

数学特別講義 (2015 年度前期)

特異点入門

福井敏純

目次

1	代数的集合	1
1.1	代数的集合の定義	1
1.2	代数的集合上の多項式関数	3
1.3	錐構造定理	4
1.4	曲線選択補題	5
2	ミルナー束	7
2.1	ミルナー繊維束	7
2.2	ミルナー束の別の形	11
2.3	ミルナー束の位相	13
2.4	ミルナー数	15
2.5	$n = 2$ のとき	16
3	ニュートン図形と混合体積	17
3.1	ニュートン図形	17
3.2	交点数	17
3.3	混合体積とその性質	18
3.4	混合分割	21
3.5	ベルンシュタインの定理	25
3.6	クシニレンコの公式の証明	27

1 代数的集合

1.1 代数的集合の定義

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ として, \mathbb{K}^n 内でいくつかの実又は複素多項式の共通零点として定まる集合を代数的集合という. $I(V)$ で V 上零になる多項式全体を表す. $I(V)$ は多項式環 $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアルになる.

代数的集合について次のホイットニーの定理は基本的である.

定理 1.1 (ホイットニー) 2つの代数的集合の差集合の連結成分は有限個である.

(z_1, \dots, z_n) を変数とするの複素多項式は, その実部と虚部は $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とすれば x_i, y_i の実多項式であるから複素代数的集合は実代数的集合の特別な場合と見ることができる. 以降しばらくは実代数的集合について述べよう.

$g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$ として $V = \{z \in \mathbb{R}^n : g_1(z) = \dots = g_k(z) = 0\}$ と置く. $\mathbf{p} \in V$ に対し \mathbf{p} の V 内の近傍 U が存在し

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1}(\mathbf{q}) & \dots & (g_1)_{x_n}(\mathbf{q}) \\ \vdots & & \vdots \\ (g_k)_{x_1}(\mathbf{q}) & \dots & (g_k)_{x_n}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = r \quad \mathbf{q} \in U$$

であれば階数定理より \mathbf{p} の適当な近傍 U での適当な座標 (u_1, \dots, u_n) が存在して

$$U \cap V = \{x \in U : u_1 = \dots = u_r = 0\}$$

とできる. このとき $n - r$ を点 \mathbf{p} での V の (実) 次元という. このような点を V の正則点という. 正則点でない点を V の特異点と言い, 特異点全体を $\Sigma(V)$ で表す. 各正則点での次元が等しい代数的集合を等次元な代数的集合という.

V の正則点 \mathbf{p} を始点とするベクトル

$$\mathbf{v} = v_1 \partial_{x_1} + \dots + v_n \partial_{x_n}$$

を考える. \mathbf{v} が

$$\mathbf{v}g_j(\mathbf{p}) = v_1 \partial_{x_1} g_j(\mathbf{p}) + \dots + v_n \partial_{x_n} g_j(\mathbf{p}) = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

を満たすとき \mathbf{v} は点 \mathbf{p} での V の接ベクトルであると言う. 点 \mathbf{p} での V の接ベクトル全体を $T_{\mathbf{p}}V$ で表す.

V の各点 \mathbf{p} に対して, ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = v_1(\mathbf{p})\partial_{x_1} + \dots + v_n(\mathbf{p})\partial_{x_n}$ を対応させる規則が与えられたとき, V で定義されたベクトル場が与えられたという. さらに V の各正則点 \mathbf{p} で $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ が V の接ベクトルとなっているとき, 接ベクトル場が与えられたと言う.

以上の事は複素多項式についても同様であり, その場合の上と同様に定義した次元を複素次元という事がある.

1.2 代数的集合上の多項式関数

多項式関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を代数的集合 V 上に制限したとき

$$\text{rank} \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_n}(\mathbf{p}) \\ (g_1)_{x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & (g_1)_{x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ (g_k)_{x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & (g_k)_{x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = r + 1$$

を満たす点 $\mathbf{p} \in V$ を $f|_V$ の正則点という。 $f|_V$ の正則点でない V の点を $f|_V$ の臨界点 (又は特異点) という。 $f|_V$ の臨界点の $f|_V$ による像を $f|_V$ の臨界値という。 $f|_V$ の臨界点全体を $\Sigma(f|_V)$ で表し、臨界値集合を $D(f|_V)$ で表す。

定理 1.2 (ベルチニ・サード) 代数的集合上の多項式関数の臨界値集合は有限集合である。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ として、多項式 $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ に対し

$$V = V(f) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n : f(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

は代数的集合である。

f が実多項式で \mathbb{R}^n 上の関数とみる場合、 \mathbb{R}^n 内の V の正則点軌跡に関数 $\rho(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ を制限すると

$$f(z) = 0, \text{rank} \begin{pmatrix} \rho_{z_1} & \cdots & \rho_{z_n} \\ f_{z_1} & \cdots & f_{z_n} \end{pmatrix} < 2$$

は有限集合なので S_ε と V は横断的に交わる。

f が複素多項式の場合、 \mathbb{C}^n 内の V の正則点軌跡に関数 $\rho(z) = z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n$ を制限すると高々有限個の臨界点しか持たない。 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とするとき $\bar{z}_i = x_i - \sqrt{-1}y_i$ で $\text{Re} f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}$, $\text{Im} f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2\sqrt{-1}}$ $\partial_{x_i} = \partial_{z_i} + \partial_{\bar{z}_i}$ $\partial_{y_i} = \sqrt{-1}(\partial_{z_i} - \partial_{\bar{z}_i})$ である。

$$f(z) = 0, \text{rank} \begin{pmatrix} \rho_{z_1} & \cdots & \rho_{z_n} & \rho_{\bar{z}_1} & \cdots & \rho_{\bar{z}_n} \\ f_{z_1} & \cdots & f_{z_n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_{\bar{z}_1} & \cdots & f_{\bar{z}_n} \end{pmatrix} < 3$$

は有限集合なので S_ε と V は横断的に交わる。

$\mathbf{0} \in V$, $\Sigma(V) = \{\mathbf{0}\}$ と仮定する。 $\rho|_V$ の臨界点は有限集合なので正の数 ε を十分小さく選べば、 $B_\varepsilon \cap V \setminus \{\mathbf{0}\}$ に $\rho|_V$ の臨界点はないと仮定できる。

1.3 錐構造定理

$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| < \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = \varepsilon\}$ とする.

例 1.3 $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^3$ とすると $S_\varepsilon \cap V \subset S_\varepsilon$ は クローバー結び目である. 実際

$$S^1 \rightarrow S_\varepsilon, \quad t = e^{\theta\sqrt{-1}} \mapsto (\varepsilon_1 t^3, \varepsilon_2 t^2) = (\varepsilon_1 e^{3\theta\sqrt{-1}}, \varepsilon_2 e^{2\theta\sqrt{-1}})$$

が $S_\varepsilon \cap V$ を径数づける. 但し $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^3$, $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \varepsilon^2$ を満たす正の数. この像は実際にはトーラス $S_{\varepsilon_1}^1 \times S_{\varepsilon_2}^1$ の中にあることに注意しよう.

$C_0(X)$ で 0 を頂点, X を底とする錐を表し, 次で定義される.

$$C_0(X) = [0, 1] \times X / \{0\} \times X$$

特に $B_\varepsilon = C_0(S_\varepsilon)$ である.

定理 1.4 正の数 ε を十分小さく取れば, $(B_\varepsilon, V \cap B_\varepsilon)$ は $(B_\varepsilon, C_0(V \cap S_\varepsilon))$ と同相である.

証明 $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ 上に次を満たすベクトル場 v を構成する.

1. $\langle v(p), p \rangle > 0$
2. $p \in V \setminus \Sigma(V)$ ならば $v(p) \in T_p V$

$p \in B_\varepsilon \setminus V$ のとき, 点 p の近傍 U_p で $v_p(q) = q$ と置く.

$p \in B_\varepsilon \cap V$ のとき, 点 p の近傍 U_p で局所座標 u_1, \dots, u_n で V が p の近傍で $u_1 = \dots = u_r = 0$ となるものを取る. $\pm \partial_{u_{r+1}}, \dots, \pm \partial_{u_n}$ のいずれかが上の性質を満たす. それを v_p と置く.

さて $\{\lambda_p\}$ を $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ の開被覆 $\{U_p\}$ に付随した 1 の分割とする. 即ち

- $\lambda_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は C^∞ 関数で $\text{supp } \lambda_p$ は U_p のコンパクト部分集合 (よって U_p 以外に零拡張できる).
- 任意の $q \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$ に対し $q \in \text{supp } \lambda_p$ なる p は有限個で $\sum_p \lambda_p(q) = 1$

を満たす $\{\lambda_p\}$ を取る. $v(q) = \sum_p \lambda_p(q) v_p(q)$ が求めるものである.

