教養数学 II

未定稿

目次

1　いろいろな関数

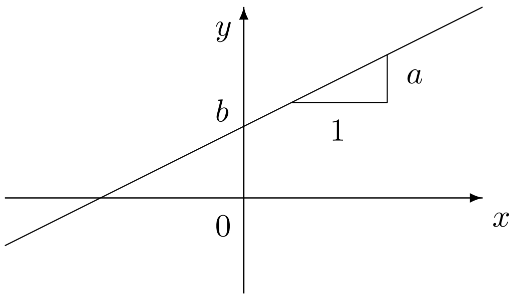
2 つの変数 x, y があって，x を定めるとそれに対応して y の値が 1 つ定まるとき y は x の関数であると言う．y が x の関数であるとき，文字 f などを用いて $y = f(x)$ と表す．

関数 $y = f(x)$ において，変数 x のとる値の範囲を，この関数の**定義域**という．また x が定義域全体を動くとき，$f(x)$ がとる値の範囲をこの関数の**値域**という．

1.1　関数のグラフ

関数 $f(x)$ に対し，点 $(x, f(x))$ 全体の集合を，関数 $f(x)$ の**グラフ**という．いろいろな関数のグラフを描いてみよう．

例 1 次関数　a, b を定数とし，$a \neq 0$ とする．1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは次のようである．a をこのグラフの**傾き**，b を**切片** (または y 切片) という．

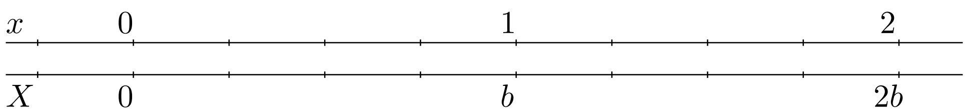


グラフの拡大

(i)　関数 $y = af(x)$ のグラフは，
関数 $y = f(x)$ のグラフを y 軸方向に a 倍に拡大して得られる．

(ii)　関数 $y = f(bx)$ のグラフは，
関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍に拡大して得られる．

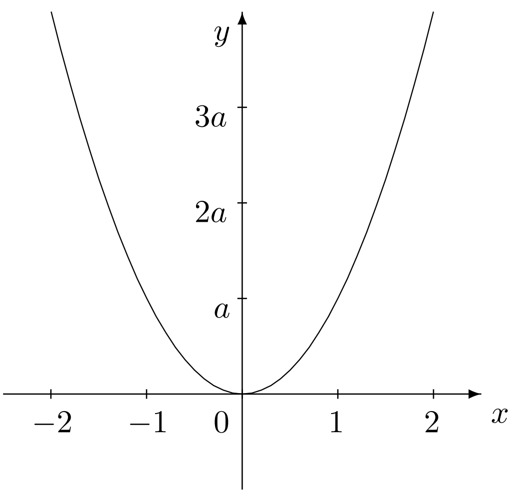
(i) は明らかであろう．(ii) を説明しよう．$X = bx$ とおくと，



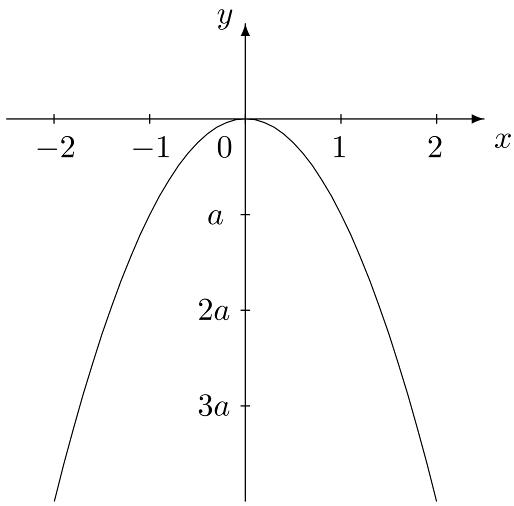
となる．$y = f(bx)$ のグラフは，$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍したものである．

注意　関数 $y = f(\frac{x}{b})$ のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に b 倍して得られる．

例 2 次関数 $y = ax^2$ **のグラフ**　は次のようである．



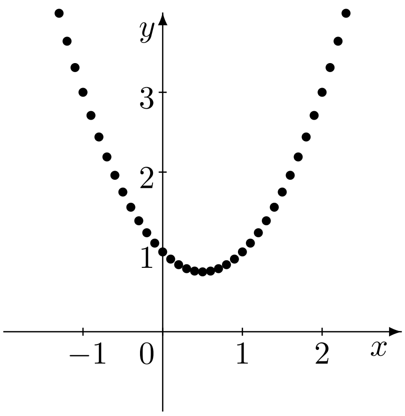
$a > 0$ のとき

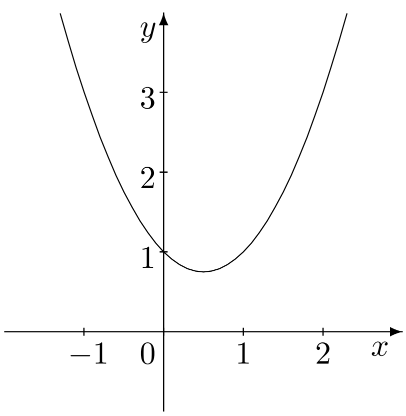


$a < 0$ のとき

例 $y = x^2 - x + 1$ **のグラフ**

2 次関数 $f(x) = x^2 - x + 1$ のグラフを描いてみよう．まず，できるだけ多くの x に対して $f(x)$ の値を計算し，点 $(x, f(x))$ をプロットしてみる (左図)．この関数のグラフは右図のようであることがわかる．

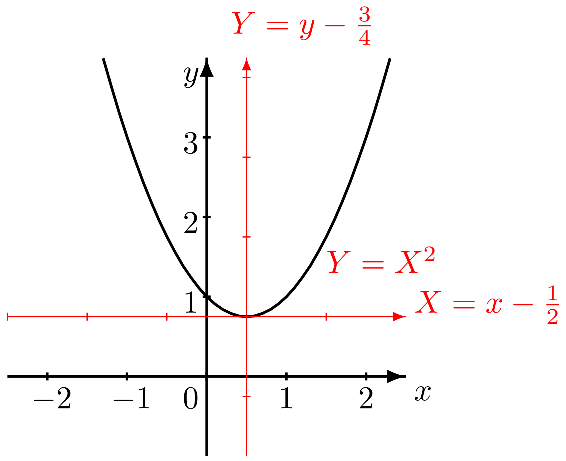




このようにグラフを描くときは多くの点をプロットすることが重要である．

$$y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

なので，$X = x - \frac{1}{2}$, $Y = y - \frac{3}{4}$ とおくと $Y = X^2$ を得る．(X, Y) 平面で $Y = X^2$ で定まる曲線を，(x, y) 平面で見ると次図のようになり，これが $y = x^2 - x + 1$ のグラフである．$y = x^2 - x + 1$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$, y 軸方向に $\frac{3}{4}$ 平行移動して得られる．



演習　$y = x^2 + 2x + 2$, $y = x^2 + x + 1$ のグラフを書け．

この事実は次のように一般化される．

グラフの平行移動

関数 $y = f(x - p) + q$ のグラフは，
関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q 平行移動して得られる．

注意　関数 $y = f(x + p)$ のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-p$ 平行移動して得られる．

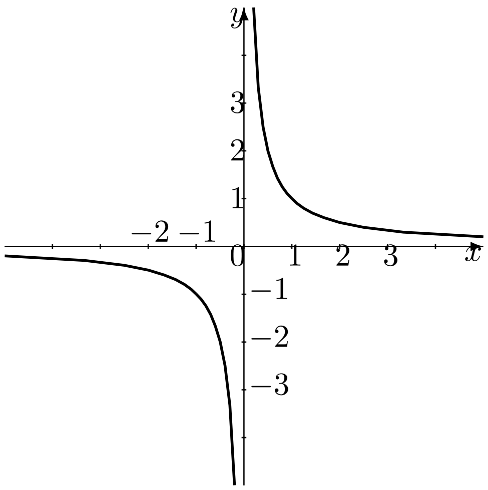
例　関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p, y 軸方向に q 平行移動して得られる．2 次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成すると

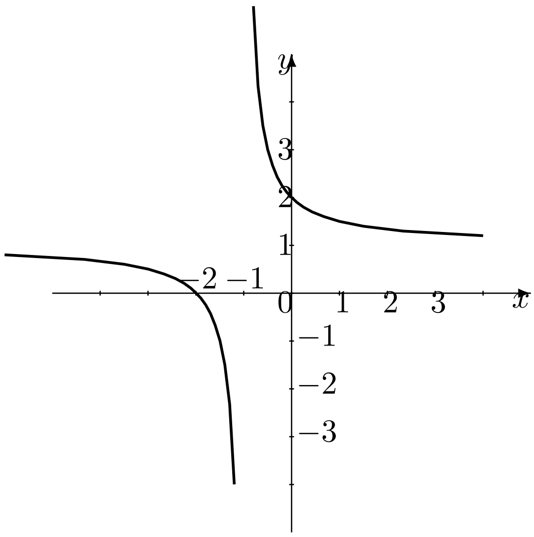
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ =& a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ =& a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

となるので，関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$, y 軸方向に $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ 平行移動して得られる．

例 分数関数 $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフ　$y = \frac{k}{x}$ のグラフは左図のようである．また，$y = \dfrac{k}{x - p} + q$ のグラフは $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q 平行移動して得られる．例えば，

$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$ のグラフは $y = \frac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1, y 軸方向に 1 平行移動して得られる．(右図)





$a \neq 0$ とする．

$$\frac{cx+d}{ax+b} = \frac{cx+d}{a(x+\frac{b}{a})} = \frac{c(x+\frac{b}{a})+d-\frac{bc}{a}}{a(x+\frac{b}{a})} = \frac{c}{a} + \frac{ad-bc}{a^2(x+\frac{b}{a})}$$

なので， $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ のグラフは $y = \frac{k}{x}$, $k = \frac{ad-bc}{a^2}$, のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{a}$, y 軸方向に $\frac{c}{a}$ 平行移動して得られる．

演習　$y = \frac{x-1}{x-2}$ のグラフを書け．

1.2　合成関数

2 つの関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ があり，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき，$g(y)$ に $y = f(x)$ を代入すると，新しい関数 $z = g(f(x))$ が得られる．この関数を $f(x)$ と $g(y)$ の**合成関数** といい

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

と書く．

例　　$f(x) = x^2$, $g(x) = 2x+1$ のとき

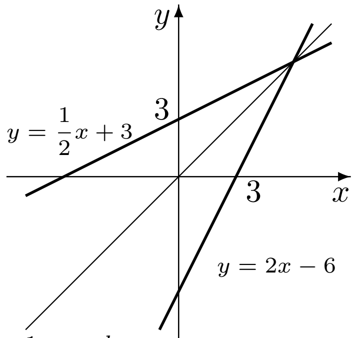
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

