課題 (2006 年 10 月 3 日 (火))

$\boxed{\text{A1}}$

1. 数列 $\{a_n\}$ が有界であることの定義を論理記号を用いて書け。
2. 数列 $\{a_n\}$ が有界であることの定義を英語で書け。
3. 1. の否定を作れ。

$\boxed{\text{A2}}$

1. 数列 $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束することの定義を論理記号を用いて書け。
2. 数列 $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束することの定義を英語で書け。
3. 1. の否定を作れ。

$\boxed{\text{A3}}$ 収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを示せ。

$\boxed{\text{A4}}$ $a_n \neq 0$ なる数列 $\{a_n\}$ が 0 でない数に収束するとき、数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は有界であることを示せ。

$\boxed{\text{A5}}$ $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ が同じ値 $\alpha$ に収束するとき、$\{b_n\}$ も $\alpha$ に収束することを示せ。$\boxed{\text{A6}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ただし、後者の式では $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$ を仮定している。

$\boxed{\text{A7}}$ 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束し、数列 $\{b_n\}$ が有界ならば数列 $\{a_n b_n\}$ は 0 に収束することを示せ。

解析概論 **A** 演習課題 (2006 年 10 月 10 日（火）)

$\boxed{\text{B1}}$

- 有理数の切断 $(A|A')$ の定義を書け。
- 有理数の切断 $(A|A')$ の定義を英語で書け。

$\boxed{\text{B2}}$ 実数 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ に対し、$\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ のどれかひとつが成立することを示せ。

$\boxed{\text{B3}}$ 実数 $\alpha_1 = (A_1|A_1')$, $\beta_1 = (B_1|B_1')$, $\alpha_2 = (A_2|A_2')$, $\beta_2 = (B_2|B_2')$ に対し、次を示せ。

$$\alpha_1 \leq \beta_1, \quad \alpha_2 \leq \beta_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$$

$\boxed{\text{B4}}$ 実数 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ に対し、次を示せ。

1. $\alpha \leq \beta$ ならば $-\alpha \geq -\beta$
2. $\alpha < \beta$ ならば $-\alpha > -\beta$

$\boxed{\text{B5}}$ 実数 $\alpha, \beta \geq 0$ に対し、次を示せ。

$$|\alpha| \leq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad -\beta \leq \alpha \leq \beta$$

$\boxed{\text{B6}}$ (3 角不等式) 実数 $\alpha, \beta$ に対し、次が成り立つことを示せ。

(i) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(ii) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

**解析概論 A 演習課題** (2006 年 10 月 17 日（火）)

$\boxed{\text{C1}}$ 実数 $\mathbf{R}$ の部分集合 $E$ をとる。

- $E$ の上限 $\sup E$ の定義を書け。
- $E$ の上限 $\sup E$ の定義を英語で書け。
- $\alpha$ が $E$ の集積点であることの定義を書け。
- $\alpha$ が $E$ の集積点であることの定義を英語で書け。

$\boxed{\text{C2}}$ 次の集合の集積点を求めよ

1. $E = \{\frac{n}{n+1} \mid n = 1, 2, \ldots, \}$.
2. $E = \mathbf{Z}$ (整数全体の集合).
3. $E = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \text{ は正の整数 }\}$.

$\boxed{\text{C3}}$ 有界な単調減少数列は収束することを示せ。

$\boxed{\text{C4}}$(縮小閉区間列の定理) 閉区間の列 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,...,$[a_n, b_n]$,... が次の 2 つの条件を満たせば、これらの区間に共通な実数が 1 つだけ存在することを示せ。

(i) すべての $n$ に対し $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

(ii) $n \to \infty$ のとき $b_n - a_n \to 0$.

$\boxed{\text{C5}}$ 数列 $\{a_n\}$ に対し、集合 $A_n = \{a_k \mid k \geq n\}$ を考え、$\overline{a}_n = \sup A_n$, $\underline{a}_n = \inf A_n$ とおく。

1. $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少数列であることを示せ。
2. $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加数列であることを示せ。

**上極限と下極限**　数列 $\{a_n\}$ の上極限、下極限をそれぞれ，次で定める。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$$

数列 $\{a_n\}$ が上に有界でない $\iff \sup A_n = +\infty \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$
数列 $\{a_n\}$ が下に有界でない $\iff \sup A_n = -\infty \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$
に注意しておく。便宜上、

- 数列 $\{\overline{a}_n\}$ が下に有界でないときは $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$,
- 数列 $\{\underline{a}_n\}$ が上に有界でないときは $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$

と定める。$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ の代わりに $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ の代わりに $\liminf_{n\to\infty} a_n$ と書くこともある。

$\boxed{\text{C6}}$ 次の数列の、上極限、下極限を求めよ。

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \qquad \{(-1)^n\}, \qquad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}, \qquad \left\{(-1)^n n\right\}, \qquad \left\{n + \frac{1}{n}\right\}$$