$w(q) = \frac{v(q)}{2\langle q, v(q) \rangle}$ と置いて微分方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = w(\mathbf{p})$$

の解 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ を考えよう.

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{p}(t)) = 2\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}'(t) \rangle = 2\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{w}(\mathbf{p}(t)) \rangle = 1$$

なので $\rho(\mathbf{p}(t)) = t$ としてよい. $\mathbf{p}(\varepsilon^2) = \mathbf{a} \in S_\varepsilon$ を満たす解は一意的に定まるのでそれを $P(\mathbf{a}, t)$ で表せば,

$$S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2] \rightarrow B_\varepsilon, \quad (t, \mathbf{a}) \mapsto P(\mathbf{a}, t)$$

が求める同相写像を定める. □

1.4 曲線選択補題

定理 1.5 $V \subset \mathbb{R}^n$ を実代数的集合 $g_1, \dots, g_m(x)$ を多項式として $U = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) > 0, \dots, g_m(x) > 0\}$ とする. $U \cap V$ の閉包が原点 $\mathbf{0}$ を含めば, 解析的曲線 $\gamma : ([0, 1), 0) \rightarrow (U \cap V, \mathbf{0})$ が存在する.

証明 次元に関する帰納法で示す. V をその既約成分で置き換えることで, V が既約代数的集合として証明すれば十分である.

原点を含む 1 次元既約代数的集合は, 局所的に

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \dots$$

の像で表されるので, 主張は明らかである.

$U \cap \Sigma V$ の閉包が原点を含めば ΣV は V より次元が小さいので, 帰納法の仮定より, 解析的曲線 $\gamma : ([0, 1), 0) \rightarrow (U \cap \Sigma V, 0)$ が存在するので, 主張は従う. よって $U \cap \Sigma V$ の閉包が原点を含まないと仮定して良い.

V の次元を $n - r$, f_1, \dots, f_k がイデアル $I(V)$ を生成するとする. $\rho(x) = |x|$, $g(x) = g_1(x) \cdots g_m(x)$ として V' を次で定める.

$$V' = \{x \in V : \text{rank}(df_1(x) \ \dots \ df_k(x) \ d\rho(x) \ dg(x)) \leq r + 1\}$$

補題 1.6 $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V'}$

証明 $\{\varepsilon : U \cap V \cap S_\varepsilon \neq \emptyset\}$ の閉包は原点を含むので, この集合から ε を取り,

$$K_\varepsilon = \{x \in V \cap S_\varepsilon : g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

と置く. K_ε はコンパクトなので, 連続関数 g は K_ε のある点 \mathbf{p} で最大値を取る. $\emptyset \neq U \cap V \cap S_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ なので, 最大値は 0 でなく正である. つまり $\mathbf{p} \in U$ $\rho|_V$ は原点以外の臨界点をその近傍に含まず, ε は十分小さいので,

$$\text{rank}(df_1(\mathbf{p}) \dots df_k(\mathbf{p}) d\rho(\mathbf{p})) = r + 1$$

\mathbf{p} は g を $U \cap V \cap S_\varepsilon$ 制限したものの臨界点なので

$$\text{rank}(df_1(\mathbf{p}) \dots df_k(\mathbf{p}) d\rho(\mathbf{p}) dg(\mathbf{p})) = r + 1$$

がわかり, $\mathbf{p} \in V'$ が分かる. □

$V' = V$ でなければ V' は次元が V より下がるので, 解析的曲線 $([0, 1], 0) \rightarrow (U \cap V', 0)$ が存在し主張は従う.

$$V'_i = \{x \in V : \text{rank}(df_1(x) \dots df_k(x) d\rho(x) d(x_i g)(x)) \leq r + 1\}$$

と置けば, 前と同じ理由で $\mathbf{0} \in \overline{U \cap V'_i}$. よって $V = V' = V'_1 = \dots = V'_n$ のときを除いて証明できた.

従って次の補題を認めれば証明は終わる. □

補題 1.7 $V = V' = V'_1 = \dots = V'_n$ ならば $\dim V = 1$.

証明 $x \in U \cap V$ で

$$\text{rank}(df_1(x) \dots df_k(x) d\rho(x)) = r + 1$$

を満たす点 x は存在する. $V = V'$ より

$$dg(x) \in \langle df_1(x), \dots, df_k(x) d\rho(x) \rangle_{\mathbb{R}}$$

で $V = V'_i$ より

$$d(x_i g)(x) \in \langle df_1(x), \dots, df_k(x) d\rho(x) \rangle_{\mathbb{R}}$$

である. $d(x_i g)(x) = dx_i g(x) + x_i dg(x)$ で $g(x) \neq 0$ であるから, 次が分かる.

$$dx_i \in \langle df_1(x), \dots, df_k(x) d\rho(x) \rangle_{\mathbb{R}}$$

dx_1, \dots, dx_n は $T_x^* \mathbb{R}^n$ の基底なので,

$$T_x^* \mathbb{R}^n = \langle df_1(x), \dots, df_k(x) d\rho(x) \rangle_{\mathbb{R}}$$

であり $r + 1 = n$ が分かる. よって V の次元 $n - r$ は 1 である. □

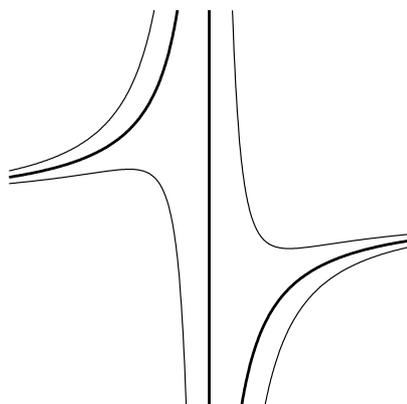
例 1.8 (Broughton) 次で定まる写像を考える.

$$f: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto x(xy + 1).$$

$f_x = 2xy + 1, f_y = x^2$ より $\Sigma(f) = \emptyset$. $t \neq 0$ のとき

$$f^{-1}(t) = \{y = (t - x)/x^2\}.$$

なので, $f^{-1}(t) = \mathbb{K}^*$, $f^{-1}(0) = \mathbb{K} \cup \mathbb{K}^*$ を得る. $t = 0$ で局所自明でない. レベル $-1/2, 0, 1/2$ の f のレベル曲線を図に示す. 太線が 0 のレベルである.



2 ミルナー束

2.1 ミルナー繊維束

正則関数 $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対し

$$\bar{\partial}f = (\bar{f}_{z_1}, \dots, \bar{f}_{z_n})$$

と置くと $\mathbf{p}(0) = z, \frac{d\mathbf{p}}{dt}(0) = \mathbf{v}$ なる曲線 \mathbf{p} に対し,

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^n f_{z_i}(\mathbf{p}(t)) \frac{d}{dt}(z_i \circ \mathbf{p}(t)) = \left\langle \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \overline{\partial f(\mathbf{p}(t))} \right\rangle$$

が成り立つ. ここで $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$ はエルミート内積である. よって

$$D_{\mathbf{v}}f(z) = \langle \mathbf{v}, \overline{\partial f(z)} \rangle$$

が成り立つ.

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}, \quad K_{\varepsilon} = S_{\varepsilon} \cap V$$

と置き, 写像 ϕ を次で定める.

$$\phi : S_\varepsilon \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

本節の目標は次の定理を示すことである.

定理 2.1 $\phi : S_\varepsilon \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1$ は繊維束.

$\phi : E \rightarrow B$ が F を繊維にもつ線維束であるとは, B の各点 b に対しある近傍 U が存在して次の可換図式を満たすような微分同相写像 φ が存在するときを言う.

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \phi \searrow & & \swarrow \text{射影} \\ & & U \end{array}$$

補題 2.2 $\mathbf{v} \in T_z S_\varepsilon$ に対し $D_{\mathbf{v}}\phi(z) = \operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \rangle$. 特に

$$\Sigma(\phi) = \{z \in S_\varepsilon \setminus K_\varepsilon : \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \in \mathbb{R}z\}$$

但し $\overline{\partial \log f(z)} = \overline{\partial f(z)}/\overline{f(z)}$

証明 $f(z)/|f(z)| = e^{\sqrt{-1}\theta}$ と置く,

$$\sqrt{-1}\theta(z) = \log(f(z)/|f(z)|) = \log f(z) - \log |f(z)|$$

の両辺に $-\sqrt{-1}$ を掛けて

$$\theta(z) = -\sqrt{-1} \log f(z) + \sqrt{-1} \log |f(z)|$$

を得る. これの実部を取ると $\theta(z) = \operatorname{Re}(-\sqrt{-1} \log f(z))$.

$$\theta(\mathbf{p}(t)) = \operatorname{Re}(-\sqrt{-1} \log f(\mathbf{p}(t)))$$

を t で微分すると次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta(\mathbf{p}(t)) &= \operatorname{Re} \left(\frac{d}{dt} (-\sqrt{-1} \log f(\mathbf{p}(t))) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \overline{\partial(-\sqrt{-1} \log f(\mathbf{p}(t)))} \right\rangle \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} \right\rangle \end{aligned}$$

もし $\sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \in \mathbb{R}z$ ならば $z = \mathbf{p}(t)$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ として S_ε の任意の接方向をとればこの値は 0 になるので, z は ϕ の臨界点.