この例からわかるように，一般に合成関数 $g \circ f(x)$ と $f \circ g(x)$ は一致しない．

1.3　逆関数とそのグラフ

関数 $y=f(x)$ において，y の値を定めると，x の値が丁度 1 つ定まるとき，すなわち x を y の関数として，$x=g(y)$ と表せるとき，その x と y を入れ替えて $y=g(x)$ としたものを，$f(x)$ の逆関数という．関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書くこともある．



例 関数 $y=\dfrac{1}{2}x+3$ の逆関数

$y=\dfrac{1}{2}x+3$ を y について解くと $x=2y-6$

よって，逆関数は x と y を入れ替えて $y=2x-6$

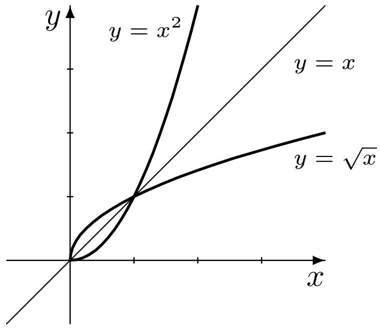
注意　$a \neq 0$ のとき，1 次関数 $f(x)=ax+b$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ である．傾き a が $\frac{1}{a}$ になったことに注意しておこう．

逆関数の求め方

関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ は次のようにして求められる．

1. $y=f(x)$ という関係式を $x=g(y)$ の形に変形する．
2. x と y を入れ替えて $y=g(x)$ とする．

関数 $y=x^2$ の逆関数は考えることができない．しかし定義域を制限して得られる関数 $y=x^2$ $(x \geq 0)$ に対しては，逆関数が考えられる．



例 関数 $y=x^2$ $(x \geq 0)$ の逆関数

値域は $y \geq 0$ である．

$y=x^2$ $(x \geq 0)$ を x について解くと

$x=\sqrt{y}$ $(y \geq 0)$.

x と y を入れ替えて

$y=\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ が逆関数となる．

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域に一致する．また $f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域に一致する．

y を独立変数，x を従属変数とみたとき，逆関数 $x=f^{-1}(y)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフと同じものである．よって x と y を入れ替えた $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称の位置にある．

例 関数 $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ $(x > 1)$ の逆関数

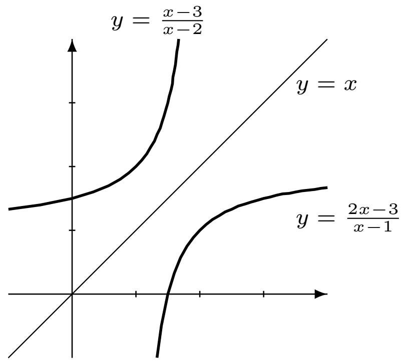
値域は $y < 2$

$y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ $(x > 1)$ を x について解くと

$x = \dfrac{y-3}{y-2}$ $(y < 2)$

ここで，x, y を入れ替えた

$y = \dfrac{x-3}{x-2}$ $(x < 2)$ が逆関数.



1.4 指数関数

正の数 a をとる．a を n 個掛け合わせたものを a の n **乗**といい，a^n と書く．ただし，$a^1 = a$ とする．正の整数 x, y に対して，次の**指数法則**が成り立つ．

指数法則

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^y \qquad (*)$$

これから，これらの指数法則を満たすように，a^x の定義を，整数でない x に対して拡張していく．

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義すると，指数法則 $(*)$ はすべての整数 x, y について成り立つ．

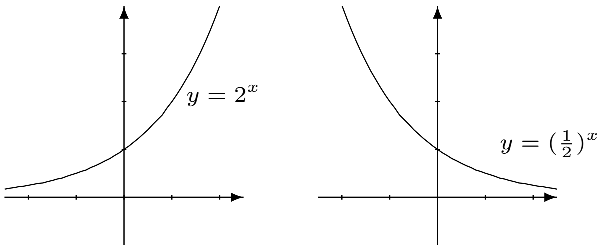
n 乗すると a になる数，すなわち $x^n = a$ となる数 x を，a の n **乗根**という．正の数 a の n 乗根のうち正であるものを $\sqrt[n]{a}$ で表す．

正の有理数 $\dfrac{m}{n}$ に対して $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, 負の有理数 $-\dfrac{m}{n}$ に対して $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ と定める．するとすべての有理数 x, y について指数法則 $(*)$ が成り立つ．

x が無理数のとき，x に限りなく近づく有理数の列 $x_1, x_2, \ldots$ をとり，a^{x_n} の近づいていく値を a^x とする．例えば $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ に対しては $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, \ldots$ の近づいていく値を $2^{\sqrt{2}}$ と定める．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
2^x	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4

このように，いろいろな x に対して 2^x の値を計算すれば $y = 2^x$ のグラフを描くことができる．



指数関数 $y = a^x$ のグラフは，$a > 1$ のときは左図のように右上りのグラフになり，$0 < a < 1$ のときは右図のように右下がりのグラフになる．

1.5　対数関数

a を 1 でない正数とするとき，指数関数のグラフからわかるように，任意の正の数 y に対して $a^x = y$ となる x が唯一つ定まる．この x の値を a を底とする y の**対数**といい，$\log_a y$ で表す．y をこの対数の**真数**という．

$$a^x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \log_a y$$

$a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ より，次の対数の性質が従う．

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1$$

指数法則は，次のような対数の法則に翻訳される．

対数法則

$$\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q, \qquad \log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q, \qquad \log_a P^k = k \log_a P$$

証明　$p = \log_a P$, $q = \log_a Q$ とすると，$a^p = P$, $a^q = Q$．よって $PQ = a^p a^q = a^{p+q}$ となり，$p + q = \log_a PQ$ を得る．

2 番目の式も同様にして示せる．

$p = \log_a P$ とすると，$a^p = P$．よって $P^k = (a^p)^k = a^{kp}$ となり，$kp = \log_a P^k$ を得る．これが 3 番目の式である．

底の変換公式

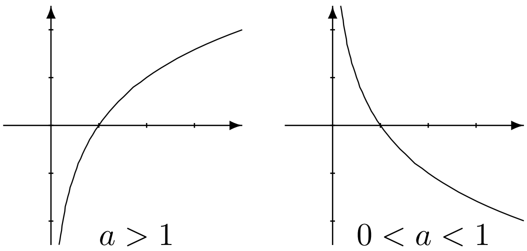
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{ただし } a, b, c \text{ は 1 でない正の数.}$$

証明　$p = \log_a b$ とすると $b = a^p$．c を底とする両辺の対数をとると

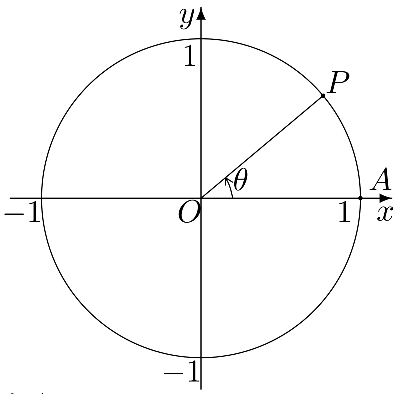
$$\log_c b = \log_c a^p = p \log_c a \qquad \text{なので} \qquad \log_a b = p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

系　$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ は指数関数 $y = a^x$ のグラフを直線 $y = x$ について対称移動したものであり，次の様になる．



1.6　3 角関数



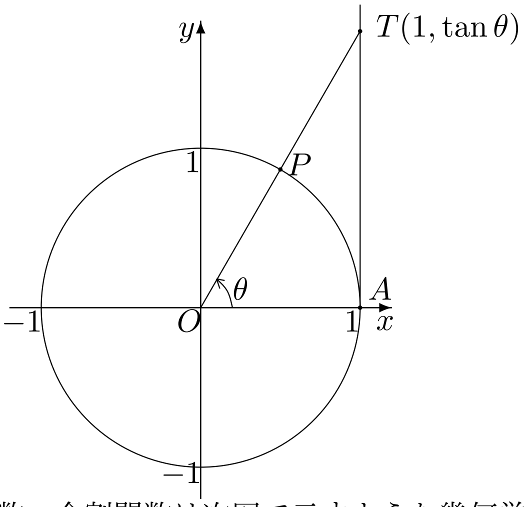
(x, y) 平面で x 軸の正の部分を始線にとり，各 θ の動径と原点を中心とする半径 1 の円の交点を P とする．始線と原点を中心とする半径 1 の円の交点を A とする．$\angle AOP$ の大きさと弧 AP の長さは比例するので，弧度法 $\angle AOP$ を弧 AP の長さで表す事ができる．角の大きさのこのような表しかたを**弧度法**という．

例えば，$\angle AOP = 180^\circ$ と置くと，弧長 AP の長さは π であるから，

$$180^\circ = \pi(\text{ラジアン})$$

となる．弧度法の単位としては**ラジアン**を用いるが，多くの場合単位のラジアンを略して書く．

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.57, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{2} \fallingdotseq 0.76, \quad 10^\circ = \frac{\pi}{18} \fallingdotseq 0.17$$



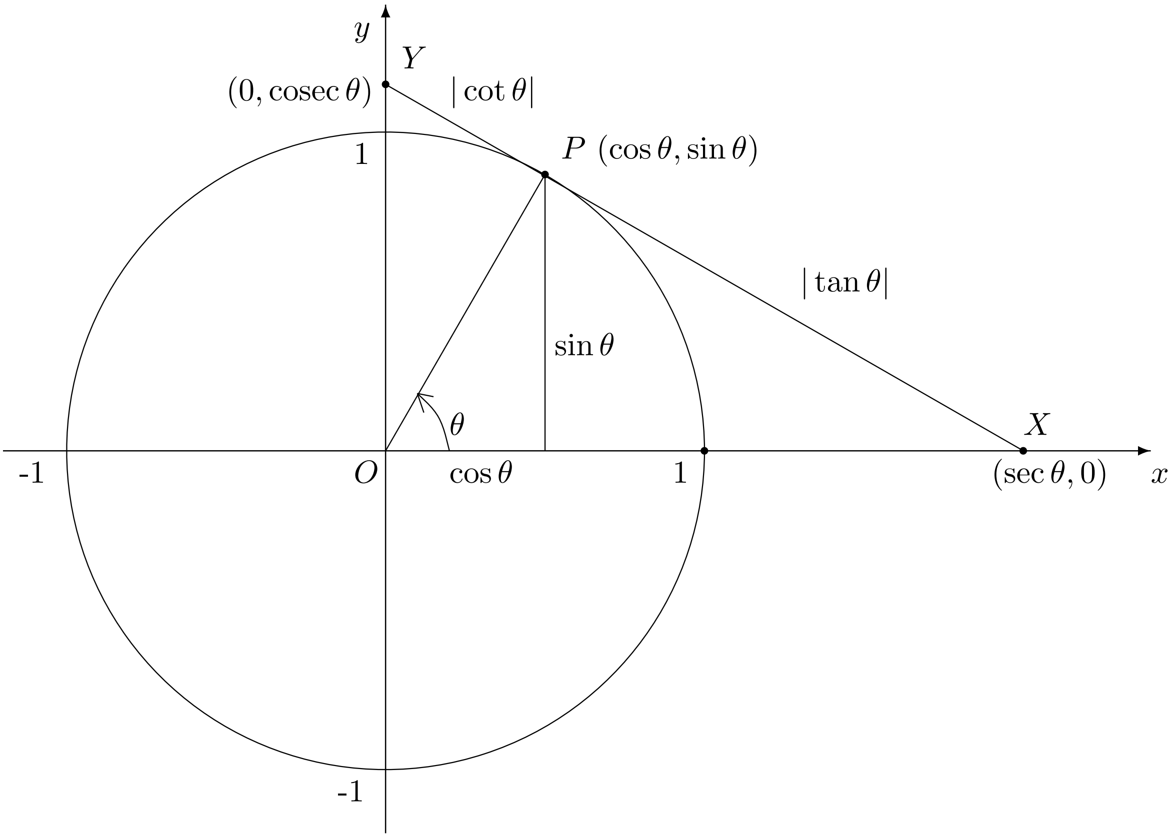
点 P の座標を (x, y) とするとき

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta, \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta$$