**解析概論 A 演習課題** (2006 年 10 月 24 日（火）)

$\boxed{\text{D1}}$

- 数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることの定義を書け。
- 数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることの定義を英語で書け。
- 数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることの否定を書け。

$\boxed{\text{D2}}$ 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ は収束するかどうか判定せよ。

任意の正の数 $\varepsilon$ に対し、ある番号 $N$ があって $|a_n - a_N| < \varepsilon$ $(\forall n \geq N)$ となる。

$\boxed{\text{D3}}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次を満たすとする。

- $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束する。
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす $N$ が存在する。

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$$

このとき、数列 $\{b_n\}$ は $\alpha$ に収束する事を示せ。

$\boxed{\text{D4}^*}$ 有界な数列 $\{a_n\}$ の集積点全体の集合を $S$ とする。次を示せ。

(i) $S$ は最大値，最小値をもつ.

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup S$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf S$.

特に，数列 $\{a_n\}$ が有界なら $\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$.

**解析概論 A 演習課題** (2006 年 10 月 24 日（火）)

$\boxed{\text{E1}}$

1. $\alpha$ は 数列 $\{a_n\}$ の集積点であることの否定を書け。
2. 集合 $X$ の関係 $\sim$ が同値関係であることの定義を書け。
3. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ の定義を書け
4. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続である事の定義を書け.
5. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続である事の定義を英語で書け.

$\boxed{\text{E2}}$ $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots > 0$, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ とするとき、次の無限級数は収束することを示せ。

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

$\boxed{\text{E3}}$ 数列 $\{\frac{1}{n}\}$ はコーシー列であることを示せ。

$\boxed{\text{E4}}$ 次を満たす定数 $C$, $r$ $(C > 0,\ 0 < r < 1)$ が存在すれば、$\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ。

$$|a_{n+1} - a_n| < Cr^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$\boxed{\text{E5}}$[無限小数] $\{b_n\}$ を 0 以上 9 以下の自然数からなる数列とする．これから無限小数 $0.b_1b_2b_3\ldots$ を次の様にして作る．

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{b_1}{10} \\
a_2 &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} \\
a_3 &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} \\
&\cdots \\
a_n &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}
\end{aligned}$$

このとき $\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．(従って $\{a_n\}$ は収束する． この極限値のことを通常 $0.b_1b_2b_3\ldots$ と書いているのである．)

$\boxed{\text{E6}}$ 有理数の数列でコーシー列であるようなもの全体を $X$ で表す。$X$ の元 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対し

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \,\text{s.t.}\, n \geq N \text{ ならば } |a_n - b_n| < \varepsilon$$

と定義するとこれは同値関係になることを示せ。

**解析概論 A** 演習課題 (2006 年 11 月 7 日（火）)

$\boxed{\text{F1}}$

1. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である事の定義を英語で書け.
2. 「関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である」の否定をつくり、それを英語で書け.

$\boxed{\text{F2}}$ $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき次が成り立つ事を示せ.

1. $\lim(f(x)\pm g(x))=\alpha\pm\beta$. (複号同順)
2. $\lim f(x)g(x)=\alpha\beta$.
3. $\lim f(x)/g(x)=\alpha/\beta$. (ただし $\beta\neq 0$ のとき).

$\boxed{\text{F3}}$ 定義にしたがって $x^2\to 4$ $(x\to 2)$ を示せ。

$\boxed{\text{F4}}$ $\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が存在し $x=a$ の近傍で $f(x)\le g(x)$ ならば $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$ であることを示せ.

$\boxed{\text{F5}}$(ディリクレ関数) 次の関数はすべての実数で不連続である事を示せ.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{ は有理数}\\ 0 & x\text{ は無理数}\end{cases}$$

$\boxed{\text{F6*}}$ 次の関数は、すべての正の有理数で不連続であり、すべての正の無理数で連続である事を示せ.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x\text{ は有理数で }x=\frac{p}{q}\text{ なる既約分数}\\ 0 & x\text{ は無理数}\end{cases}$$

$\boxed{\text{X}^{**}}$ 有理数の数列でコーシー列であるようなものを有理コーシー列という．有理コーシー列 $\{a_n\}$ に対して

$$\begin{aligned}A(\{a_n\})=&\{x\in\mathbf{Q}\mid\exists N\,\text{s.t.}\,x<a_n(\forall n\ge N)\}\\ A'(\{a_n\})=&\{x\in\mathbf{Q}\mid\exists N\,\text{s.t.}\,x\ge a_n(\forall n\ge N)\}\end{aligned}$$

とおく．次を示せ.