逆に, もし $\sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)}$ と z が \mathbb{R} 上 1 次独立ならば $z = \mathbf{p}(t)$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ として S_ε のある接方向 \mathbf{v} をとれば $\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, z \rangle = 0$, $\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \rangle \neq 0$ になるので, z は ϕ の臨界点でない. \square

補題 2.3 実解析的曲線 $\mathbf{p} : ([0, 1), 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ が

$$f(\mathbf{p}(t)) \neq 0 (t > 0), \quad \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} = \lambda(t)\mathbf{p}(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}$$

を満たすとする. この時 $\arg \lambda(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow 0)$

証明 α, β, γ を正の整数, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, b \neq 0, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ として,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= t^\alpha (\mathbf{a} + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \cdots) \\ f(\mathbf{p}(t)) &= t^\beta (b + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) \\ \overline{\partial f(\mathbf{p}(t))} &= t^\gamma (\mathbf{c} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \cdots) \end{aligned}$$

と書く. $\overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} = \lambda(t)\mathbf{p}(t)$ より

$$\overline{\partial f(\mathbf{p}(t))} = \lambda(t)\mathbf{p}(t)\overline{f(\mathbf{p}(t))}$$

なので, 特に次式を得る.

$$ct^\gamma + \cdots = \lambda(t)(\overline{a}bt^{\alpha+\beta} + \cdots)$$

$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots)$ と書くと $\mathbf{c} = \lambda_0 \overline{a}b$ を得る.

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{p}(t)) = \left\langle \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \overline{\partial f(\mathbf{p}(t))} \right\rangle$$

より

$$\beta b t^{\beta-1} + \cdots = \langle \alpha \mathbf{a} t^{\alpha-1} + \cdots, \lambda_0 \overline{a} b t^\gamma + \cdots \rangle$$

なので, 最初の項の係数を比較して $\beta = \alpha |\mathbf{a}|^2 \bar{\lambda}_0$ を得る. よって λ_0 は正の実数.

\square

補題 2.4 十分小さい正数 ε に対し, ϕ は臨界点を持たない.

証明 $W = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i \overline{f_{z_j}} = z_j \overline{f_{z_i}}\}$ と置く. W は z と $\overline{\partial f(z)}$ が \mathbb{C} 上 1 次従属であるような点全体である.

$$z \in W \setminus V \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \overline{\partial f(z)} = \lambda \overline{f(z)} z$$

であった。この最後の式の $\overline{f(z)}z$ との内積を取ると次を得る。

$$\langle \overline{\partial f(z)}, \overline{f(z)}z \rangle = \lambda |\overline{f(z)}z|^2$$

この式は実多項式であることに注意しよう。よって

$$\{z \in \mathbb{C}^n \setminus V : \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \in \mathbb{R}z\}$$

が原点を閉包に含めば、原点に至る解析的な曲線 $\mathbf{p}(t)$ がこの集合内に取れる。

$$\overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} = \lambda(t)\mathbf{p}(t), \lambda(t) \in \mathbb{R}\sqrt{-1} \text{ で}$$

$$\pm \frac{\pi}{2} = \arg \lambda(t) \rightarrow 0 \quad (\text{補題 2.3})$$

となり矛盾。 □

$F_\theta = \phi^{-1}(e^{\theta\sqrt{-1}})$ と置く。これは実 $2n - 2$ 次元多様体である。

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle \neq 0 \quad |\operatorname{Im}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle| < 1$$

を満たすベクトル場 \mathbf{v} を構成する。点 z で z と $\sqrt{-1}\overline{\log f(z)}$ が 1 次独立ならば

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle = 1, \quad \operatorname{Im}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle = 0$$

を解けば良い。点 \mathbf{p} で \mathbf{p} と $\sqrt{-1}\overline{\log f(\mathbf{p})}$ が 1 次従属ならば

$$\overline{\partial \log f(z)} = \lambda z$$

であるが補題 2.3 より \mathbf{p} が原点に近ければ、 $|\operatorname{Im}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle| < 1$ とできる。局所的に構成したベクトル場を 1 の分割で貼り合わせて \mathbf{v} を作り、

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p})} \rangle}$$

と置くと、 $\operatorname{Re}\langle \mathbf{w}, \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(z)} \rangle = 1$ を満たす。この事はベクトル場 \mathbf{w} の積分曲線で時刻 $t = 0$ で \mathbf{a} を通るものを $\mathbf{p}(\mathbf{a}, t)$ と書けば、 $\mathbf{a} \in F_{t_0}$ ならば $\mathbf{p}(\mathbf{a}, t) \in F_{t_0+t}$ である事を示している..

実はそのためには $t \rightarrow t_0$ のとき $\mathbf{p}(t)$ が K に近づかない事、即ち $f(\mathbf{p}(t)) \rightarrow 0$ とならない事、を示す必要がある。このためには

$$\operatorname{Re} \log f(\mathbf{p}(t)) \rightarrow -\infty$$

となり得ない事を示せば良い。

$$\frac{d}{dt} \log f(\mathbf{p}(t)) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t), \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} \right\rangle = \operatorname{Re} \langle \mathbf{w}(\mathbf{p}(t)), \lambda(t)\mathbf{p}(t) \rangle$$

は $\langle \mathbf{w}, \sqrt{-1} \partial \log f(z) \rangle$ の虚部で, 補題 2.3 より絶対値は 1 より小さい. よって $|f(\mathbf{p}(t))|$ は零にはならず下に有界である.

$$F_{t_0} \rightarrow F_{t_0+t}, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{a}, t)$$

は微分同相写像であることが証明できる. 実際

$$F_{t_0+t} \rightarrow F_{t_0}, \quad \mathbf{b} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{b}, -t)$$

が逆写像である.

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times F_{t_0} \rightarrow \phi^{-1}(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \quad (t, \mathbf{a}) \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{a}, t)$$

が局所自明化写像を与えるので $\phi: S_\varepsilon \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1$ は繊維束である.

2.2 ミルナー束の別の形

複素多項式 $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ に対し, 十分小さい正の数 δ を取れば, \mathbb{C} 内の原点中心の半径 δ の開円板 D_δ に対し,

$$\rho: f^{-1}(t) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in D_\delta$$

は, 原点中心のある開球 B_ε では, 原点以外の臨界点を持たない. このとき, 写像

$$\tilde{\psi}: \overline{B_\varepsilon} \cap f^{-1}(D_\delta \setminus \{0\}) \rightarrow D_\delta \setminus \{0\}, \quad z \mapsto f(z)$$

は特異点を持たず, $0 < \delta' < \delta$ なる δ' に対し, $\overline{B_\varepsilon} \cap f^{-1}(S_{\delta'})$ は有界閉集合なのでコンパクトであり,

$$\psi: \overline{B_\varepsilon} \cap f^{-1}(S_{\delta'}) \rightarrow S_{\delta'} \quad z \mapsto f(z) = \delta' e^{\sqrt{-1}\theta(z)}$$

は固有写像で, 繊維束である. z が f の正則点だとすると f は座標の一部と仮定できるので $f(z) \neq 0$ ならば f の偏角も座標の一部となり ψ は z で正則である事がわかる.

補題 2.5 繊維束 $\psi: \overline{B_\varepsilon} \cap f^{-1}(S_\delta) \rightarrow S_\delta$ は次の繊維束と同値である.

$$\phi': S_\varepsilon \setminus f^{-1}(\overline{D_{\delta'}}) \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

証明 次の条件を満たす $\overline{B_\varepsilon} \setminus V$ 上のベクトル場 \mathbf{v} を構成する.

1. $\langle \mathbf{v}(z), \overline{\partial \log f(z)} \rangle > 0$
2. $\operatorname{Re} \langle \mathbf{v}(z), z \rangle = 1$

z と $\partial \log f(z)$ が \mathbb{C} 上 1 次独立ならば, $B_\varepsilon \setminus V$ 上のベクトル場 \mathbf{v} で次の条件をみたすものを取る.

$$\langle \mathbf{v}(z), \overline{\partial \log f(z)} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{v}(z), z \rangle = 1$$

z と $\partial \log f(z)$ が \mathbb{C} 上 1 次従属ならば, $\overline{\partial \log f(z)} = \lambda z$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する. $\mathbf{v}(z) = \lambda z$ と置くと, 補題 2.3 より $\operatorname{Re} \lambda > 0$. よって

$$\langle \mathbf{v}(z), \overline{\partial \log f(z)} \rangle = \langle \lambda z, \lambda z \rangle = |\lambda z|^2 > 0, \quad \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}(z), z \rangle = \operatorname{Re}(\lambda) |z|^2 > 0$$

よって 1 の分割を使えば, $\operatorname{Re} \langle \mathbf{v}(z), z \rangle$ が正のベクトル場 \mathbf{v} が構成できた. よって $\mathbf{v} / \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}(z), z \rangle$ は条件を満たすベクトル場.

