ニュートン図形と幾何学 多項式写像の非固有点軌跡について

数学特別講義 XX 2021 年 10 月 8 日（金）5 限　担当 福井敏純

多項式に対しニュートン多角形と呼ばれるものを定めることができる．x, y を変数とする多項式

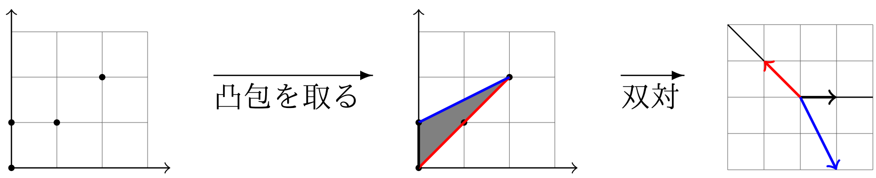
$$f(x,y)=\sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j$$

に対し，集合 $\{(i,j) : a_{i,j}\neq 0\}$ の凸包を多項式 f の**ニュートン多角形**といい $\Delta=\Delta(f)$ で表す．ニュートン多角形は多項式 f の定める幾何学的対象の情報を想像以上に多く含んでいる．その一端を紹介するのが今日の目的である．

整数点 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ に対し，次の様に定める．

$$\begin{aligned} d_\Delta(\boldsymbol{p}) &=\min\{\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{\nu}\rangle : \boldsymbol{\nu}\in\Delta(f)\}\\ \gamma_\Delta(\boldsymbol{p}) &=\{\boldsymbol{\nu}\in\Delta : \langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{\nu}\rangle = d_\Delta(\boldsymbol{p})\}\\ f_{\boldsymbol{p}} &= \sum_{(i,j)\in\gamma_\Delta(\boldsymbol{p})} a_{i,j}x^i y^j \end{aligned}$$

例 1. $f(x,y)=x^2y^2+xy+y+1$ のとき，まず点 $(2,2)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ をとる．



多項式 f の零点集合とニュートン多角形 $\Delta(f)$ の間には深い関係があるが本日は説明しない．

本日は多項式写像 $\boldsymbol{f}=(f^1,f^2):\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ を考える．写像 $\boldsymbol{f}$ の幾何学もニュートン図形と密接に関連している．例えば次の事実はよく知られている．

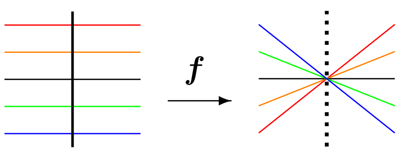
f^1, f^2 を定数項のある多項式とし，多項式写像 $\boldsymbol{f}=(f^1,f^2):\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ に対し，ニュートン図形 $\Delta(f^1)$, $\Delta(f^2)$ を考え，次のミンコフスキー和を考える．

$$\Delta(\boldsymbol{f})=\Delta(f^1)+\Delta(f^2)=\{\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2 : \boldsymbol{\nu}_1\in\Delta(f^1),\ \boldsymbol{\nu}_2\in\Delta(f^2)\}$$

写像 $\boldsymbol{f}$ による一般の点の逆像が有限個の点ならば，その個数は（重複度込みで）次の値である．

$$\Delta(\boldsymbol{f})\text{ の面積} - \Delta(f^1)\text{ の面積} - \Delta(f^2)\text{ の面積}$$

例 2. $\boldsymbol{f}:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $(x_1,x_2)\mapsto(y_1,y_2)=(x_1,x_1x_2)$.



$\boldsymbol{x}(t) = (t, a/t)$ と置くと，$F(\boldsymbol{x}(t)) = (t, a)$ なので

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{x}(t) = \infty, \quad \lim_{t \to 0} F(\boldsymbol{x}(t)) = (0, a) \tag{1}$$

定義 3 像の点 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^2$ が $\boldsymbol{f} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の**非固有点**であるとは，次を満たす弧 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在するときを言う．

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{x}(t) = \infty, \quad \lim_{t \to 0} f(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{y}$$