であった．それぞれ θ の正弦関数，余弦関数，正接関数という．その他に余接関数，正割関数，余割関数を順に次で定義する．

$$\cot\theta = \frac{y}{x}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{x}, \qquad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{y}$$

　正弦関数，余弦関数，正接関数．余接関数，正割関数，余割関数は次図で示すような幾何学的解釈がある．



点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ での単位円の接線が x 軸，y 軸と交わる点を，それぞれ X, Y として，点 X, Y の座標を求めよう．点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ での単位円の接線は点 P を通り $(\cos\theta, \sin\theta)$ に直交する直線なので接線上の点を $Q(x, y)$ とすると，点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ での単位円の接線は

$$\vec{OP} \cdot \vec{PQ} = \cos\theta(x - \cos\theta) + \sin\theta(y - \sin\theta) = 0$$

で表される．整理すると $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ なので X の座標は $(\sec\theta, 0)$, Y の座標は $(\operatorname{cosec}\theta, 0)$ であることがわかる．また，XP の長さが $|\tan\theta|$, YP の長さが $|\cot\theta|$ である．

3 角関数の加法定理をまとめておく．

加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \qquad \sin(\alpha - \beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

正接，余接の加法定理もある．

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

1.7 逆 3 角関数

$\sin(x+2\pi)=\sin x$ であり，3 角関数は 1 対 1 写像でなく，そのままでは 3 角関数の逆関数を考えることはできない．3 角関数の逆関数を考えるためには，定義域を制限する必要がある．

正弦関数 $y=\sin x$ の $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ での逆関数を**逆正弦関数**といい $\sin^{-1}x$ で表し，「アークサイン x 」と読む．

余弦関数 $y=\cos x$ の $0\leq x\leq\pi$ での逆関数を**逆余弦関数**といい $\cos^{-1}x$ で表し，「アークコサイン x 」と読む．

正接関数 $y=\tan x$ の $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ での逆関数を**逆正接関数**といい $\tan^{-1}x$ で表し，「アークタンジェント x 」と読む．

余接関数 $y=\cot x$ の $0<x<\pi$ での逆関数を**逆余接関数**といい $\cot^{-1}x$ で表し，「アークコタンジェント x 」と読む．

注意　単に $y=\sin^{-1}x$ と $x=\sin y$ は同値と記憶すると誤りをおかす．$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ という条件下で同値なのである．

$$y=\sin^{-1}x\Longleftrightarrow x=\sin y\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

例　$\sin^{-1}1$, $\cos^{-1}(-\dfrac{1}{2})$, $\tan^{-1}1$ の値を求めよ．

解　$\sin^{-1}1=\theta$ とおくと，この式は $1=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と同値．よって $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

同様にして

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\theta\Longleftrightarrow-\frac{1}{2}=\cos\theta\qquad(0\leq\theta\leq\pi)$$

から $\theta=-\frac{\pi}{3}$ を得る．

$$\tan^{-1}1=\theta\Longleftrightarrow 1=\tan\theta\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

から $\theta=\frac{\pi}{4}$ を得る．

例　$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ を示せ．

証明　$y=\sin^{-1}x$, $z=\cos^{-1}x$ とおき，$y+z=\frac{\pi}{2}$ を示せばよい．

$$y=\sin^{-1}x\Longleftrightarrow\sin y=x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z=\cos^{-1}x\Longleftrightarrow\cos z=x\qquad(0\leq z\leq\pi)$$

より

$$\sin y=\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}-z\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $y=\frac{\pi}{2}-z$ となり，$y+z=\frac{\pi}{2}$ を得る．

演習　次を示せ．

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\qquad \cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$$

$x=\sin\alpha,\ y=\sin\beta\ (-\pi/2\leq\alpha,\beta\leq\pi/2)$ と置くと $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2},\ \cos\beta=\sqrt{1-y^2}$ なので $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

$x=\tan\alpha,\ y=\tan\beta$ とおくと $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ より

$$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

関数概念の変遷

ライプニッツが 1670 年代から使いはじめた関数という言葉は，だんだん一般化されて，何かに従属して変動する量またはそれを表現する式を意味するようになった．1745 年には，オイラーは変数と定数から組み立てられた解析的な式として関数を定義している．コーシーは 1823 年には「多くの変数の間にある関係があり，そのうちの 1 つの値とともに，他のものの値が決まるときは，通常その 1 つの変数によって他のものを表して考える．そのときこの 1 つの変数を独立変数と呼び，他のものはその関数であるという．」と述べている．しかしながらコーシー自身はオイラーと同じ立場に立って関数を扱うことが多かった．ディリクレは $x\in[a,b]$ の関数 y を考え，「y が全区間において同一の法則に従って x に関係することを要しないばかりでなく，その関係が数学的算法で表されると考える必要もない」と述べ（1837 年），関数とは結局対応に他ならないことを明確に認識した．

2　数列とその極限

どこまでも限りなく続く数の列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ を数列と呼び $\{a_n\}$ で表す．

数列の収束

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束**するといい，次のように表す．

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\qquad \text{または}\qquad a_n\to\alpha\quad(n\to\infty)$$

例　数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ では n を限りなく大きくすると第 n 項は限りなく 0 に限りなく近づくので，この数列は 0 に収束する．

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散**するという．

n を限りなく大きくすると，第 n 項 a_n が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**するといい，次のように表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{または} \qquad a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

例　数列 $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ では n を限りなく大きくすると，第 n 項は限りなく大きくなるので，この数列は正の無限大に発散する．

n を限りなく大きくすると，第 n 項 a_n が負でその絶対値が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**するといい，次のように表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \qquad a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

例　数列 $3, 1, -1, \ldots, 5-2n, \ldots$ では n を限りなく大きくすると，第 n 項は限りなく大きくなるので，この数列は負の無限大に発散する．

例　数列 $1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$ は発散するが，この数列は正または負の無限大に発散するわけではない．

例　数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は $-1 < r \leq 1$ である．

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & r > 1 \text{ のとき} \\ 1 & r = 1 \text{ のとき} \\ 0 & |r| < 1 \text{ のとき} \\ \text{振動} & r = -1 \text{ のとき (上の例)} \\ \text{振動} & r < -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

収束する数列の極限値については，次のことが成り立つ．

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　ただし k は定数
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　ただし $\beta \neq 0$
5. すべての n について $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

5. から次の**はさみうちの原理**が従う．

すべての n について $a_n \leq b_n \leq c_n$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

また，発散する数列については，5. は次のように一般化される．

すべての n について $a_n \leq b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

例　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

2.1　無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ において，各項を前から順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{$*$}$$

を**無限級数**といい，a_1 をその**初項**，a_n を**第 n 項**という．この無限級数を和の記号 $\sum$ をもちいて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表すことがある．この無限級数の初項から第 n 項までの和を S_n で表す．すなわち

$$\begin{aligned}
S_1 =& a_1 \\
S_2 =& a_1 + a_2 \\
S_3 =& a_1 + a_2 + a_3 \\
& \cdots \\
S_n =& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
& \cdots
\end{aligned}$$

S_n を**第 n 部分和**と呼ぶ．数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S であるとき，無限級数 $(*)$ は S に**収束**するといい

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書く．

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $(*)$ は**発散**するという．

例　次の級数の収束発散を調べよ．

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

解

$$\begin{aligned}
S_n =& \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
=& \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
=& 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

演習　次の級数の収束発散を調べよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$

2.2　無限等比級数

$a \neq 0$ として，無限等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

の収束を考えてみよう．$r \neq 1$ とすると

$$S_n = a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}+\frac{a}{1-r}r^n$$

となり，S_n が収束する必要十分条件は $|r|<1$ となり，そのとき S_n は $\frac{a}{1-r}$ に収束する．

$r=1$ とすると $S_n = na$ であり，これは発散する．

例　　無限小数 $0.3333\ldots$ は，数列

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333, \ldots$$

の極限値である．

$$\begin{aligned}
0.3 =& 0.3 \\
0.33 =& 0.3+0.3\times(0.1) \\
0.333 =& 0.3+0.3\times(0.1)+0.3\times(0.1)^2 \\
\cdots &
\end{aligned}$$

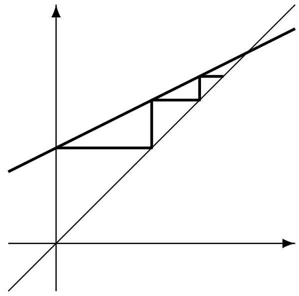
なので，これは $a=0.3,\ r=0.1$ としたときの無限等比級数の極限値である．和の公式よりその極限値は $0.3/(1-0.1)=1/3$ となる．

例　　無限小数 $0.9999\ldots$ は，前の例と同様の考察により，これは $a=0.9,\ r=0.1$ としたときの無限等比級数の極限値である．和の公式よりその極限値は $0.9/(1-0.1)=1$ となることがわかる．

2.3　漸化式で決まる数列の極限

例　　次の数列の収束を調べよ．$a_1=0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1\ (n=1,2,\ldots)$

解　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ の両辺から $\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+1$ の解 $\alpha=2$ を引くと，



$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

$\{a_n-2\}$ は初項 -2 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$a_n-2=-2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \qquad (\text{つまり } a_n=2-2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1})$$