次を満たす $\mathbf{p}(t)$ を取る.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{p}(t)), \quad \mathbf{p}(0) = z_0$$

このとき次が成り立つ.

1. $\phi(\mathbf{p}(t))$ は定数.
2. $|f(\mathbf{p}(t))|$ は増加関数.
3. $|\mathbf{p}(t)|$ は増加関数.

実際, 仮定より $\langle \mathbf{v}(\mathbf{p}(t)), \sqrt{-1} \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} \rangle$ は実部が 0 である. 補題 2.3 より, $\phi(\mathbf{p}(t))$ は定数である.

また, 次式より $\frac{d}{dt} |f(\mathbf{p}(t))| > 0$ なので $|f(\mathbf{p}(t))|$ は増加関数である.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}(\mathbf{p}(t)), \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} \rangle &= \langle \mathbf{p}'(t), \frac{\overline{\partial f(\mathbf{p}(t))}}{f(\mathbf{p}(t))} \rangle \\ &= \frac{1}{f(\mathbf{p}(t))} \langle \mathbf{p}'(t), \overline{\partial f(\mathbf{p}(t))} \rangle \\ &= \frac{1}{f(\mathbf{p}(t))} \frac{d}{dt} |f(\mathbf{p}(t))| \frac{f(\mathbf{p}(t))}{|f(\mathbf{p}(t))|} \\ &= \frac{1}{|f(\mathbf{p}(t))|} \frac{d}{dt} |f(\mathbf{p}(t))| > 0 \end{aligned}$$

さらに次式より $|\mathbf{p}(t)|$ は増加関数.

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{p}(t)|^2 = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{p}'(t), \mathbf{p}(t) \rangle > 0$$

$\mathbf{p}(t_1) \in S_\varepsilon$ なる t_1 を取り微分同相写像 Θ を次で定める.

$$\Theta : B_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\delta) \rightarrow S_\varepsilon \setminus f^{-1}(D_\delta), \quad z_0 \mapsto \mathbf{p}(t_1)$$

$|f(\mathbf{p}(t_1))| > |f(\mathbf{p}(0))| = \delta$ なので $\mathbf{p}(t_1) \notin f^{-1}(\overline{D_\delta})$ である。 \square

補題 2.6 繊維束 $\phi' : S_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\delta) \rightarrow S^1$ は, 繊維束 $\phi : S_\varepsilon \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^1$ と同値である。

2.3 ミルナー束の位相

ミルナー束 F_θ 上の次の関数を考える。

$$a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \log |f(z)| = \operatorname{Re} \log f(z)$$

$\mathbf{v} \in T_x F_\theta$ は $\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, z \rangle = 0, \operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \sqrt{-1}\partial \log f(z) \rangle = 0$ と同値。

補題 2.7 $\Sigma(a_\theta) = \{z \in F_\theta : \overline{\partial \log f(z)} \in \mathbb{C}z\}$

系 2.8 $z \in \Sigma(a_\theta)$ のとき

- $T_z F_\theta = \{\mathbf{v} : \langle \mathbf{v}, z \rangle = 0\}$.
- $\mathbf{v} \in T_z F_\theta \implies \sqrt{-1}\mathbf{v} \in T_z F_\theta$.

$$\frac{d}{dt} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \log f(\mathbf{p}(t)) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t), \overline{\partial \log f(\mathbf{p}(t))} \right\rangle$$

$$a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \log |f(\mathbf{p}(t))| = \log f(z) - \sqrt{-1}\theta$$

を微分して

$$\frac{d}{dt} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^n (\log f)_{z_i} \frac{d}{dt} z_i \circ \mathbf{p}(t)$$

を得るがこれをもう 1 回微分する。

$$\frac{d^2}{dt^2} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^n (\log f)_{z_i} \frac{d^2}{dt^2} z_i \circ \mathbf{p}(t) + \sum_{i,j=1}^n (\log f)_{z_i z_j} \frac{d}{dt} z_i \circ \mathbf{p}(t) \frac{d}{dt} z_j \circ \mathbf{p}(t)$$

ここで $\overline{\partial \log f(z)} = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}$ と置いて

$$\frac{d^2}{dt^2} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \langle \mathbf{p}''(t), \lambda z \rangle + \sum_{i,j=1}^n (\log f)_{z_i z_j} v_i v_j$$

を得るが, 両辺に λ を掛けて実部を取ると

$$(\operatorname{Re} \lambda) \frac{d^2}{dt^2} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = |\lambda|^2 \langle \mathbf{p}''(t), z \rangle + \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \lambda (\log f)_{z_i z_j} v_i v_j$$

$\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t) \rangle = \varepsilon^2$ を微分して

$$\langle \mathbf{p}'(t), \mathbf{p}(t) \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p}''(t), \mathbf{p}(t) \rangle + \langle \mathbf{p}'(t), \mathbf{p}'(t) \rangle = 0$$

を得るので $\langle \mathbf{p}''(t), z \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ となり,

$$(\operatorname{Re} \lambda) \frac{d^2}{dt^2} a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n \lambda (\log f)_{z_i z_j} v_i v_j \right) - |\lambda \mathbf{v}|^2$$

を得る.

補題 2.9 $T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \langle \mathbf{v}, z \rangle = 0\}$ 上の 2 次形式

$$H(\mathbf{v}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j \right) - c |\mathbf{v}|^2$$

の指数は n 以上である.

証明 $T = T_0 \oplus T_1$ とし T_0 上 H は負定値, T_1 上 H は半正定値とする. $\dim T_0 \geq n$ が示したいことである. $H(\mathbf{v})$ の定義より, $H(\mathbf{v}) \geq 0$ ならば $H(\sqrt{-1}\mathbf{v}) < 0$ である. よって $\sqrt{-1}T_1$ 上でも負定値である.

$$\dim T_0 \geq \dim(\sqrt{-1}T_1) = \dim T_1 = 2n - \dim T_0$$

となり, $\dim T_0 \geq n$. □

例 2.10 $f(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ とする. $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = \varepsilon\}$ と置く. $F = B_\varepsilon \cap f^{-1}(\delta)$

$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ と置くと

$$f(z) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 + 2\sqrt{-1}(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

$\rho = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)/2$ と置いて $f^{-1}(\delta)$ 上 ρ を制限して得られる関数の特異点を調べる. $L = \rho + \frac{\lambda_1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 - \delta) + \lambda_2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$ と置く.

$$L_{x_i} = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i$$

$$L_{y_i} = y_i - \lambda_1 y_i + \lambda_2 x_i$$

より $L_{x_i} = L_{y_i} = 0$ を解けば $\lambda_1^2 - \lambda_1 + \lambda_2^2 \neq 0$ のときは $x_i = y_i = 0$ を得る. $\lambda_1^2 - \lambda_1 + \lambda_2^2 = 0$ のときは $\lambda_2 = \pm \sqrt{\lambda_1(1-\lambda_1)}$ であり, $\lambda_1 \neq 0, 1$ ならば $y_i = \mp \frac{\lambda_1 x_i}{\sqrt{\lambda_1(1-\lambda_1)}}$ となり,

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 = \frac{2\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 1} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \mp \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1(1-\lambda_1)}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

なので後者が零という条件から $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ を得る. $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ とすると、条件 $y_i = 0$ を得る.

$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ とすると、条件 $x_i = 0$ を得る.

これより $\rho|_F$ は $y_1 = \cdots = y_n = 0$ 以外では沈め込みである. よって F は $S^{n-1} = \rho^{-1}(0) \cap f^{-1}(\delta)$ にホモトピー同値.

2.4 ミルナー数

原点に孤立特異点を持つ多項式 $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、その原点でのミルナー数 $\mu(f)$ を次で定める.

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] / \langle f_{z_1}, \dots, f_{z_n} \rangle$$

定理 2.11 $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を正則関数 $f_0(x) = f(x)$ の変形とすると f_t の特異点で $t \rightarrow 0$ としたとき、原点に近づくものの個数は $\mu(f)$ 個である.