写像 $\boldsymbol{f}$ の非固有点全体を**非固有点軌跡**といい $S_{\boldsymbol{f}}$ で表す．

例 2 の場合は (1) より $S_{\boldsymbol{f}} = \{y_1 = 0\}$ がわかる．

昨年度，ニュートン図形を用いて $S_{\boldsymbol{f}}$ を表す公式を証明したので紹介する．

$\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^2$ に対し $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}} = (f^1_{\boldsymbol{p}}, f^2_{\boldsymbol{p}})$, $J(\boldsymbol{p}) = \{j : \boldsymbol{0} \notin \gamma_{\Delta(f^j)}(\boldsymbol{p})\}$ とおき，$Z_{\boldsymbol{p}}$ を次で定める．

$$Z_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{C}^*)^2 : f^j_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = 0 \ (j \in J(\boldsymbol{p}))\}$$

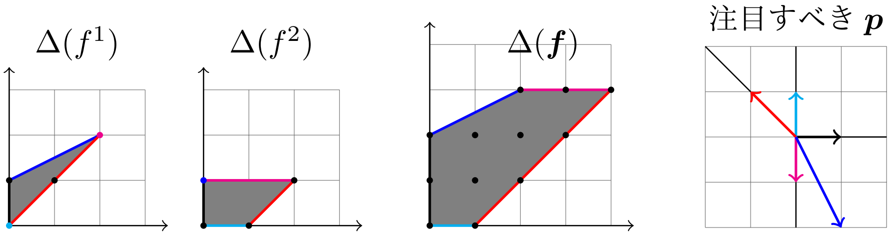
注意 4. $\gamma_{\Delta(f^j)}(\boldsymbol{p})$ が頂点であるような $j \in J(\boldsymbol{p})$ が存在すれば $Z_{\boldsymbol{p}} = \emptyset$.

定理 5 (with T.Tsuchiya) 各 f^j が非零定数項を持ち，各 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\geq})^2$ に対し $Z_{\boldsymbol{p}}$ の正則点全体が $Z_{\boldsymbol{p}}$ で稠密ならば

$$S_{\boldsymbol{f}} = \bigcup_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus (\mathbb{Z}_{\geq})^2} S_{\boldsymbol{p}}, \quad S_{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{f}^{J^c}_{\boldsymbol{p}}(Z_{\boldsymbol{p}})} \times \mathbb{C}^{J(\boldsymbol{p})}.$$

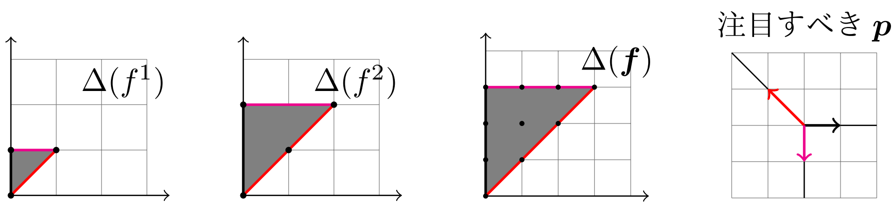
但し $\boldsymbol{f}^{J^c}_{\boldsymbol{p}} : \mathbb{C}^J \to \mathbb{C}^{J^c}$, $\boldsymbol{x} \mapsto (f^j_{\boldsymbol{p}})_{j \notin J}$, $J^c = \{1, 2\} \setminus J$, $J = J(\boldsymbol{p})$.

例 6. $(f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)) = (x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 + x_2 + 1, x_1^2 x_2 + x_2 + x_1 + 1)$



$$S_{\boldsymbol{f}} = S_{(-1.1)} = f^1(Z_{(-1,1)}) \times \mathbb{C} = \{x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 + 1 : x_1 x_2 + 1 = 0\} \times \mathbb{C} = \{1\} \times \mathbb{C}$$

例 7. $(f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2)) = (x_1 x_2 + x_2 + 1, x_1^2 x_2^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1)$



$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{f}} =& S_{(-1,1)} = \{(y_1, y_2) : \exists (x_1, x_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \ (y_1, y_2) = (x_1 x_2 + 1, x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 + 1)\} \\ =& \{(y_1, y_2) : y_2 - y_1^2 + y_1 - 1 = 0\} \end{aligned}$$

注意. 定理 5 は種々の一般化が可能だが詳細は省略する．