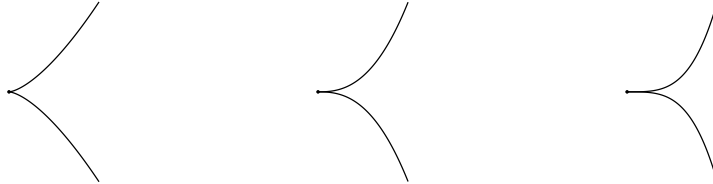


数学特別講義 XX 「平面曲線の特異点」

2024 年 12 月 6 日 福井敏純

特異点論の見地から平面曲線の特異点をどう扱えるかを紹介する． $\mathbb{K}$ を実数体または複素数体とする．即ち $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ．考える対象は解析関数 $f : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ の零点集合か，または解析写像 $\phi : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ の像^{*1}である．

例 (A_{2k} 特異点)．関数 $f(x, y) = y^2 - x^{2k+1}$ の零点集合は，写像 $\phi(t) = (t^2, t^{2k+1})$ の像である．



A_2 特異点 ($y^2 = x^3$) A_4 特異点 ($y^2 = x^5$) A_6 特異点 ($y^2 = x^7$)

解析関数 $f(x, y)$ を収束冪級数環 $\mathbb{K}\{x, y\}$ の元と見て， f の生成するイデアルを $\langle f \rangle$ と書く．

定義．(i) f_0 と f_1 が $\mathcal{K}$ 同値とは局所座標変換 $H : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ が存在してイデアル $H^*\langle f_0 \rangle$ とイデアル $\langle f_1 \rangle$ が一致するときを言う．

(ii) ϕ_0 と ϕ_1 が $\mathcal{A}$ 同値であるとは，局所座標変換 $h : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ ， $H : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ が存在して $\phi_0 \circ h = H \circ \phi_1$ を満たすようにできるときを言う．

$i = 0, 1$ として，写像 $\phi_i : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ の像の定義式を $f_i(x, y)$ とする．このとき次の定理が成り立つ．

定理． ϕ_0 と ϕ_1 が $\mathcal{A}$ 同値である $\iff f_0$ と f_1 が $\mathcal{K}$ 同値である．

証明． ϕ_0 と ϕ_1 が $\mathcal{A}$ 同値ならば，局所座標変換 $H : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ が存在して H は ϕ_0 の像を ϕ_1 の像に移す．よって H は f_0 の零点集合を f_1 の零点集合に移す． $\langle f_i \rangle$ は素イデアルなので， $H^*\langle f_0 \rangle$ と $\langle f_1 \rangle$ は一致する．

逆に f_0 と f_1 が $\mathcal{K}$ 同値ならば局所座標変換 $H : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0)$ で $(\{f_0 = 0\}, 0)$ を $(\{f_1 = 0\}, 0)$ に移すものが存在する．よって合成 $H \circ \phi_0$ は $(\{f_1 = 0\}, 0)$ の径数付けである．この様な径数付けは $(\mathbb{K}, 0)$ の座標変換を除いて一意なので， ϕ_0 と ϕ_1 は $\mathcal{A}$ 同値であることがわかる． $\square$

写像 ϕ が原点で特異点を持つときは，まず ϕ の特異点型を判定したい．即ち $\phi'(0) = 0$ のときは， ϕ が例えばいつ A_{2k} 特異点と $\mathcal{A}$ 同値になるか判定したい． A_2 特異点については次の定理が知られている．まず $\phi_i = \phi^{(i)}(0)$ と置く．

定理． $\phi_1 = \phi'(0) = 0$ のとき， ϕ は (t^2, t^3) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \det(\phi_2, \phi_3) \neq 0$ ．

一見簡単そうに見えるが，証明はそう単純でなく奥が深い，この定理を他の特異点の判定にも

^{*1} この設定では局所既約な平面曲線の特異点のみを考えることになる．一般に 2 変数関数の零点集合は局所既約とは限らない．たとえば $xy = 0$ は局所既約でない．

拡張しようとするのは自然である．しかしながら例えば A_4 特異点の判定法を ϕ の 5 階微分までを使った式で書いてみると、複雑な判定法*2になり、一般化できる見通しの良い理解は得られていないのが現状である．

最近 M1 の学生さんと 写像 $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ の特異点型の判定を行ったので、その一端を紹介する．（実は別の動機が有って考えたのだが、実際にはこのような特異点型の判定になった．）

写像 $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ の重複度を m とする．即ち次が成り立つとする．

$$\phi(0) = \phi'(0) = \cdots = \phi^{(m-1)}(0) = 0, \quad \phi^{(m)}(0) \neq 0$$

ϕ の像の特異点以外では単位接ベクトル $\mathbf{t}$ および単位法ベクトル $\mathbf{n}$ を考えることができ、特異点へは極限を取るにより $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ を拡張することができる．ここで次を満たすような径数 s をとろう．

$$\phi'(s) = \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{t}$$

すると次のような Frenet-Serre 型の公式で曲率 κ を定めることができる．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$$

枠 $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ は κ により一意に定まり、曲線 ϕ は次で復元される．

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{t} ds$$

$\kappa = \sum_{i \geq 0} \kappa_i s^i / i!$ とする． $m = 2$ のときは、次のような判定法が成り立つ．

- ϕ が A_2 特異点 (t^2, t^3) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 \neq 0$.
- ϕ が A_4 特異点 (t^2, t^5) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 = 0, \kappa_2 \neq 0$.
- ϕ が A_6 特異点 (t^2, t^7) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 = \kappa_2 = 0, \kappa_4 \neq 0$.

一般に次が成立する．

- ϕ が A_{2k} 特異点 (t^2, t^{2k+1}) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_{2k-4} = 0, \kappa_{2k-2} \neq 0$.

この様な計算は更に続けることが可能で、例えば $m = 3$ のときは次が成り立つ．

- ϕ が E_6 特異点 (t^3, t^4) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 \neq 0$.
- ϕ が E_8 特異点 (t^3, t^5) と $\mathcal{A}$ 同値 $\iff \kappa_0 = 0, \kappa_1 \neq 0$.

この計算は更に続く．この様な話に興味がある人は個別に質問して下さい．

*2 $\det(\phi_2, \phi_3) = 0, 3 \det(\phi_2, \phi_5) \phi_2 \neq 10 \det(\phi_2, \phi_4) \phi_3$