証明 $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ を座標とする \mathbb{C}^{2n} を考える. f の変形 f_t に対し写像

$$F_t : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n, (f_t)_{z_1}, \dots, (f_t)_{z_n})$$

$F_t(\mathbb{C}^n) = \{(x, p) : f_{t_{z_i}}(x) = p_i, i = 1, \dots, n\}$ と $\Sigma = \{p_1 = \cdots = p_n = 0\}$ との交点を考える. $U = \tilde{U} \cap \Sigma$ を満たす $(0, 0)$ の近傍 \tilde{U} をうまくとれば

$$\begin{aligned} \#\Sigma(f_t) \cap U &= (F_t \cdot \Sigma)_{\tilde{U}} = (F_0 \cdot \Sigma)_0 \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n]] / \langle p_i - f_{z_i}(x), p_i \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] / \langle f_{z_1}, \dots, f_{z_n} \rangle = \mu(f) \end{aligned}$$

□

Σ の接ベクトル空間は $\partial_{x_i}, i = 1, \dots, n,$ で、 $F_t(\mathbb{C}^n)$ の接ベクトル空間は $\partial_{x_i} + (f_t)_{x_i} \partial_{p_i}, i = 1, \dots, n,$ で生成される. $F_t(z) \in \Sigma$ のとき Σ の $F_t(z)$ での接ベクトル空間と $F_t(\mathbb{C}^n)$ の $F_t(z)$ での接ベクトル空間が横断的であることは、次と同値

$$\det[(f_t)_{x_i x_j}(z)] \neq 0$$

これは z が f_t のモース特異点である事を意味している.

$f_t(x) = f(x) - t_1x_1 - \dots - t_nx_n$ と置くと

$$(f_t)_{x_i}(x) = f_{x_i}(x) - t_i, \quad i = 1, \dots, n$$

である. (t_1, \dots, t_n) が写像

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$$

の臨界値でなければ, $f_{x_i}(z) = t_i$ なる z に対し, $F_t(z) \in \Sigma$ で Σ の $F_t(z)$ での接ベクトル空間と $F_t(\mathbb{C}^n)$ の $F_t(z)$ での接ベクトル空間は横断的である.

例 2.12 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x^3$, を変形 $f_t(x) = x^3 - 3tx$ で動かす. $\Sigma(f_t) = \{\pm\sqrt{t}\}$ で, $t \rightarrow 0$ としたときこの 2 個の特異点は原点に近づく.

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]] / \langle f_x \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]] / \langle x^2 \rangle = 2$$

注意 2.13 $\mu(f)$ を計算するプログラム (Singular) もある. 局所環の標準基底を計算するプログラムである. 次で $f(x, y) = x^2 + y^2$ のミルナー数が計算できる.

```
ring r=0,(x,y),ds;   環の定義 (標数 0, x, y が変数, ds は標準基底の意味)
poly f=x^2+y^2;     多項式 f の定義
ideal i=jacob(f);   多項式 f のヤコビイデアル i の計算
ideal j=std(i);     イデアル i の標準基底を j とする
vdim(j);           dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x,y]]/j の計算
```

2.5 $n = 2$ のとき

多項式 $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ が原点で孤立特異点を持つとする. このときミルナー繊維 F_θ は K_ε を境界にする境界付き実 2 次元多様体であり,

$$H_0(F_\theta, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(F_\theta, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\mu$$

である. f が r 個の局所規約因子を持つとすると, F_θ の境界は r 個の互いに素な S^1 である. F_θ に r 個の円盤を貼り付けて種数 δ の閉曲面 \hat{F} ができるとすると

$$2(1 - \delta) = \chi(\hat{F}) = \chi(F_\theta) + r = (1 - \mu) + r$$

よって $\mu = 2\delta - r + 1$. この δ は平面曲線の 2 重点の個数として知られている不変量である.

3 ニュートン図形と混合体積

3.1 ニュートン図形

収束冪級数 $f = \sum_{\nu} c_{\nu} x^{\nu}$ に対し $\Gamma_{+}(f) = \text{conv}\{\nu + \mathbb{R}_{+}^n : c_{\nu} \neq 0\}$, $\Gamma_{-}(f) = \mathbb{R}_{+}^n \setminus \Gamma_{+}(f)$ と置く. $\Gamma(f)$ で $\Gamma_{+}(f)$ のコンパクト面の和集合とする.

$S \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $f_S = \sum_{\nu \in S} c_{\nu} x^{\nu}$ と置く. f が各 x_i のある冪を含むとき好都合という.

冪級数 f が非退化とは, $\Gamma_{+}(f)$ の任意のコンパクト面 γ に対し次が成り立つときを言う.

$$\{z \in \mathbb{C}^n : (f_{\gamma})_{z_1}(z) = \cdots = (f_{\gamma})_{z_n}(z) = 0\} \subset \{z_1 \cdots z_n = 0\}$$

本節の目標は次の公式を証明することである.

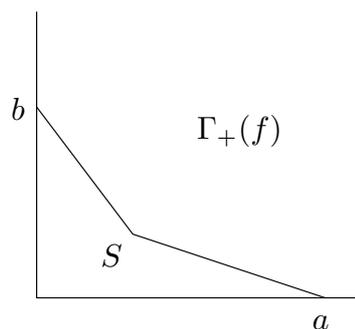
定理 3.1 (Kouchnirenko) f が局所非退化かつ好都合ならば,

$$\mu(f) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \text{Vol}_k(\Gamma_{-}(f) \cap \mathbb{R}^I), \quad k = \#I$$

2変数の場合この定理は次のことを主張している.

定理 3.2 2変数の収束冪級数 $f(x, y) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j$ が原点で孤立特異点を定め, 非退化好都合とする. $\Gamma_{-}(f)$ の面積を S , x 軸と $\Gamma(f)$ との交点の x 座標を a , y 軸と $\Gamma(f)$ との交点の y 座標を b とするとき,

$$\mu(f) = 2S - a - b + 1$$



3.2 交点数

\mathbb{C}^n 内の超曲面

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}^n : f_i(z) = 0\}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

に対し、原点 0 の近傍 U が存在して $U \cap D_1 \cap \cdots \cap D_n = \{0\}$ とするとき、 D_1, \dots, D_n の原点での局所交点数を次で定める。

$$(D_1 \cdots D_n)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] / \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

$f_{t,i}(z)$ が $f_{0,i}(z) = f_i(z)$ を満たすとする。 $D_i(t) = (f_{t,i})^{-1}(0)$ と置き

$$(D_1(t) \cdots D_n(t))_U = \sum_{P \in U} (D_1(t) \cdots D_n(t))_P$$

と置く。これは整数値をとり t に関して連続なので、局所的に定数である。更に $D_i(t)$ 達が横断的に交わる時、 $D_1(t) \cap \cdots \cap D_n(t)$ の個数である事がわかる。
 $V = D_1 \cap \cdots \cap D_k, W = D_{k+1} \cap \cdots \cap D_n$ とするとき V, W の原点での局所交点数を次で定める。 $(V \cdot W)_0 = (D_1 \cdots D_n)_0$ 。

多項式 $f = \sum_{\nu} c_{\nu} x^{\nu} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $\Delta(f) = \text{conv}\{\nu : c_{\nu} \neq 0\}$ を f のニュートン多角形という。多項式 f のニュートン多角形 $\Delta(f)$ はコンパクトであることに注意しよう。多項式 f が非退化とは、 $\Delta(f)$ の各面 γ に対し

$$\{x \in \mathbb{C}^n : (f_{\gamma})_{x_1}(x) = \cdots = (f_{\gamma})_{x_n}(x) = 0\} \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

が成り立つときを言う。

3.3 混合体積とその性質

\mathbb{R}^n の有限集合 $C = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r\}$ に対し、 C の凸包 $\text{conv}(C)$ を次で定める。

$$\text{conv}(C) = \{\lambda_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + \lambda_r \mathbf{q}_r : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1\}$$

$\dim(\text{conv}(C)) = \text{rank}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r - \mathbf{q}_1)$ に注意しよう。有限集合の凸包を凸多面体という。

定理 3.3 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ を \mathbb{R}^n の凸多面体とする。 $\text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m)$, $\lambda_i \geq 0$, は $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の n 次斉次多項式である。

注意 3.4 体積は平行移動で不変である。即ち、多面体 Δ と点 \mathbf{q} に対し、

$$\text{Vol}(\Delta) = \text{Vol}(\mathbf{q} + \Delta)$$

である。 $\mathbf{q} = \lambda_1 \mathbf{q}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{q}_m, \Delta = \lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m$ の時

$$\mathbf{q} + \Delta = \lambda(\mathbf{q}_1 + \Delta_1) + \cdots + \lambda_m(\mathbf{q}_m + \Delta_m)$$

なので、次の等号が成立する。

$$\text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m) = \text{Vol}(\lambda_1(\mathbf{q}_1 + \Delta_1) + \cdots + \lambda_m(\mathbf{q}_m + \Delta_m)).$$

証明 $n = 1$ のとき, $\Delta_i = [p_i, q_i]$ ($p_i \leq q_i$) と書けば

$$\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m = [\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m, \lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_m q_m]$$

なので

$$\text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m) = \lambda_1 (q_1 - p_1) + \cdots + \lambda_m (q_m - p_m)$$

となり主張は明らか.