を得る．ここで $n\to\infty$ として $a_n\to 2$ を得る．

この例では，漸化式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ で $n\to\infty$ として得られる式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ を解いて，極限値 $\alpha=2$ が得られる．しかしながら極限の存在が不明のときには，このようにして，極限値が求まるとは限らない．（例えば漸化式 $a_{n+1}=2an+1$ を満たす数列を考えてみよ．）そこで数列の極限値の存在・非存在の判定をすることが，重要となってくる．

数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは

$$|a_n|\le K \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

を満たすような定数 K が存在することである．

$a_n<a_{n+1}$, $n=1,2,3,\dots$ を満たす数列を**増加**数列という．

$a_n>a_{n+1}$, $n=1,2,3,\dots$ を満たす数列を**減少**数列という．

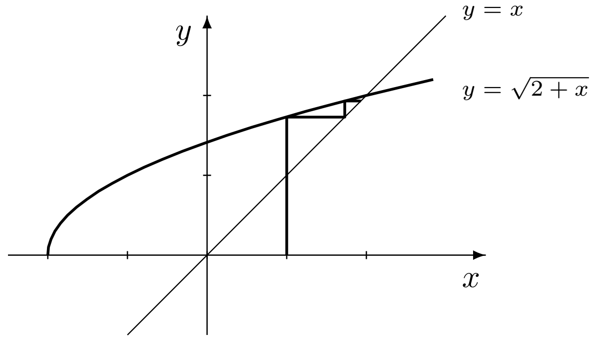
数列の収束の判定には，次の事実は基本的である．

有界な増加数列は収束する．有界な減少数列は収束する．

例　次の数列の収束を調べよ．

$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\ (n=1,2,\dots)$

解　$a_{n+1}^2=2+a_n,\ a_n^2=2+a_{n-1}$ から，$a_{n+1}^2-a_n^2=a_n-a_{n-1}$．この式から



$$0<a_{n-1}<a_n \qquad \text{ならば} \qquad a_n<a_{n+1}$$

が導かれる．ところが $a_1=1,\ a_2=\sqrt{3}$ であるから，$a_1<a_2$ これから，すべての n に対して $a_n<a_{n+1}$ であること，つまり a_n は増加数列であること，がわかる．次に $\{a_n\}$ が有界であることを示そう．

数学的帰納法により，すべての n に対して $a_n<2$ が示せる．$a_1<2$ は明らか．$a_n<2$ とすると $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$ なので $\{a_n\}$ が有界であることがわかった．よって $\{a_n\}$ には極限値が存在する．その極限値を α とすると漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ で $n\to\infty$ として

$$\alpha=\sqrt{2+\alpha}$$

を得る．よって $\alpha^2 = 2 + \alpha$, すなわち $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$. $a_n > 0$ より $\alpha = 2$ がわかる．

演習　次の数列の収束を調べよ．

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$

例　$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を満たす数列を考える．

(1) $a_1 = 1$ のとき収束を調べよ．(2) $a_1 = \frac{3}{2}$ のとき収束を調べよ．

解　この数列の，最初の数項を書いてみる．

(1) 1, $\frac{7}{5} = 1.4$, $\frac{41}{29} = 1.4137\dots$, $\frac{239}{169} = 1.41420\dots$, $\frac{1393}{985} = 1.41421\dots$

(2) $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{17}{12} = 1.416\dots$, $\frac{99}{70} = 1.4142\dots$, $\frac{577}{408} = 1.414215\dots$, $\frac{3363}{2378} = 1.4142136\dots$

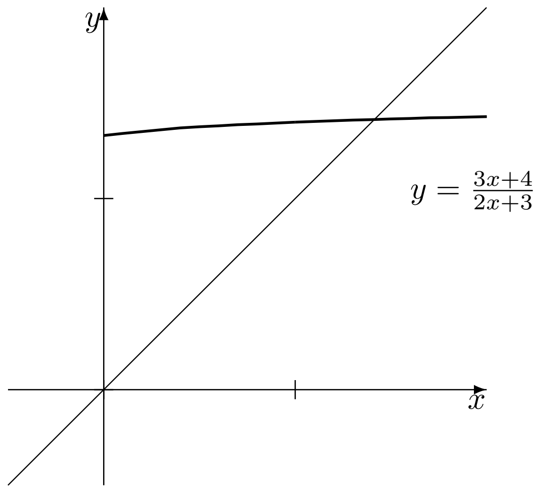
より (1) は増加数列，(2) は減少数列であることが予想される．

まず (1), (2) の場合ともに $a_n > 0$ であることに注意しておこう．$n \geq 2$ とする．

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3)}$$

なので，($a_n > 0$ より $(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3) > 0$ がわかるので) $a_{n+1} - a_n$ の正負と $a_n - a_{n-1}$ の正負は一致する．よって (1) は増加数列，(2) は減少数列であることがわかる．

関数 $f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$ のグラフを書くと次のようになり，区間 $[0, 2]$ で $f(x)$ は有界．よって (1) は有界な増加数列，(2) は有界な減少数列であることがわかる．



従って (1) も (2) も収束する．収束先を α とすると漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ で $n \to \infty$ として $\alpha = \dfrac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を得る．これを解いて $\alpha = \sqrt{2}$.

演習　次の数列の収束を調べよ．

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{a_n + 1}$ $(n = 1, 2, \dots)$

　ヒント：項を順番に書いてみると 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{239}{169}$, $\frac{577}{488}$, $\frac{1393}{985}$, $\frac{3363}{2378}$, $\dots$ となる．

3　関数の極限

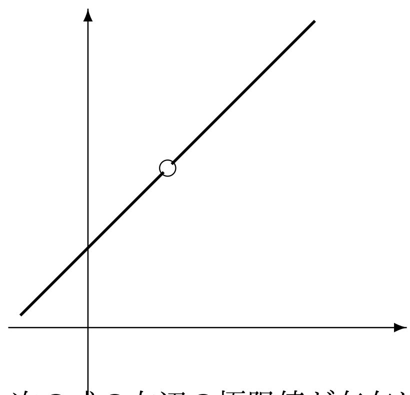
関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，それに応じて $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくとき，$x \to a$ のとき $f(x)$ は b に**収束**するといい，

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{または} \qquad x \to a \text{ のとき } f(x) \to b$$

と書く．b を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という．

例　関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ のとき定義されていないが，$x \neq 1$ のとき



$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

となるので，x が 1 と異なる値をとりながら 1 に限りなく近づくとき，$f(x)$ は 2 に限りなく近づく．よって $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$x \to a$ のとき，関数 $f(x), g(x)$ の極限値が存在するならば，次の式の左辺の極限値が存在して，右辺に等しい．

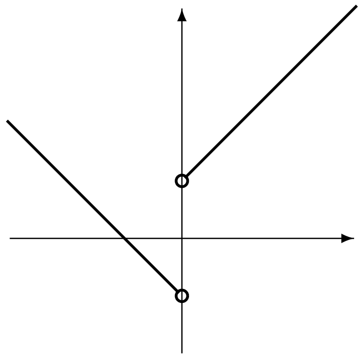
1. $\displaystyle\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$　ただし k は定数
2. $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$　ただし $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
5. a の近くのすべての x について $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

例　$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3}{4}$

例　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x}\frac{(x+1)-1}{x+1} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x}\frac{x}{x+1} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = 1$

x が点 a の右から a に限りなく近づくことを $x \to a+0$ で表し，左から a に限りなく近づくことを $x \to a-0$ で表す．$a=0$ のときは，それぞれ $x \to +0, x \to -0$ と書く．

$x \to a+0$ のときの $f(x)$ の極限値を**右極限値**といい $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ で表す．同様に，$x \to a-0$ のときの $f(x)$ の極限値を**左極限値**といい $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ で表す．



例　$f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ $x>0$ のとき
$f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}=x+1$ よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$
$x>0$ のとき
$f(x)=\dfrac{x^2+x}{-x}=-x-1$ よって $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-1$

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$$x\to a \quad \text{のとき} \quad f(x)\ \text{は}\textbf{正の無限大に発散する}$$

といい，次のように表す．

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad \text{または} \quad f(x)\to\infty \quad (x\to a)$$

また x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなるならば

$$x\to a \quad \text{のとき} \quad f(x)\ \text{は}\textbf{負の無限大に発散する}$$

といい，次のように表す．

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty \quad \text{または} \quad f(x)\to-\infty \quad (x\to a)$$

例　a を定数とする．

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}=\infty, \qquad \lim_{x\to a}-\frac{1}{(x-a)^2}=-\infty.$$

注意　$x\to a$ のとき $\frac{1}{x-a}$ は無限大に発散すると言ってよいだろうか?
$x>0$ と言う条件下で，$x\to 0$ とすると $\frac{1}{x-a}\to\infty$ である．$x<0$ と言う条件下で，$x\to 0$ とすると $\frac{1}{x-a}\to-\infty$ である． したがって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}=\infty$ と書くのはまずい．次のように書くのがよい．

$$\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}=\infty, \qquad \lim_{x\to a-0}\frac{1}{x-a}=-\infty.$$

3.1　$x \to \pm\infty$ のときの極限

変数 x が限りなく大きくなることを $x \to \infty$ で表す．また x が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x \to -\infty$ で表す．

$x \to \infty$ のとき，関数 $f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づくとき，この α を $x \to \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値であるといい，次のように書く．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to \infty)$$

同様に，$x \to -\infty$ のとき，関数 $f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づくとき，この α を $x \to -\infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値であるといい，次のように書く．

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$$

例　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \to \infty$ のとき，関数 $f(x)$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき，関数 $f(x)$ は ∞ に発散するといい，次のように書く．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ の意味も，同様に考える．

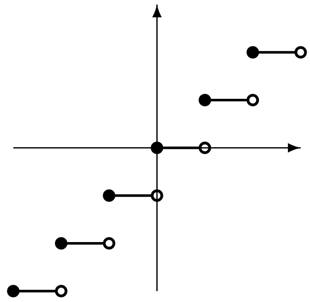
例　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

3.2　連続関数

これまで学んだ関数では $y = x^2$ や $y = \sin x$ のように，そのグラフが 1 つのつながった曲線になるものが多かった．このような関数を $f(x)$ とすると，定義域の任意の x の値 a に対して

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立っている．しかしこのことが成り立たない関数もある．



例　実数 x に対し $n \leq x$ となる最大の整数 n を $[x]$ で表す．この記号 [ ] を**ガウス記号**という．関数 $f(x) = [x]$ のグラフは右のようになり，x の値が整数となるところでグラフは切れている．

$\displaystyle\lim_{x\to1+0} [x] = 1, \qquad \lim_{x\to1-0} [x] = 0$

関数の連続性の定義

関数 $f(x)$ が $x=a$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．すなわち

1. $f(x)$ が $x=a$ で定義されていて $f(a)$ が存在し，
2. $x \to a$ のとき $f(x)$ の極限値が存在し，
3. その極限値が $f(a)$ に一致する

ことである．$f(x)$ が区間 I で**連続**であるとは，区間 I の各点で連続なことである．

中間値の定理

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a,b]$ で連続で， $f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 k に対して，

$$f(c) = k, \qquad (a < c < b)$$

をみたす c が少なくとも 1 つ存在する．

e の定義　関数 $(1+x)^{1/x}$ の $x=0$ の近くでの振舞を調べてみよう．

x	$(1+x)^{1/x}$	x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374...	−0.1	2.86797...
0.01	2.70481...	−0.01	2.73199...
0.001	2.71692...	−0.001	2.71964...
0.0001	2.71814...	−0.0001	2.71841...
0.00001	2.71826...	−0.00001	2.71829...