1. $(A(\{a_n\})|A'(\{a_n\}))$ は有理数の切断である.
2. $(A(\{a_n\})|A'(\{a_n\}))$ と $(A(\{b_n\})|A'(\{b_n\}))$ が同じ実数を定めれば $\boxed{\text{E6}}$ の意味で $\{a_n\}\sim\{b_n\}$
3. 有理数の切断 $(A|A')$ を任意にとる．$(A|A')$ と同じ実数を定める有理コーシー列から定まる切断 $(A(\{a_n\})|A'(\{a_n\}))$ が存在する.

解析概論 **A** 演習課題 (2006 年 11 月 14 日（火）)

$\boxed{\text{G1}}$

1. $f(x)$ が区間 $I$ で連続であることの定義を英語で書け.
2. 1. の否定を英語で書け.
3. $f(x)$ が区間 $I$ で一様連続であることの定義を英語で書け.
4. 3. の否定を英語で書け.

$\boxed{\text{G2}}$ 次の無限級数の収束発散を判定せよ。

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

$\boxed{\text{G3}}$(Euler の定数) (i) 次の式を示せ。

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

(ii) 次で決まる数列 $\{e_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ．(従って極限値が存在する．この極限値を **Euler の定数**といい $\gamma$ で表す．)

$$e_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

$\boxed{\text{G4}}$ 次の無限級数の収束発散を判定せよ。

$$\frac{1}{2(\log 2)^p}+\frac{1}{3(\log 3)^p}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^p}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\log 2(\log\log 2)^p}+\frac{1}{3\log(\log\log 3)^p}+\cdots+\frac{1}{n\log(\log\log n)^p}+\cdots$$

$\boxed{\text{G5}}$ 次の無限級数の収束発散を判定せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}$$

$\boxed{\text{G6}}$ $x>0$ のとき，次の無限級数の収束発散を判定せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n!x^n,\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$$

解析概論 **A** 演習課題 (2006 年 12 月 5 日（火）)

$\boxed{\text{H1}}$ 次の定義を英語で書け.

1. 無限級数 $\sum a_n$ が絶対収束する.

2. 無限級数 $\sum a_n$ が条件収束する．

$\boxed{\text{H2}}$ 次の無限級数の収束発散を論ぜよ．

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$$

$\boxed{\text{H3}}$

- $\sum a_n$ が条件収束する例をあげよ．
- $\sum a_n$ が絶対収束すれば，$\sum a_n^2$ は収束する事を示せ．
- $\sum a_n$ が条件収束するとき，$\sum a_n^2$ は収束するとは限らない事を示せ．

$\boxed{\text{H4}}$ $0 < a \leq b$，$a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とする．

(i) $a_n \leq b_n$ $(n \geq 0)$ を示せ．

(ii) $\{a_n\}$ は単調増加数列，$\{b_n\}$ は単調減少数列であることを示せ．

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$ を示せ．

$\boxed{\text{H5}}$ 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束する単調減少数列で，数列 $\{b_n\}$ の部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ が有界のとき，$\sum a_n b_n$ は収束することを示せ．（ヒント：$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ がコーシー列であることを示せ．）$\boxed{\text{H6}}$ 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束する単調減少数列のとき，次の無限級数の収束発散を論ぜよ．

$$\sum a_n \sin nx, \qquad \sum a_n \cos nx$$

**解析概論 A 演習課題** (2006 年 12 月 12 日（火）)

$\boxed{\text{I1}}$ 次の定義を書け。英語でも書くこと。

- 区間 $I$ で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ が関数 $f(x)$ に収束する。
- 区間 $I$ で定義された関数の列 $\{f_n(x)\}$ が関数 $f(x)$ に一様収束する。

$\boxed{\text{I2}}$ 次の無限級数は、与えられた区間で、一様収束するか判定せよ。

$$\sum \frac{1}{n!} x^n,\ [-1, 1]; \qquad \sum x^n,\ (-1, 1); \qquad \sum \frac{1}{n^2} \sin nx,\ (-\infty, \infty)$$

$\boxed{\text{I3}}$ 次の命題の真偽を判定せよ。理由も述べること。

- すべての実数 $x$ について $f(x) < f(x+1)$ を満たす連続関数は増加関数である。

- $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots > 0$ で $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき次が成り立つ。
  $n < m$ ならば

$$|a_n b_n + a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_m b_m| \leq a_n |b_n + \cdots + b_m|$$

$\boxed{\text{I4}}$ 次の級数は左の関数のマクローリン展開である。これらの級数の収束発散を論ぜよ。

$$\begin{array}{rl}
\sin x & 1 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\
\cos x & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
\dfrac{1}{1+x} & 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \\
\log(1+x) & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots \\
(1+x)^{\frac{1}{2}} & 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}x^n + \cdots \\
(1+x)^{\alpha} & 1 + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \dbinom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \dbinom{\alpha}{n}x^n + \cdots \\
\sin^{-1} x & x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \dfrac{5}{112}x^7 + \cdots + \dfrac{1^2 3^2 \cdots (2n-3)^2}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots \\
\tan^{-1} x & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots
\end{array}$$

$\boxed{\text{I5}}$ $0 < a \leq b$, $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, とする.