$n - 1$ のときを仮定し, n のときを示す. $\Delta_\Lambda = \lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m$ と置く. u を零でないベクトルとする.

$$H_{K_j}(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = \min(u|_{K_j})\}, \quad F_j = \Delta_j \cap H_{K_j}(u)$$

と置く. $F_\Lambda(u) = H_{\Delta_\Lambda}(u) \cap \Delta_\Lambda$ と置くと

$$F_\Lambda(u) = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$$

平行移動で体積は変わらないので F_i は H_{Δ_Λ} 上にあるとしてよい. 更に $0 \in \Delta_\Lambda$ としてよい. $\dim \Delta_\Lambda < n$ なら, 結論は明らかなので, $\dim \Delta_\Lambda = n$ とする. u_1, \dots, u_l を Δ_Λ の $n - 1$ 次元面の外向き単位法ベクトルとする. Δ_Λ を原点を頂点とする錐に分けて計算する. $v(\cdot)$ を $n - 1$ 次元体積, h_{Δ_Λ} を Δ_Λ の支持関数とすると,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta_\Lambda) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m h_{\Delta_\Lambda}(u_j) v(F_\Lambda(u_j)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (\lambda_1 h_{\Delta_1}(u_j) + \cdots + \lambda_l h_{\Delta_l}(u_j)) v(F_\Lambda(u_j)) \end{aligned}$$

となるが, 帰納法の仮定より $v(F_\Lambda(u_j))$ は $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の $n - 1$ 次斉次多項式なので $v(F_\Lambda(u_j))$ は n 次斉次多項式である. \square

この多項式の $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ の係数を $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ の混合体積といい $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ で表す. $\lambda_1^{d_1} \cdots \lambda_m^{d_m}$ ($d_1 + \cdots + d_m = n$) の係数も混合体積で表すことができる.

定理 3.5

$$\text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \cdots + \lambda_m \Delta_m) = \sum_{d_1 + \cdots + d_m = n} \frac{V(\Delta_1[d_1], \dots, \Delta_m[d_m])}{d_1! \cdots d_m!} \lambda_1^{d_1} \cdots \lambda_m^{d_m}$$

但し $V(\Delta_1[d_1], \dots, \Delta_m[d_m]) = V(\overbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}^{d_1}, \dots, \overbrace{\Delta_m, \dots, \Delta_m}^{d_m})$.

証明 $\text{Vol}(\lambda_1\Delta_1 + \cdots + \lambda_m\Delta_m) = \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} c_{i_1,\dots,i_m} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_m^{i_m}$ と書く.

$$\text{Vol}\left(\sum_{j=1}^{d_1} \lambda_{1,j}\Delta_1 + \cdots + \sum_{j=1}^{d_m} \lambda_{m,j}\Delta_m\right) \quad (3.1)$$

の $(\prod_{i=1}^{d_1} \lambda_{1,i}) \cdots (\prod_{i=1}^{d_m} \lambda_{m,i})$ の係数が混合体積 $V(\Delta_1[d_1], \dots, \Delta_m[d_m])$ である. $\text{Vol}(\lambda_1\Delta_1 + \cdots + \lambda_m\Delta_m)$ に $\lambda_i = \sum_{j=1}^{d_i} \lambda_{i,j}$ を代入すれば,

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=m} c_{i_1,\dots,i_m} \left(\sum_{j=1}^{d_1} \lambda_{1,j}\right)^{i_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^{d_m} \lambda_{m,j}\right)^{i_m}$$

となり, これは (3.1) に等しい. その $(\prod_{i=1}^{d_1} \lambda_{1,i}) \cdots (\prod_{i=1}^{d_m} \lambda_{m,i})$ の係数は

$$c_{d_1,\dots,d_m} d_1! \cdots d_m!$$

となり結果を得る. □

定理 3.6 混合体積について次が成り立つ.

- (i) $V(\Delta, \dots, \Delta) = n! \text{Vol}(\Delta)$
- (ii) $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ は対称, 即ち
 n 次対称群の元 σ に対し $V(\Delta_{\sigma(1)}, \dots, \Delta_{\sigma(n)}) = V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.
- (iii) $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ は多重線型, 即ち
 $V(a\Delta_1 + b\Delta'_1, \dots, \Delta_n) = aV(\Delta_1, \dots, \Delta_n) + bV(\Delta'_1, \dots, \Delta_n)$.

証明 (i) は次より明らか.

$$\lambda^n \text{Vol}(\Delta) = \text{Vol}(\lambda\Delta) = \lambda^n V(\Delta, \dots, \Delta)/n!$$

最初の等式は n 次元体積の定義より従う. 2 番目の等号は定理 3.5 で $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ とすれば従う. (ii) は定義より明らか.

(iii) は次式の両辺の $\lambda_1 \dots \lambda_m$ の係数を比較すれば得られる.

$$\begin{aligned} & \text{Vol}(\lambda_1(a\Delta_1 + b\Delta'_1) + \lambda_2\Delta_2 + \cdots + \lambda_n\Delta_n) \\ = & \sum_{d_1+d'_1+d_2+\cdots+d_m=n} \frac{V(\Delta_1[d_1], \Delta'_1[d'_1], \Delta_2[d_2], \dots, \Delta_m[d_m])}{d_1!d'_1!d_2!\cdots d_m!} \\ & \times (a\lambda_1)^{d_1} (b\lambda_1)^{d'_1} \lambda^{d_2} \cdots \lambda^{d_m} \end{aligned}$$

□

注意 3.7 混合体積 $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ は (i), (ii), (iii) で特徴付けることができる。なお (i) で $V(\Delta, \dots, \Delta) = \text{Vol}(\Delta)$ となるように混合体積 $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ を定める流儀もある。定数倍の差なので理論構成に本質的な差はないが、文献を参照する際には注意しなければならない。

$\tilde{\Delta}_i = \text{conv}\{0, \Delta_i\}$ と置き、 $\tilde{\Delta}_i \setminus \Delta_i$ の閉包を Γ_i と書く。 $\text{Vol}(\lambda_1 \Gamma_1 + \dots + \lambda_n \Gamma_n)$ は

$$\begin{aligned} & \text{Vol}(\lambda_1 \Gamma_1 + \dots + \lambda_n \Gamma_n) \\ &= \text{Vol}(\lambda_1 \tilde{\Delta}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{\Delta}_n) - \text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \dots + \lambda_n \Delta_n) \end{aligned}$$

なので $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の n 次同次式である。 $\lambda_1 \dots \lambda_n$ の係数を、 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ の混合体積と呼び $V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ で表す。定義より次式が成り立つ。

$$V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = V(\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_n) - V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$$

定理 3.8 混合体積は体積の交代和で表される。

$$V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \sum_I (-1)^{n-\#I} \text{Vol}(\sum_{i \in I} \Delta_i)$$

ここで右辺の和は $\{1, \dots, n\}$ の空でない部分集合 I すべてについて取る。

証明 前定理より、所要の式は次の恒等式の帰結である。

$$a_1 \cdots a_n = \frac{1}{n!} \sum_I (-1)^{n-\#I} (\sum_{i \in I} a_i)^n \quad (3.2)$$

$a_{i_1} \cdots a_{i_n}$ が $V(\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_n})$ に対応している。従って $\frac{1}{n!} (\sum_{i \in I} a_i)^n$ が $V(\sum_{i \in I} \Delta_i, \dots, \sum_{i \in I} \Delta_i)/n! = \text{Vol}(\sum_{i \in I} \Delta_i)$ に対応する事に注意。恒等式 (3.2) の導出は演習に残す。 \square

3.4 混合分割

\mathbb{R}^n の有限集合の列 $A = (A_1, \dots, A_m)$ を考える。 $\cup_i A_i$ のアファイン包は \mathbb{R}^n と仮定する。 $C_i \subset A_i$ を満たす $C = (C_1, \dots, C_m)$ を A の混合胞体と言う。 $(\dim(\text{conv } C_1), \dots, \dim(\text{conv } C_m))$ を胞体の型という。 $\text{conv}(C)$, $\text{Vol}(C)$ を次で定める。

$$\text{conv}(C) = \text{conv}(C_1 + \dots + C_m), \quad \text{Vol}(C) = \text{Vol}(\text{conv}(C))$$

$F = (F_1, \dots, F_m)$, $F_i \subset C_i$, で, ある線型関数 $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^\vee$ の C_i の制限が丁度 F_i で最小値を取るとき, F を混合胞体 C の面という. このとき $\text{conv}(F_i)$ は $\text{conv}(C_i)$ の面であることを注意しよう. この α を F の内向法ベクトルと言う.