これから $x \to 0$ のとき $(1+x)^{1/x}$ は一定の値に限りなく近づくことが予想される．実際 $x \to 0$ のとき $(1+x)^{1/x}$ の極限値が存在しその値を e で表す．

e の定義

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$$

e は無理数でその値は

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

であることが知られている．e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**といい，底 e を省略して $\log x$ と書くことが多い．ただし，これは日本での習慣であり，欧米では $\log x$ でなく $\ln x$ と書く事が

多い．

3 角関数の極限　$x \to 0$ としたときの $\frac{\sin x}{x}$ の挙動を調べてみよう．

x	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin x}{x}$	$0.99833\ldots$	$0.99998\ldots$	$0.99999\ldots$

なので

３角関数の基本極限

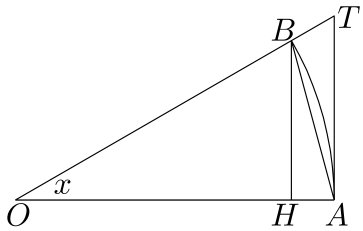
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

となることが予想される．これは次のように説明される．$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ なので $x > 0$ として示せば十分．

$OA = OB = 1$ となるように $\angle AOB = x$ を作図する．

$\angle OAT = \pi/2$ となるように直線 OB 上に点 T をとる．

点 B から OA に下ろした垂線の足を H とする．



$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times OA \times BH = \frac{1}{2} \sin x$

扇形 $OAB = \frac{1}{2} \times OA \times$ 弧長 $AB = \frac{1}{2} x$

$\triangle OAT = \frac{1}{2} \times OA \times \tan x = \frac{1}{2} \tan x$

図で面積を比較して

$$\triangle OAB < \text{扇形}\, OAB < \triangle OAT$$

を得る．よって $\sin x < x < \tan x$. 両辺を $\sin x$ でわって逆数をとると

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

を得る．$x \to 0$ として所要の極限値を得る．

例　$x \to 0$ としたときの $\frac{\sin 2x}{x}$ の挙動を調べてみよう．

x	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin 2x}{x}$	$1.98669\ldots$	$1.99986\ldots$	$1.99999\ldots$

これから

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

となることが予想される．これは次のように証明される．$y = 2x$ とおくと $x \to 0$ のとき $y \to 0$ である．このとき

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot \frac{\sin y}{y} \to 2$$

例　$x \to 0$ としたときの $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ の挙動を調べてみよう．

x	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$	$0.672269\ldots$	$0.666722\ldots$	$0.666667\ldots$

これから

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

となることが予想される．これは次のように証明される．

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} \to \frac{2}{3} \qquad (x \to 0)$$

例

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{x}{(1 + \cos x)} \\
&= 1^2 \frac{0}{1 + 1} = 0
\end{aligned}$$

演習　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

4　微分とその計算

4.1　微分係数の定義とその意味

関数の微分の定義

$f(x)$ を関数とするとき次の極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，その値を $f'(a)$ で表す．

$b=a+h$ とおくと

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

なので，次が成り立つ．

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)$$

a を x で置き換え次のように書く事もよくある．

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to f'(x)\qquad h\to 0$$

h の代わりに Δx を使えば次のように書き表す事が出来る．

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x)\qquad \Delta x\to 0$$

右微分係数，左微分係数 次の極限値を，それぞれ $x=a$ における**右微分係数，左微分係数**という．

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad \lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

それぞれの極限値が存在するとき，右微分可能，左微分可能であるという．

曲線 $y=f(x)$ の 点 $(a,f(a))$ での接線は，点 $(a,f(a))$ を通りその傾きは $f'(a)$ であるので，接線の方程式は次で与えられる．

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

曲線 $y=f(x)$ の 点 $(a,f(a))$ での法線は，点 $(a,f(a))$ を通りその傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ であるので，法線の方程式は次で与えられる．

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

関数 $f(x)$ に対し，x に $f'(x)$ を対応させて得られる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$ または $\frac{df}{dx}$ で表す．関数 $y=f(x)$ の導関数を次のような表し方もする．

$$y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

関数の導関数を求めることを，関数を微分するという．

例 x^2 の微分　$f(x)=x^2$ のとき

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

なので，$h\to 0$ とすると $f'(x)=2x$ である．

例 x^3 の微分　$f(x)=x^3$ のとき

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

なので，$h\to 0$ とすると $f'(x)=3x^2$ である．

例 x^n の微分　$f(x)=x^n$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}\\&=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\end{aligned}$$

なので，$h\to 0$ とすると $f'(x)=nx^{n-1}$ である．このことを公式として述べておこう．

定理（x^n の微分）

$$(x^n)=nx^{n-1}$$

定理（微分可能な関数の連続性）

微分可能な関数は連続である．

証明　$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ を言えばよい．

$$f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\to f'(a)0=0 \qquad (h\to 0)$$

なので，証明された．　□

4.2 いろいろな関数の微分

定理（和差積商の微分）

$f(x)$, $g(x)$ が微分可能のとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' =& f'(x)+g'(x)\\ (f(x)-g(x))' =& f'(x)-g'(x)\\ (f(x)g(x))' =& f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =& \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (\text{ただし } g(x)\neq 0)\end{aligned}$$

証明　和の微分公式 $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ は次のように示す．

$$\begin{aligned}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} =& \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ \to& f'(x)+g'(x) \qquad (h\to 0)\end{aligned}$$

差の微分公式 $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$ も同様である．
積の微分公式は次のように示される

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ =&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ \to& f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (h\to 0)\end{aligned}$$

商の微分公式は次のように示される

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\Big(\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}\Big)\\ =&\frac{1}{h}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a)g(a+h)}\\ =&\frac{1}{h}\frac{(f(a+h)-f(a)g(a))-f(a)(g(a+h)-g(a)}{g(a)g(a+h))}\\ =&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a)-f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ \to&\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2} \qquad (h\to 0)\end{aligned}$$

□

例　積の微分法則を使って，すべての自然数 n に対し $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ事を証明してみよう．$n = 1$ のときは主張は $x' = 1x^0 = 1$ なので，明らかである．$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つと仮定する．

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = (nx^{n-1})x + x^n = (n+1)x^n$$

なので $n+1$ のときも主張が示された．□

定理（逆関数の微分）

関数 $y = f(x)$ が微分可能で，$f'(x)$ が零でなければ，その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も微分可能で，次の関係式が成り立つ．

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{言い換えると} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

証明　$\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$ と置くと

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x} \to \frac{1}{dy/dx} \qquad (\Delta x \to 0)$$

なので証明された．□

例　逆関数の微分法を使って，$y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ の微分を計算する事も出来る．
$x = y^2$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例　同様に，q を自然数とし，逆関数の微分法を使って，$y = \sqrt[q]{x}$ $(x > 0)$ の微分を計算する事も出来る．$x = y^q$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\sqrt[q]{x^{q-1}}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

定理（合成関数の微分）

関数 $y = f(x)$ と関数 $z = g(y)$ を合成させて得られる関数

$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

の導関数は次で与えられる．

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \qquad \text{言い換えると} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

証明

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\Delta z = g\circ f(x+\Delta x) - g\circ f(x)$$

とおくと，$\Delta z = g(f(x+\Delta x)) - g(f(x)) = g(f(x)+\Delta y) - g(f(x))$ なので

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

となり，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$ なので，証明を終わる． □

例　c を定数とするとき $y = f(cx)$ の導関数は $y' = cf'(cx)$ となる．
$z = cx$ とおくと $y = f(z)$ であるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)c = cf'(cx)$$

例 $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$　　$y = f(x)$ として $z = \sqrt{y}$ を x で微分すると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

例　$y = f(x)$ として $z = \sqrt[q]{y}$ (q は自然数) を x で微分すると

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{q}y^{\frac{1}{q}-1}f'(x) = \frac{1}{q}f(x)^{\frac{1}{q}-1}f'(x)$$

$f(x) = x^p$ のときは

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{q}f(x)^{\frac{1}{q}-1}f'(x) = \frac{p}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1}x^{p-1} = \frac{p}{q}(x^p)^{\frac{p}{q}-1}$$

定理（指数関数の微分）

$$(a^x)' = a^x \log a \quad とくに \quad (e^x)' = e^x.$$

証明

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

いま $a^h - 1 = y$ とおくと $h = \log_a(1+y)$. $h \to 0$ のとき，$y \to 0$. よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log a$$

従って所要の公式を得る． □

定理（対数関数の微分）

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x\log a} \quad とくに \quad (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

証明　まず $x > 0$ として証明する．

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで $k = \dfrac{h}{x}$ とおくと，$h\to 0$ のとき $k \to 0$ であり

$$(\log_a x)' = \lim_{k\to 0}\frac{1}{xk}\log_a(1+k) = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{1/k} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a}$$

となり，次を得る．

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a} \qquad とくに \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

次に $x < 0$ とする．$y = -x$ とおくと，

$$(\log_a |x|)' = \frac{d}{dx}(\log_a y) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\log_a y = -\frac{1}{y\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

□

例　　逆関数の微分法を使って，対数関数の微分を計算する事も出来る．
$y = \log_a x$ とすると $x = a^y$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

例　　$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ を覚えておけば，次の様にして $\log_a x$ の微分が計算出来る．

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

定理（３角関数の微分）

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

証明

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x(1-\cos h)}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} \\
&= \cos x \\
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= -\sin x \\
(\tan x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan h}{h}\left(\frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h}\right) \\
&=1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を利用して，商の微分公式を用いて $\tan x$ を微分する事も出来る．

$$
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
$$

$\cot x$ の微分も同様に証明できるので演習に残す． □

定理（逆３角関数の微分）

$$
(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
$$

$$
(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}
$$

証明　$y = \sin^{-1} x$ $(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$ とおくと $x = \sin y$ である．

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
$$

$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ より，$\cos y \ge 0$ である事を用いている．
$y = \cos^{-1} x$ $(0 \le y \le \pi)$ とおくと $x = \cos y$ である．

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
$$

$0 \leq y \leq \pi$ より，$\sin y \geq 0$ である事を用いている．

$y = \tan^{-1} x$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ とおくと $x = \tan y$ で，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ となる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$y = \cot^{-1} x$ $(0 < y < \pi)$ とおくと $x = \tan y$ で，$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y}$ となる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

