束半径は ∞ である。$c_0 = \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$ [*4]とおいて得られる関数を、**Bessel 関数**といい $J_\nu(x)$ で表す。

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

■超幾何微分方程式　a, b, c を定数として

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

を Gauss の超幾何微分方程式という。この微分方程式の級数解 $y = \sum a_n(x-x_0)^n$ を求めてみよう。書き直すと

$$x^2y'' + x\frac{c-(a+b+1)x}{1-x}y' - ab\frac{x}{1-x}y = 0$$

となるので、$x = 0$ は確定特異点であり、決定方程式は

$$\lambda(\lambda-1) + c\lambda = 0$$

である。これを解いて $r = 0, 1-c$ を得る。

[*4] $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ で定義され $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ を満たす。

$\lambda=0$ のとき $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ を方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&x(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+[c-(a+b+1)x]\sum_{n=1}c_nx^{n-1}-ab\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\
=&(cc_1-abc_0)+(2(c+1)c_2-(a+1)(b+1)c_1)x\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+c)c_{n+1}-(a+n)(b+n)c_n]x^n
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
c_1=&\frac{ab}{c}c_0\\
c_2=&\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}c_1\\
&\cdots\\
c_{n+1}=&\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}c_n
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$
c_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}c_0
$$

を得る。この表示は c が負の整数でない限り定義され、$c_n/c_{n+1}=\frac{(c+n)(n+1)}{(a+n)(b+n)}\to 1$ $(n\to\infty)$ となるので収束半径は 1 である。$c_0=1$ として得られる級数

$$
F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}x^n
$$

を Gauss の**超幾何級数**という。

Gauss の超幾何関数は既知の級数と関連がある。その幾つかを示して本稿を終わる。

$$
\begin{aligned}
(1+x)^p=&F(-p,b,b,-x)\\
\log(1+x)=&xF(1,1,2,-x)\\
e^x=&\lim_{\beta\to\infty}F(1,\beta,1,\frac{x}{\beta})\\
\cos nx=&F(\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{1}{2},\sin^2 x)
\end{aligned}
$$