次を満たす混合胞体の集合 $\Gamma = \{C^{(1)}, \dots, C^{(k)}\}$ を A の分割という.

- (i) $\dim(\text{conv } C^{(j)}) = n$
- (ii) $\text{conv}(C^{(j)}) \cap \text{conv}(C^{(j')})$ は $\text{conv}(C^{(j)})$ の面
- (iii) $\text{conv}(A) = \cup_{j=1}^k \text{conv}(C^{(j)})$

ここでさらに, 次の (iv) を満たす Γ を混合分割, 次の (iv), (v) を満たす Γ を良混合分割 (または単体的混合分割) と呼ぶ.

- (iv) $\sum_{i=1}^m \dim(\text{conv}(C_i^{(j)})) = n$
- (v) Γ の各 $C^{(j)}$ に対し $\sum_{i=1}^m (|C_i^{(j)}| - 1) = n$

注意 3.9 ここで分割が混合分割となる条件を調べておこう.

$C = (C_1, \dots, C_m)$ を 1 つの混合複体とすると $C_i = \{\mathbf{q}_{i,0}, \dots, \mathbf{q}_{i,k_i}\}$ と書いて

$$V(C) = (V(C_1), \dots, V(C_m)), \quad V(C_i) = (\mathbf{q}_{i,1} - \mathbf{q}_{i,0}, \dots, \mathbf{q}_{i,k_i} - \mathbf{q}_{i,0}),$$

$V(C_i)$ の各列ベクトルの生成するベクトル空間を W_i とすれば

$$\dim(\text{conv}(C_i)) = \dim W_i, \quad \dim(\text{conv}(C)) = \dim(W_1 + \dots + W_m)$$

である.

$$n = \dim(W_1 + \dots + W_m) \leq \dim W_1 + \dots + \dim W_m$$

なので, 混合分割であることは, $W_1 + \dots + W_m$ が直和であることを意味している. 混合複体 C の型を (d_1, \dots, d_m) とすると $d_1 + \dots + d_m = n$ である. Γ が良混合分割ならば, $V(C)$ は $n \times n$ 行列で, 条件 (i) より $\det V(C) \neq 0$ である.

多面体の列 $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ に対して, その頂点の集合の混合分割を $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_m$ の混合分割と呼ぶ. Δ の面 F は $F = F_1 + \dots + F_m$, F_i は Δ_i の面, と分割される.

定理 3.10 $(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ の混合分割 $\Gamma = \{C^{(1)}, \dots, C^{(k)}\}$ に対し次が成り立つ.

$$V(\Delta_1[d_1], \dots, \Delta_m[d_m]) = \sum_{j=1}^k d_1! \cdots d_m! \text{Vol}(C_1^{(j)} + \dots + C_m^{(j)})$$

但し, 右辺の和は型が (d_1, \dots, d_m) である混合胞体 $C^{(j)}$ すべてについて取る.

証明 $C_\lambda^{(j)} = (\lambda_1 C_1^{(j)}, \dots, \lambda_m C_m^{(j)})$ と置くと, $(C_\lambda^{(1)}, \dots, C_\lambda^{(k)})$ は $(\lambda_1 \Delta_1, \dots, \lambda_m \Delta_m)$ の混合分割である. $C^{(j)}$ が (d_1, \dots, d_m) 型なら $C_\lambda^{(j)}$ も (d_1, \dots, d_m) 型で

$$\text{Vol}(S_\lambda) = \text{Vol}(C_1^{(j)} + \dots + C_m^{(j)}) \lambda_1^{d_1} \dots \lambda_m^{d_m}$$

である. 実際, 注意 3.4 より, 各 Δ_i が原点を頂点として持つと仮定してよく, 各 Δ_i を含む次元方向に λ_i 倍すると体積は λ^{d_i} されることが分かる. よって $\text{Vol}(S_\lambda)$ は $\lambda_1^{d_1} \dots \lambda_m^{d_m}$ の定数倍である. $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$ と置くとその定数が分かる.

よって

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\lambda_1 \Delta_1 + \dots + \lambda_m \Delta_m) &= \sum_{j=1}^k \text{Vol}(\lambda_1 C_1^{(j)} + \dots + \lambda_m C_m^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^k \text{Vol}(C_1^{(j)} + \dots + C_m^{(j)}) \lambda^{\text{type} C^{(j)}} \end{aligned}$$

定理 3.5 を用いて, 両辺の $\lambda^{d_1} \dots \lambda^{d_m}$ の係数を比較すれば結果を得る. □

$\omega_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) に対し, A_i の持ち上げ \hat{A}_i を次で定める.

$$\hat{A}_i = \{(q, \omega_i(q)) : q \in A_i\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$\hat{A} = (\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m)$ と置く.

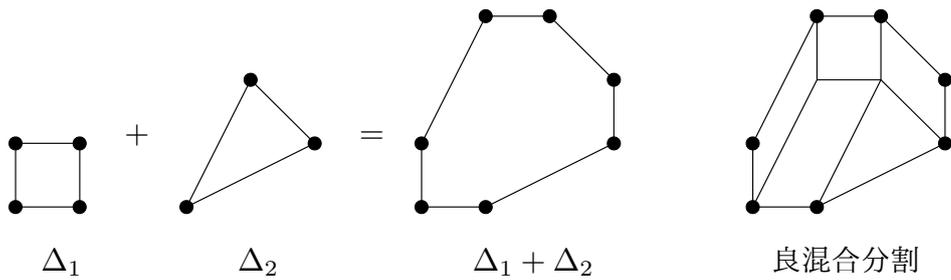
$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ に対し, 次を満たす A の混合胞体 $C = (C_1, \dots, C_m)$ 全体を $A(\omega)$ で表す.

1. $\dim(\text{conv}(\hat{C})) = n$
2. \hat{C} は \hat{A} の面でその内向き法ベクトルの最後の成分は正.

$\hat{\Delta}_i = \text{conv}(\hat{A}_i)$, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_1 + \dots + \hat{\Delta}_m$ とすれば, $\text{conv}(\hat{C})$ は $\hat{\Delta}$ の n 次元面である. $\hat{\Delta}$ の n 次元面は内向き法ベクトルの最後の成分が正のものと負のものがあるが, 正のもののみを集め最後の成分を忘れて作った A の細分が $A(\omega)$ である.

補題 3.11 $A(\omega)$ は A の分割である. この分割の各胞体 \hat{C} について $V(\hat{C})$ が階数最大 ($\min\{n+1, |C| - m\}$) であれば $A(\omega)$ は A の良混合分割である.

例 3.12 ミンコフスキー和 $\Delta_1 + \Delta_2$ の例と (Δ_1, Δ_2) の混合分割の例を挙げる.



注意 3.13 (A_1, \dots, A_n) を与えた時, その混合分割を計算し, $\Delta_i = \text{conv}(A_i)$ と
して, 前定理を用いて混合体積 $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ を計算するプログラム (DEMICS
*¹) も存在する. 例で説明しよう. ファイル `example.dat` を次のデータとする.

Dim = 2	次元を 2 とする
Support = 2	m を 2 とする
Elem = 3 4	A_1, A_2 の頂点の個数を定める。
Type = 1 1	d_1, d_2 を定める
0 0	A_1 の 1 番目の頂点の座標
2 1	A_1 の 2 番目の頂点の座標
1 2	A_1 の 3 番目の頂点の座標
0 0	A_2 の 1 番目の頂点の座標
0 1	A_2 の 2 番目の頂点の座標
1 1	A_2 の 3 番目の頂点の座標
1 0	A_2 の 4 番目の頂点の座標

コマンド `demics.exe -c example.dat` を実行すると, まず次が出力される.

```

-----
* Seed number = 1
* Lifting values for elements in each support set
S1   : 8.40188    3.94383    7.83099
S2   : 7.9844    9.11647    1.97551    3.35223
-----

```

これは ω の各頂点での値を定めている. この ω が定める混合分割の混合胞体で,
その型が上の Type で指定したもの (今の場合は (1, 1)) が次に出力される.

*¹ 水谷, 竹田氏によるソフトウェアパッケージ. Google 等で検索すると見つかるだろう.
DEMICS.0951.tar.gz というファイルをダウンロードして適当なディレクトリで解凍すれば
良い.

1 : 1 : (1 2) 2 : (4 3)

Volume: 2

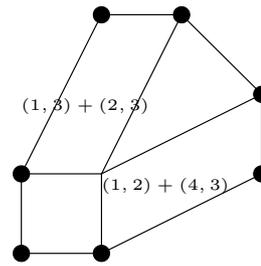
2 : 1 : (1 3) 2 : (2 3)

Volume: 2

Mixed Cells: 2

Mixed Volume: 4

CPU time: 0s



良混合分割

各 A_i の頂点の番号を指定する事により, 混合複体が指定されている. 今の場合 2 つの (1, 1) 型混合胞体が構成されその体積はそれぞれ 2 であり, 求める混合体積は 4 である事がわかる.