(i) $a_n \leq b_n$ $(n \geq 0)$ を示せ.

(ii) $\{a_n\}$ は単調増加数列，$\{b_n\}$ は単調減少数列であることを示せ.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を示せ.

参考：(iii) の極限値は $a, b$ の算術幾何平均とよばれる．その値 $M$ は次を満たす。

$$\frac{\pi}{2M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

興味のある諸君はこの事実も調べてみるとよい。

$\boxed{\text{I6}^*}$ 次の極限を考察せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n}$$

解析概論 **A** 演習課題解答例 (2007 年 1 月 9 日)

$\boxed{\text{J1}}$ 次の定義を書け。

- 冪級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径
- $a_n = b_n + O(c_n)$ $(n \to \infty)$
- $a_n = b_n + o(c_n)$ $(n \to \infty)$
- $f(x) = g(x) + O(h(x))$ $(x \to 0)$
- $f(x) = g(x) + o(h(x))$ $(x \to 0)$

$\boxed{\text{J2}}$ 次の冪級数の収束半径を求めよ。

$$\sum \frac{1}{n!}x^n \quad \sum x^n \quad \sum \frac{n!}{(2n)!}x^n \quad \sum \frac{x^n}{2^n n} \quad \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \sum \frac{x^{2n+1}}{2^n(n+1)}$$

$\boxed{\text{J3}}$ 次の級数は一様収束するか?

$$\sum \frac{1}{n^2+x^2} \qquad \sum \frac{\cos nx}{2^n} \qquad \sum \frac{x^{2n}}{n^2(1+x^{2n})} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta$$

$\boxed{\text{J4}}$ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ならば、次を示せ。

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

$\boxed{\text{J5}}$ $k, p$ を定数とし，数列 $\{a_n\}$ は次を満たすとする．

$$a_n = \frac{k}{n^p} + o\Big(\frac{1}{n^p}\Big) \qquad (n \to \infty)$$

- $p > 1,\ k \neq 0$ ならば $\sum a_n$ は収束することを示せ.
- $p \leq 1,\ k > 0$ ならば，$\sum a_n = \infty$ を示せ.
- $p \leq 1,\ k < 0$ ならば，$\sum a_n = -\infty$ を示せ.

$\boxed{\text{J6}}$ 次を満たす数列 $\{a_n\}$ がある．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k + p_1 n^{k-1} + \cdots + p_{k-1}n + p_k}{n^k + q_1 n^{k-1} + \cdots + q_{k-1}n + q_k}$$

- $q_1 - p_1 > 1$ のとき，$\sum a_n$ は収束する事を示せ.
- $q_1 - p_1 \leq 1$ のとき，$\sum a_n$ は発散する事を示せ.

$f(0) = 0$ を考慮すれば，$f(x) = -\log(1-x)$ を得る．

解析概論 **A** 演習課題 (2007 年 1 月 16 日)

教科書 問 6.3 (224 ページ) 問 6.4 (229 ページ) 問 6.5* (232 ページ)

$\boxed{\text{K1}}$ 次の真偽を判定せよ．

(i) $|a| < |b|$ のとき $\sum c_n b^n$ が収束すれば $\sum c_n a^n$ も収束する。

(ii) $p > 1$, $a_n > 0$ とする．$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 - \frac{p}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ をみたすとき $\sum a_n$ は収束する．

(iii) 正項級数 $\sum a_n$ が収束すれば，交項級数 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ も収束する．

(iv) 交項級数 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$, $a_n > 0$, は $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立てば，収束する．

(v) $C^1$ 関数の列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束すれば、$f(x)$ は微分可能で $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

$\boxed{\text{K2}}$ $k$ を定数とし，正項級数 $\{a_n\}$ が次を満たすとする．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

- $k > 0$ ならば，ある番号から先は $\{a_n\}$ は増加数列である事を示せ．
- $k < 0$ ならば，ある番号から先は $\{a_n\}$ は減少数列である事を示せ．

$\boxed{\text{K3}}$ (i) 部分積分を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束する事を示せ。

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は絶対収束しない (すなわち $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散する) 事を示せ。

$\boxed{\text{K4}}$ (i) $m$, $n$ を整数とする．次を示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \ne n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \ne n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

(ii) $2\pi$ を周期とする周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = (a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots) + (b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots)$$

と表され、右辺の 2 つの級数が一様収束するならば、次を示せ。

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$\boxed{\text{K5}}$ (i) 次の不等式を示せ.

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}$$

(ii) $e$ は有理数でないことを示せ.