□

陰関数の微分法 x, y の関係式が $f(x,y)=0$ の形で与えられているとき，これを y について解いて，$y=\varphi(x)$ の形にできれば，y を x で微分する事ができる．しかし $f(x,y)=0$ で，y を x の関数と見て x について微分しても y' が求められる．

例　$x^2+y^2=a^2$ のとき y' を求めよ．

$x^2+y^2=a^2$ の両辺を x について微分すると $2x+2yy'=0$ これより $y'=-\frac{x}{y}$ となる．

$x^2+y^2=a^2$ を y について解くと，$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ である．これを x で微分すると，次を得る．

$$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

演習　$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ を微分して y' を求めよ．

■対数微分　対数をとってから微分すると計算が簡単になることがある．以下そのような例を示す．

例　$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ とおく．対数をとると

$$\log|f(x)| = \log|x-a_1| + \log|x-a_2| + \cdots + \log|x-a_n|$$

両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}$$

よって

$$f'(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\left(\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}\right)$$

例　$y=x^\alpha$ (α は実数) とする． 両辺の対数をとった式 $\log y = \alpha\log x$ を微分すると $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$ なので

$$y' = \frac{\alpha}{x}y = \alpha x^{\alpha-1}$$

例　$y=x^x$ とする． 両辺の対数をとった式 $\log y = x\log x$ を微分すると $\frac{y'}{y} = 1+\log x$ なので

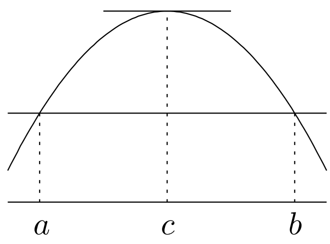
$$y' = (1+\log x)y = (1+\log x)x^x$$

4.3　微分に関する基本定理

次のロルの定理は証明しないで認めることにしよう．これが本節の議論の出発点である．

ロルの定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとする．$f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ $(a<c<b)$ となる c が存在する．



平均値の定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で微分可能であるとすると，次を満たす c が存在する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b) \tag{1}$$

証明　$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と置く．$g(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ とすれば，$g(a)=0,\ g(b)=0$ なので $g(a)=g(b)$．ロルの定理より $g'(c)=0$ $(a<c<b)$ なる c が存在する．$g'(x)=f'(x)-k$ なので，主張を得る．　□

$a<b$ として平均値の定理を証明したが，$b<a$ としても，(1) は成り立つ事に注意しよう．

$h=b-a,\ c=a+\theta h$ と置くと，平均値の定理に現れる式は，次の様に書く事ができる．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$$

分母を払って $f(a)$ を移項すれば，次の式を得る．

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

この式もよく使われる．

定理　区間 $[a,b]$ で $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は定数関数である．

証明　$x\in[a,b]$ に対し $f(x)=f(a)$ を示せばよい．平均値の定理より，次を満たす c が存在する．

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a) \qquad (a<c<x)$$

$f'(c)=0$ なので $f(x)=f(a)$ である．　□

$y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が x について微分可能のとき，$\frac{d}{dx}f'(x)$ を $f(x)$ の第 2 次導関数といい，

$$y'', \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

などで表す．以下同様にして，第 3 次導関数 y''', 第 4 次導関数 $y^{(4)}$ を定義する事ができる．一般に，第 k 次導関数を定義する事ができ，これを次のように表す．

$$y^{(k)}, \qquad \frac{d^k y}{dx^k}, \qquad f^{(k)}(x), \qquad \frac{d^k}{dx^k} f(x)$$

4.4　微分の応用

定理（関数の増減）

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であるとする．このとき，
区間 (a,b) で常に $f'(x) > 0$ ならば $f(a) < f(b)$ である．
区間 (a,b) で常に $f'(x) < 0$ ならば $f(a) > f(b)$ である．

証明　平均値の定理より

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が存在するので，$f'(c) > 0$ ならば $f(a) < f(b)$, $f'(c) < 0$ ならば $f(a) > f(b)$.　□
関数 $f(x)$ が $x = a$ で**極大**であるとは，次を満たす正の数 $\delta > 0$ が存在するときを言う．

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad f(x) < f(a)$$

$f(a)$ を極大値という．
関数 $f(x)$ が $x = a$ で**極小**であるとは，次を満たす正の数 $\delta > 0$ が存在するときを言う．

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad f(x) > f(a)$$

$f(a)$ を極小値という．

定理（極大・極小の判定）

$\delta > 0$ とし，$f(x)$ が $(a-\delta, a+\delta)$ で連続で，a を除いてこの区間で微分可能とする．x の値が増して a を通るとき，

- $f'(x)$ の値が正から負にかわれば $f(x)$ は $x = a$ で極大になり，
- $f'(x)$ の値が負から正にかわれば $f(x)$ は $x = a$ で極小になる．

証明　x の値が増して a を通るとき，$f'(x)$ の値が正から負にかわれば

- $a - \delta < x < a$ のとき $f'(c) > 0$ ならば $f(x) < f(a)$
- $a < x < a + \delta$ のとき $f'(c) < 0$ ならば $f(a) > f(x)$

となり $f(a)$ は極大値である．$f'(x)$ の値が負から正にかわる場合も同様である． $\square$

第 2 平均値の定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) で 2 回微分可能であるとすると，次を満たす c が存在する．

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 \qquad (a<c<b)$$

証明　定数 k を次を満たすように定める．

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{k}{2}(b-a)^2$$

この左辺から右辺を引いて a を x に置き換えた式を

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{k}{2}(b-x)^2$$

とすれば，$\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=0$ となる．よってロルの定理が適用できて $\varphi'(c)=0$ $(a<c<b)$ となる c が存在する．

$$\varphi'(x)=-f'(x)+f'(x)-f''(x)(b-x)-k(b-x)=(b-x)(f''(x)-k)$$

$\varphi'(c)=0$ より $k=f''(c)$ を得る． $\square$

$a<b$ として第 2 平均値の定理を証明したが，$b<a$ としても，第 2 平均値の定理は成り立つ．

$h=b-a$, $c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ とおくと

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a+\theta h)}{2}h^2$$

を得る．この式もよく使われる．

定義（凹凸）　曲線 $y=f(x)$ に $x=a$ での接線が引けるとき，接点 $(a,f(a))$ の近くで曲線がその接線より上にあるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**下に凸** (または上に凹)，接点 $(a,f(a))$ の近くで曲線がその接線より下にあるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**上に凸**（または上に凹) であるという．

定理（凹凸の判定）

関数 $f(x)$ において，

$f''(x)>0$ となる区間では下に凸，$f''(x)<0$ となる区間では上に凸である．

証明　点 $(a,f(a))$ での接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \tag{2}$$

である．第 2 平均値の定理より

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(c) \tag{3}$$

となる c が a と x の間に存在する．(3) から (2) を辺々引けば

$$f(x) - y = \frac{(x-a)^2}{2} f''(c)$$

なので $f''(c) > 0$ ならば，$x = a$ の近所で $y = f(x)$ のグラフは接線の上側であり，$f''(c) < 0$ ならば，$x = a$ の近所で $y = f(x)$ のグラフは接線の下側である． $\square$

グラフの概形

5 積分とその計算

5.1 定積分の定義

定積分の定義

区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

を考える．$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とし，

$$\delta = \delta(\Delta) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

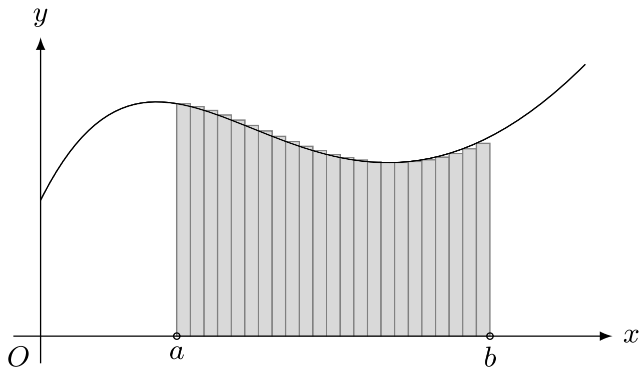
とおく．区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ と $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し

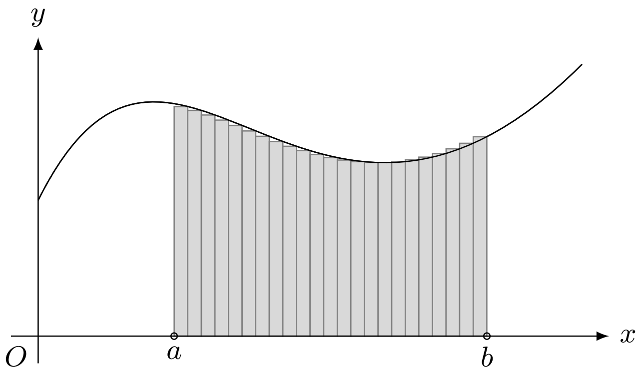
$$S_\Delta = S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

とおく．$\delta \to 0$ となるように，分割 Δ を細かくするとき，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ の選び方に関係なく S_Δ が一定の極限値に近づくとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるといい，その極限値を $[a, b]$ 上の $f(x)$ の定積分といい，$\int_a^b f(x)dx$ で表す．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

f を正として，Δ として等分割をとった場合を考えよう．





ξ_i として区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の左端をとった場合は，$S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の値は左図の短冊形の長方形の面積の和である．ξ_i として区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の右端をとった場合は，$S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の値は右図の短冊形の長方形の面積の和である．分割 Δ は任意にとってよく，ξ_i は区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内の任意の点をとって良いので，これら以外の $S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の図示も考えられるが，δ が非常に小さい正の数ならば $S_\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の値はあまり違わないと考えられる．

これまでは $a < b$ としていたが，$a \geq b$ の場合にも定積分を次のように定める．

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} -\displaystyle\int_b^a f(x)dx & (a > b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

定積分は，定数であり，x の関数でない．横軸を x 軸としても t 軸としても定積分の値には無関係である．とくに

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(*)d* \qquad (*\text{は任意の文字})$$

定積分の性質 $f(x)$, $g(x)$ は積分を考えている区間で連続であるとする．

1. 積分の線形性

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k\text{ は定数})$$

2. 積分区間に関する加法性　a, b, c の大小にかかわらず

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

3. $a < b$ のとき
   - $[a, b]$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

証明　どれも定義から比較的容易に証明できる．最後の式は $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ より得られる式

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

の絶対値を取って示される．□

定義 (原始関数)　$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**原始関数**という．

定理　$f(x)$ の 2 つの原始関数 $F(x), G(x)$ があったとすると $F(x) - G(x)$ は定数である．

証明　$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ より，$F(x) - G(x)$ は定数である．□

例　$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ は x^n の原始関数である．これは，公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ より従う．