3.5 ベルンシュタインの定理

多項式 $f(x) = \sum_{\nu} c_{\nu} x^{\nu}$ と $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned} \ell(\xi) &= \min\{\langle \xi, \nu \rangle : c_{\nu} \neq 0\} \\ \Delta(\xi) &= \{\nu \in \Delta(f) : \langle \xi, \nu \rangle = \ell(\xi)\} \\ f^{\xi}(x) &= f_{\Delta(\xi)}(x) \end{aligned}$$

と置く. 多項式 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ が非退化とは各 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対し

$$\{x \in \mathbb{C}^n : f_1^{\xi}(x) = \dots = f_n^{\xi}(x) = 0\} \subset \{x_1 \cdots x_n = 0\}$$

が成り立つときを言う.

定理 3.14 (ベルンシュタイン) A_i ($i = 1, \dots, n$) を \mathbb{Z}^n の有限部分集合, Δ_i でその凸包を表す.

$$f_i(x) = \sum_{a \in A_i} c_{i,a} x^a, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

なる $(\mathbb{C}^*)^n$ の点の個数は (f_1, \dots, f_n) が非退化ならば混合体積 $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ に等しい.

証明 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ を一般に選び $(\Delta(f_1), \dots, \Delta(f_n))$ の良混合分割 Γ を作る. このとき

$$\hat{f}_i(x, t) = \sum_{a \in A_i} c_{i,a} x^a t^{\omega_i(a)}, \quad i = 1, \dots, n$$

の根 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ は t の代数関数である.

$$\mathbf{x}(t) = (\bar{x}_1 t^{v_1}, \dots, \bar{x}_n t^{v_n}) + t \text{ に関する高次の項}, \quad \bar{x}_i \in \mathbb{C}^*$$

と書く。これは $t = 1$ のときは元の系の解であり、 $t \rightarrow 0$ とすると原点に近づく。この曲線の個数が、元の系の解の個数であり、この個数が混合体積であることを示す。 $(v, 1)$ が支持する $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_1 + \cdots + \hat{\Delta}_n$ の面を $\hat{C}^{(v)}$ と書き、その最初の n 個の成分への射影を $C^{(v)}$ と書く。

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{a \in A_i} c_{i,a} (\bar{\mathbf{x}}^a t^{\langle v, a \rangle + \omega_i(a)} + \text{h.o.t.})$$

なので、 $C^{(v)}$ に台を持つ多項式 $\text{in}_v(f_i)(\bar{x})$ があって

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}(t), t) = \text{in}_v(f_i)(\bar{x}) t^{\ell_i(v, 1)} + \text{h.o.t.}$$

$\text{in}_v(f_i)(\bar{x})$ は $d_i + 1$ 個の項を持つとすると、これが係数一般の時は根を持つので $d_i \geq 1$ が分かる。 $A(\omega)$ が混合分割であることから

$$n \geq \dim(\hat{C}^{(v)}) = \sum_{i=1}^n \dim \hat{C}_i^{(v)} = \sum_{i=1}^n d_i \geq n$$

となり、 $d_i = 1$ となる。すると $C^{(v)}$ のミンコフスキー和への分解

$$C^{(v)} = C_1^{(v)} + \cdots + C_n^{(v)}, \quad \dim C_i^{(v)} = 1$$

を得る。

$$\text{in}_v f_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

は $(\mathbb{C}^*)^n$ に $V(\Delta^{(v)})$ 個の解を持つ事を示す。一般性を失うことなく各辺が原点を含むとして良い。

$$c_1 x^{\beta_1} = \cdots = c_n x^{\beta_n} = 1 \quad (3.4)$$

の解の個数が求めるものである。行列式が 1 であるような行列 U, V が存在して

$$U(\beta_1, \dots, \beta_n)V = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

とできるので $x_i = y_1^{u_{i1}} \cdots y_n^{u_{in}}$ と置くと、

$$x_1^{\beta_{i1}} \cdots x_n^{\beta_{in}} = y_1^{\beta_{i1}u_{11} + \cdots + \beta_{in}u_{n1}} \cdots y_n^{\beta_{i1}u_{1n} + \cdots + \beta_{in}u_{nn}}$$

であり、 $i = 1, \dots, n$ に対し

$$(c_1^{\beta_{i1}} \cdots c_n^{\beta_{in}})^{-1} = (x_1^{\beta_{i1}} \cdots x_n^{\beta_{in}})^{-1} = (y_1^{\beta_{i1}u_{11} + \cdots + \beta_{in}u_{n1}} \cdots y_n^{\beta_{i1}u_{1n} + \cdots + \beta_{in}u_{nn}})^{-1} = y_i^{k_i}$$

を得る。この系の解の個数は

$$k_1 \cdots k_n = \det(\beta_1, \dots, \beta_n) = V(C^{(v)})$$

個である．原点のそばには (3.4) に対応して曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在するので，(3.3) の解も存在する．即ち (3.3) の解の個数は， $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ から決まる $(\Delta(f_1), \dots, \Delta(f_n))$ の良混合分割 $\Gamma = \{C^{(1)}, \dots, C^{(k)}\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^k \text{Vol}(C_1^{(j)} + \dots + C_m^{(j)})$$

である．但し，右辺は型が $(1, \dots, 1)$ の $C^{(j)}$ のみの和を取る．よって，定理 3.10 の $d_1 = \dots = d_m = 1$ の場合より定理は従う． \square

注意 3.15 クシニレンコは，論文 [2] で定理 3.1 と定理 3.14 で $\Delta_1 = \dots = \Delta_n = \Delta$ なる場合を同時に証明した．クシニレンコの証明はコスズル複体の性質を巧みに使った代数的な議論であるが，ベルンシュタインは，それを見て定理 3.14([1]) を証明した．ベルンシュタインの証明の鍵は混合体積と交点数の公理的特徴付けの類似性にある．ここでは交点数等の公理的特徴付けを説明することを避け，B. Huber と B. Sturmfel によるベルンシュタインの定理を紹介した．

3.6 クシニレンコの公式の証明

まずベルンシュタインの定理の局所版を説明しよう．

定理 3.16 多項式 f_1, \dots, f_n が非退化，即ち，各 $v = (v_1, \dots, v_n)$ に対し

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \text{in}_v(f_1)(z) = \dots = \text{in}_v(f_n)(z) = 0\} \subset \{z_1 \dots z_n = 0\}$$

で，好都合，即ち各変数の冪は各 f_j に現れると仮定する． $D_i = \{x \in \mathbb{C}^n : f_i(x) = 0\}$ とすれば

$$(D_1 \cdots D_n)_0 = V(\Gamma_-(f_1), \dots, \Gamma_-(f_n))$$

証明 多項式 f_i に対し $\tilde{f}_i = f_i + c$, $c \neq 0$, とする． $\Delta(\tilde{f}) = \Gamma_-(f) \cup \Delta(f)$.

$$\begin{aligned} (D_1 \cdots D_n)_0 &= (D_1 \cdots D_n)_{\mathbb{C}^n} - (D_1 \cdots D_n)_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \\ &= V(\Delta(\tilde{f}_1), \dots, \Delta(\tilde{f}_n)) - V(\Delta(f_1), \dots, \Delta(f_n)) \\ &= V(\Gamma_-(f_1), \dots, \Gamma_-(f_n)) \end{aligned}$$

\square

クシニレンコの定理の証明をしよう． $B_i = \{z_i f_{z_i} = 0\}$, $C_i = \{z_i = 0\}$ と置く． f が非退化かつ好都合ならば， $\bigcup_i \Gamma_+(z_i f_{z_i}) = \Gamma_+(f)$ で

$$(A_1 \cdots A_n)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] / \langle z_1 f_{z_1}, \dots, z_n f_{z_n} \rangle = \text{Vol}(\Gamma_-(f))$$

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j \notin I} B_j \prod_{i \in I} A_i\right)_0 &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] / \langle z_j, j \notin I, z_i f_{z_i}, i \in I \rangle \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[z_i; i \in I]] / \langle z_i (f|_{\{z_j=0, j \notin I\}})_{z_i}, i \in I \rangle \\
&= \text{Vol}_k(\Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}^I)
\end{aligned}$$

$D_i = \{f_{z_i} = 0\}$ と置く. $A_i = B_i + D_i$ なので,

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= (D_1 \cdots D_n)_0 = ((A_1 - B_1) \cdots (A_n - B_n))_0 \\
&= (A_1 \cdots A_n)_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-\#I} \left(\prod_{j \notin I} B_j \prod_{i \in I} A_i\right)_0 \\
&= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \text{Vol}_k(\Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}^I)
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] D.N. Bernstein, The number of roots of a system of equations, *Funct. Annal. Appl.* **9** (1975), 1–4.
- [2] A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31.