例　$-\cos x$ は $\sin x$ の原始関数で，$\sin x$ は $\cos x$ の原始関数である．これは，3 角関数の微分の公式より従う．

定理（定積分と原始関数）

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

証明　分割 Δ : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ をとると，$F'(x) = f(x)$ なので，平均値の定理より，

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_0) =& f(\xi_1)(x_1 - x_0) \qquad (x_0 < \xi_1 < x_1) \\ F(x_2) - F(x_1) =& f(\xi_2)(x_2 - x_1) \qquad (x_2 < \xi_2 < x_2) \\ & \cdots \\ F(x_n) - F(x_{n-1}) =& f(\xi_n)(x_2 - x_1) \qquad (x_{n-1} < \xi_n < x_n) \end{aligned}$$

を得る．辺々加えると

$$F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を得る．$\delta \to 0$ となる極限をとると結果を得る．□

積分の平均値の定理

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば次を満たす定数 c が存在する．

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) \qquad (a < c < b)$$

証明　$[a,b]$ における $f(x)$ の最大値を M 最小値を m とすると，$m \leq f(x) \leq M$ なので

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ とおけば $m \leq K \leq M$. 中間値の定理より $f(c) = K$ $(a < c < b)$ を満たす c が存在する　□

定積分の上端を変数 (例えば x) としたものを不定積分と言い，次の記号で表す.

$$\int_a^x f(t)dt \qquad \int f(x)dx$$

定理（不定積分は原始関数）

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a < x < b)$$

証明　$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおけば，積分の平均値の定理より

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \qquad (x < c < x+h)$$

を満たす c が存在する．$h \to 0$ とすれば $c \to x$ なので証明を終わる．　□

不定積分の計算 導関数を求める公式を，原始関数を求める公式に読み替えることが出来る．不定積分は原始関数であるから，原始関数を 1 つ求めてそれに適当な定数 C (積分定数という) を加えれば，不定積分を求める公式が求まる．今後の計算の便宜のために，よく使う微分の公式を，不定積分の公式に書き換えておこう．

微分の公式の積分の公式への読み替え

微分の公式	積分の公式
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$
$(\log\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \log\lvert x\rvert + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$
$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$

いずれも積分の公式を確かめるには，右辺を微分してみればよい．なお，積分定数 C はしばしば省略されるので，他書を参照して計算するときは注意が必要である．

次の公式も，よく使われる．

対数を使って不定積分が表される場合

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

この公式を確かめるには，右辺を微分してみればよい．

例　この公式を用いて求まる不定積分の例を挙げる．

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+a^2)'}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2) + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \log|\sin x| + C$$

5.2 部分積分と置換積分

積分計算の技巧では，部分積分と置換積分が基本である．本節ではそれらを説明する．

定理（部分積分法）

$f'(x)$ が連続で，$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすれば

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

証明　$(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$ より，

$$f(x)g(x) = (f(x)G(x))' - f'(x)G(x)$$

を得る．この式を積分すればよい． □

例　部分積分を用いて不定積分を求める例をいくつか挙げよう．

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int x(-\cos x)'dx \\ &= x(-\cos x) - \int x'(-\cos x)dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'dx \\ &= x\sin x - \int x'\sin x dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \int x(e^x)'\,dx \\ &= xe^x - \int x'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx &= \int x^2(e^x)'dx \\ &= x^2e^2 - \int (x^2)'e^x dx \\ &= x^2e^2 - 2\int xe^x dx \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C\end{aligned}$$

例 対数関数，逆正接関数の不定積分

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C \qquad \int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

これらは $x' = 1$ である事を利用して，部分積分を施すことで求められる．

$$\int \log x\,dx = \int x'\log x\,dx \qquad\qquad \int \tan^{-1} x\,dx = \int x'\tan^{-1} x\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= x\log x - \int x(\log x)'dx \\
&= x\log x - \int x(\frac{1}{x})dx \\
&= x\log x - \int dx \\
&= x\log x - x + C
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= x\tan^{-1}x - \int x(\tan^{-1}x)'dx \\
&= x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\
&= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx \\
&= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C
\end{aligned}
$$

定理（置換積分法）

$x = \varphi(t)$ が微分可能ならば，

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad \begin{pmatrix} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

証明　$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると，

$$
\frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(x)
$$

である．よって

$$
F(x) = \int f(x)\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt
$$

□

置換積分の公式は $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ を形式的に $dx = \varphi'(t)dt$ と書いて，これを用いて形式的に置き換えて計算していると記憶するとよい．

例 $\displaystyle\int (ax+b)^n dx$　(n は自然数，$a \neq 0$)

$t = ax + b$ とおくと，$dx = \frac{dt}{a}$.

$$
\int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C
$$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$　$(a \neq 0)$

$t = ax + b$ とおくと，$dx = \frac{dt}{a}$.

$$
\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\log|t| + C = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C
$$

上の 2 つの例は次のように一般化される．

$f(ax+b)$ の不定積分

$a \neq 0$ とし $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とするとき，$\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$
$x = a\sin t$ とおくと，$dx = a\cos t\,dt$ なので

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t}}dt = \int dt = t + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a>0)$
$x = a\tan t$ とおくと，$a^2+x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 x}$, $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$ なので

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{\frac{a^2}{\cos^2 t}}\frac{a\,dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{a} = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

5.3 有理関数の積分

分母分子が多項式である様な分数で表される関数を有理関数という．有理関数の不定積分を求めるには，与えられた有理式をいくつかの分数の和に分解して求めるのが定石である．
例 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad (a>0)$
解　まず次の分数計算を思い出そう．

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} = \frac{x+a}{x^2-a^2} - \frac{x-a}{x^2-a^2} = \frac{2a}{x^2-a^2}$$

両辺を $2a$ で割ると $\displaystyle\frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big) = \frac{1}{x^2-a^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}(\log|x-a| - \log|x+a|) + C \\ &= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\end{aligned}$$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \quad (0<a<b)$
解　次を満たす p, q を見つけたい．

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b}$$

両辺に $(x-a)(x-b)$ を掛けると $1=p(x-b)+q(x-a)$ なので，$x=a$ と置くと $p=1/(a-b)$，$x=b$ と置くと $q=1/(b-a)$ を得る．

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=&\int\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx\\=&\frac{1}{b-a}(\log|x-a|-\log|x-b|)+C\\=&\frac{1}{b-a}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C\quad\square\end{aligned}$$

$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ $(a>0)$ を思い出しておく．

例 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\qquad(0<a<b)$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=&\int\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx\\=&\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right)+C\end{aligned}$$

例 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\qquad(a>0)$

$(\frac{1}{x^2+a^2})'=-\frac{2x}{(x^2+a^2)^2}$ に注意する．部分積分を用いると，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2+a^2}=&\int\frac{1}{x^2+a^2}x'\,dx\\=&\frac{x}{x^2+a^2}-\int\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'x\,dx\quad(\text{部分積分})\\=&\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{2x^2}{x^2+a^2}dx\\=&\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{2(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}dx-\int\frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}dx\\=&\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{2}{x^2+a^2}dx-\int\frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}dx\end{aligned}$$

なので，右辺第 3 項を左辺に移項し，左辺を右辺に移項して右辺第 2 項とまとめると

$$\int\frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

となり次を得る．

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C\tag{4}$$

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} \qquad (a>0)$

これも部分積分を用いる．$(\frac{1}{(x^2+a^2)^2})' = -\frac{4x}{(x^2+a^2)^3}$ なので

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} =& \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} x' \, dx \\
=& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} - \int \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^2} \right)' x \, dx \quad (\text{部分積分}) \\
=& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \int \frac{4x^2}{(x^2+a^2)^3} dx \\
=& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \int \frac{4(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^3} dx - \int \frac{4a^2}{(x^2+a^2)^3} dx \\
=& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \int \frac{4}{(x^2+a^2)^2} dx - \int \frac{4a^2}{(x^2+a^2)^3} dx
\end{aligned}
$$

なので，右辺第 3 項を左辺に移項し，左辺を右辺に移項して右辺第 2 項とまとめると

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4a^2}{(x^2+a^2)^3} dx =& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \\
=& \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

となり次を得る．

$$
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \tan^{-1} \frac{x}{a} \tag{5}
$$

例 $\displaystyle\int \frac{px+q}{x^2+a^2} dx \qquad (a>0)$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{px+q}{x^2+a^2} dx =& p \int \frac{x}{x^2+a^2} dx + q \int \frac{dx}{x^2+a^2} \\
=& \frac{p}{2} \log(x^2+a^2) + \frac{q}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

例 $\displaystyle\int \frac{px+q}{(x^2+a^2)^2} dx \qquad (a>0)$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{px+q}{(x^2+a^2)^2} dx =& p \int \frac{x}{(x^2+a^2)^2} dx + q \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \\
=& \frac{p}{2} \int \frac{du}{u^2} + q \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (u = x^2+a^2) \\
=& -\frac{p}{2} \frac{1}{u} + q \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \\
=& -\frac{p}{2(x^2+a^2)} + \frac{q}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{q}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

例 $\displaystyle\int \frac{px+q}{x^2+x+1}dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{px+q}{x^2+x+1}dx =& \int \frac{p(x+\frac{1}{2})+q-\frac{p}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\
=& \frac{p}{2}\log((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}) + \frac{q-\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\
=& \frac{p}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{2q-p}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}
$$

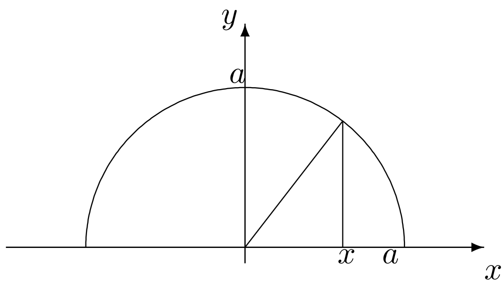
5.4　2 次式の平方根を含む関数の不定積分

2 次式の平方根を含む関数の不定積分は計算の工夫で求められる場合が多い．例で説明する．

例　　不定積分 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a>0)$ を求めよ．

解 1（幾何的な方法）定積分 $\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}dx$ を面積とみて，扇型と 3 角形の面積の和として計算しよう．扇形の中心角は $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ なので，その面積は $\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$．3 角形の面積は $\frac{1}{2}\times$ 底辺 $\times$ 高さ なので $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$ である．よって

$$
\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}
$$



解 2（$x=a\sin\theta$ と置換する方法） $x=a\sin\theta$ とおくと，$dx=a\cos\theta d\theta$ なので

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}dx =& \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}a\cos\theta d\theta \\
=& \int a^2\cos^2\theta d\theta \\
=& a\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
=& \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C \\
=& \frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta) + C \\
=& \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right) + C \\
=& \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C
\end{aligned}
$$

解 3（部分積分による方法） 求める積分を I とおくと，

$$
I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

右辺の I を移項して整理すれば求めたい積分を得る．

解 4 （有理関数で置換する方法） 円の方程式 $x^2+y^2=a^2$ と，点 $(-a,0)$ を通り傾き t の直線の方程式 $y=t(x+a)$ を連立させて (x,y) について解くと

$$
x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \quad y=\frac{2at}{1+t^2} \quad \text{であり} \quad dx=-\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt \quad t=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad \text{なので}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int\frac{2at}{1+t^2}\Big(-\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt\Big) \\
&= -\int\frac{8a^2t^2}{(1+t^2)^3}dt \\
&= 8a^2\int\Big(\frac{1}{(1+t^2)^3}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\Big)dt \\
&= 8a^2\Big(\frac{t(1-t^2)}{8(1+t^2)}-\frac{1}{8}\tan^{-1}t\Big)+C \quad ((4),(5)\text{ を用いる}) \\
&= a^2\Big(\frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}-\tan^{-1}t\Big)+C \\
&= a^2\left(\frac{\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\big(1-\frac{a-x}{a+x}\big)}{\big(1+\frac{a-x}{a+x}\big)^2}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}+C
\end{aligned}
$$

この答は一見，他の解答と異なるが，実は次の式が成立するので，積分定数を考慮すれば正しいことがわかる．

$$
-\tan^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}
$$

この式を証明せよ．

注：上の解き方のうちどれがよくてどれが悪いということはない．しかし，やり方によっては計算が簡単になったり難しくなったりする．幾何学的に解く事ができれば易しくなることが多い様である．$\sqrt{x^2+A}$ や $\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$ の原始関数を求める際も，同様に複数の方法が考えられる．（$x=a\sinh t$ とおく，または 有理関数で置換，部分積分など）

例

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C, \qquad \int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2+A}}{2}+\frac{A}{2}\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C
$$

解　$y=\sqrt{x^2+A}$ は双曲線 $y^2-x^2=A$ の $y\geq 0$ なる部分である．この双曲線は $y=\pm x$ を漸近線にもつので，漸近線に平行な直線 $y=-x+t$ は双曲線と 1 点で交わる．この交点は $(x,y)=(\frac{t^2-A}{2t},\frac{t^2+A}{2t})$ であるので $dx=\frac{t^2+A}{2t^2}dt$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}&=\int\frac{dx}{y}\\
&=\int\frac{\frac{t^2+A}{2t^2}dt}{\frac{t^2+A}{2t}}\\
&=\int\frac{dt}{t}\\
&=\log|t|+C\\
&=\log|x+y|+C\\
&=\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2+A}\,dx&=\int y\,dx\\
&=\int\frac{t^2+A}{2t^2}\frac{t^2+A}{2t}\,dt\\
&=\int\frac{t^4+2At^2+a^4}{4t^3}\,dt\\
&=\frac{1}{4}\int(t+\frac{2A}{t}+\frac{a^4}{t^3})\,dt\\
&=\frac{1}{4}(\frac{t^2}{2}+2A\log|t|-\frac{a^4}{2t^2})+C\\
&=\frac{t^4-a^4}{8t^2}+\frac{A}{2}\log|t|+C\\
&=\frac{xy}{2}+\frac{A}{2}\log|t|+C\\
&=\frac{x\sqrt{x^2+A}}{2}+\frac{A}{2}\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C
\end{aligned}
$$

後者の積分は $(\sqrt{x^2+A})'=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}$ を利用して，部分積分を使って求めることもできる．

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2+A}\,dx&=\int\sqrt{x^2+A}\,x'\,dx\\
&=x\sqrt{x^2+A}-\int(\sqrt{x^2+A})'\,x\,dx \qquad \text{(部分積分)}\\
&=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx\\
&=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx+\int\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x\sqrt{x^2+A} - \int \sqrt{x^2+A}\,dx + \int \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A} - \int \sqrt{x^2+A}\,dx + \log|x+\sqrt{x^2+A}|
\end{aligned}
$$

右辺第 2 項を左辺に移項して 2 で割れば次を得る．

$$
\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+A}}{2} + \frac{A}{2}\log|x+\sqrt{x^2+A}| + C
$$

5.5　3 角関数の積分

例 $\int \sin^2 x\,dx$　　$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ より，

$$
\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C
$$

例 $\int \cos^2 x\,dx$　　$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ より，

$$
\int \sin^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C
$$

例 $\int \sin^3 x\,dx$　　$t = \cos x$ と置くと $dt = -\sin x\,dt$ なので

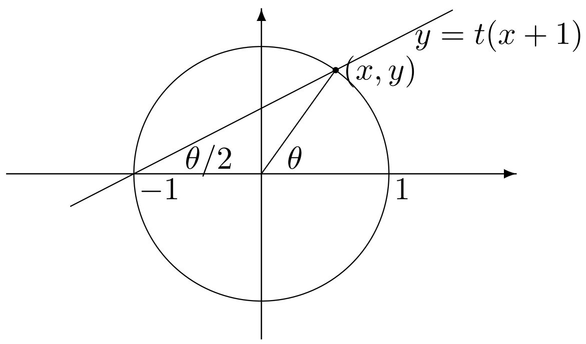
$$
\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (t^2-1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + C
$$

例 $\int \cos^3 x\,dx$　　$t = \sin x$ と置くと $dt = \cos x\,dt$ なので

$$
\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1-t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C
$$

3 角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ の有理関数の積分は $t = \tan\frac{\theta}{2}$ と置く事により t の有理関数の積分に帰着する．（方針: まず原点を中心とする単位円上に点 $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ をとり，$(-1,0)$ と (x,y) を結ぶ直線 $y = t(x+1)$ を書き, (x,y) を t で表す．次が成り立つことを示す．）

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
y &= \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \\
\theta &= 2\tan^{-1} t \\
d\theta &= \frac{2}{t^2+1}\ dt.
\end{aligned}
$$



問 この置換を用いて次の不定積分を計算せよ．

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} \qquad \int \frac{dx}{a\sin x+\cos x} \quad (a>0) \qquad \int \frac{dx}{1+a\sin x} \quad (|a|<1)$$

解　$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a\sin x+\cos x} &= \int \frac{1}{a\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2dt}{2at+(1-t^2)} \\ &= \int \frac{2dt}{1+a^2-(t-a)^2} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}-t+a}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+t-a}\Big)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\log\Big|\frac{t-a+\sqrt{1+a^2}}{t-a-\sqrt{1+a^2}}\Big| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\log\Big|\frac{\tan\frac{x}{2}-a+\sqrt{1+a^2}}{\tan\frac{x}{2}-a-\sqrt{1+a^2}}\Big|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+a\sin x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2at}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2dt}{1+t^2+2at} \\ &= \int \frac{2dt}{(t+a)^2+(1-a^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\frac{t+a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\frac{\tan\frac{x}{2}+a}{\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

上の方法で置換をすると必ず不定積分を求める事が出来るが，最後まで計算するのは大変になる事もある．例えば本節冒頭の例はそのような例である．

$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\tan x$ の有理式の不定積分　$\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \tan x$ の有理式の不定積分は，$t=\tan x$ とおけば求まる．実際次が成立する．（詳細略）

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

例　次の不定積分を計算せよ．ただし a, b は正の定数．

$$\int \frac{dx}{a+b\tan x}$$

解　$t=\tan x$ とおくと $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{a+b\tan x} = \int \frac{1}{a+bt}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\int\Big(\frac{b^2}{a+bt}-\frac{bt-a}{1+t^2}\Big)dt$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\log|a+bt|-\frac{b}{2}\log(1+t^2)+a\tan^{-1}t\right)\\
=&\frac{1}{a^2+b^2}\log\left|\frac{a+b\tan x}{\sec x}\right|+\frac{a}{a^2+b^2}\tan^{-1}(\tan x)\\
=&\frac{1}{a^2+b^2}\log|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x
\end{aligned}
$$

5.6　面積と体積

定理（カバリエリの原理）

立体を x 軸に垂直な平面で切った切口の面積が x の連続関数 $S(x)$ で表されれば 2 つの平行な平面 $x=a$, $x=b$ の間に挟まれた立体の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

証明　区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ をとる．平面 $x=x_{i-1}$ と $x=x_i$ で挟まれた立体の体積を ΔV_i とすると

$$m_i(x_i-x_{i-1})\leq\Delta V_i\leq M_i(x_i-x_{i-1})$$

但し $S(x)$ の区間 $[x_{i-1},x_i]$ での最大値を M_i, 最小値を m_i としている．

$$m_i\leq\frac{\Delta V_i}{x_i-x_{i-1}}\leq M_i$$

なので，中間値の定理より，

$$S(\xi_i)=\frac{\Delta V_i}{x_i-x_{i-1}}\qquad x_{i-1}<\xi_i<x_i$$

なる ξ_i が存在する．よって

$$V=\sum_{i=1}^n\Delta V_i=\sum_{i=1}^n S(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

$\delta\to 0$ とした極限をとれば，主張を得る．　□

例 （錐体の体積）　底面積 A,　高さ h の錐体の体積は $V=\frac{1}{3}Ah$ である．

証明　原点 O を頂点とし，x 軸が底面に垂直と仮定する．座標 x における錐の切口は，底面に相似でその面積を $S(x)$ とすると

$$\frac{S(x)}{A}=\frac{x^2}{h^2}\qquad\text{すなわち}\qquad S(x)=\frac{A}{h^2}x^2$$

よってカバリエリの原理より，

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{A}{h^2}x^3 dx = \frac{1}{3}Ah$$

□

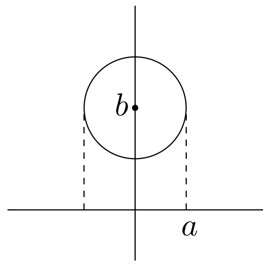
定理（回転体の体積）　$[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ のグラフと，x 軸および $x=a,\, x=b$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V は

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

証明　座標 x での切口は半径 $f(x)$ の円なので $S(x) = \pi f(x)^2$ としてカバリエリの原理を適用すればよい． □

例（回転トーラスの体積）　円 $x^2+(y-b)^2 = a^2$ $(0<a<b)$ を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積 V を求める．与えられた式を y について解くと，$y = b \pm \sqrt{a^2-x^2}$ である．よって $y_0 = b - \sqrt{a^2-x^2}$ を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積 V_0 を $y_1 = b + \sqrt{a^2-x^2}$ を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積 V_1 から引けば良い．

$$\begin{aligned}
V =& V_1 - V_0 = \int_{-a}^a \pi y_1^2 dx - \int_{-a}^a \pi y_0^2 dx \\
=& \pi \int_{-a}^a (y_1-y_0)(y_1+y_0)dx \\
=& \pi \int_{-a}^a 2\sqrt{a^2-x^2} \cdot 2b\, dx \\
=& 4b\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx = 2ba^2\pi^2
\end{aligned}$$



5.7　曲線の長さ