正多面体と幾何学

福井敏純

3次元の正多面体 (1)

立方体 (正 6 面体)

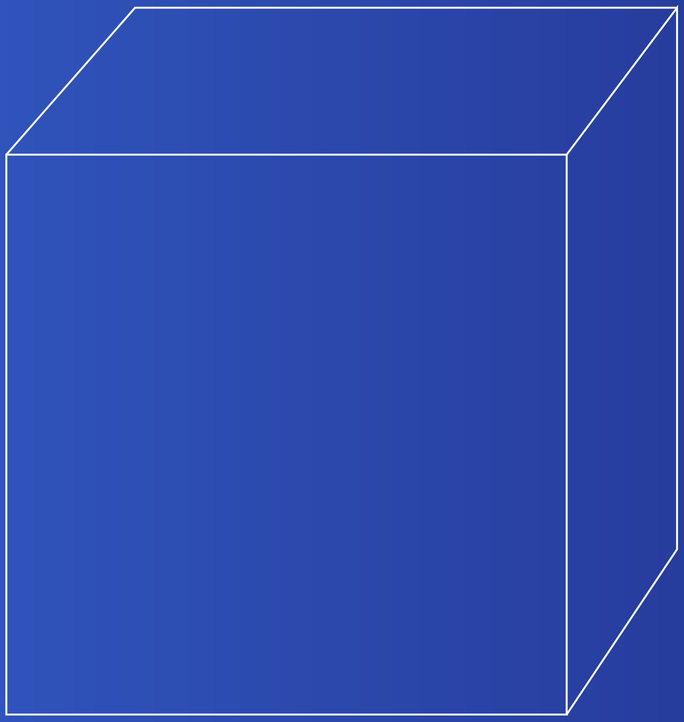
3 次元の正多面体 (1)

立方体 (正 6 面体)

頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

3次元の正多面体 (1)

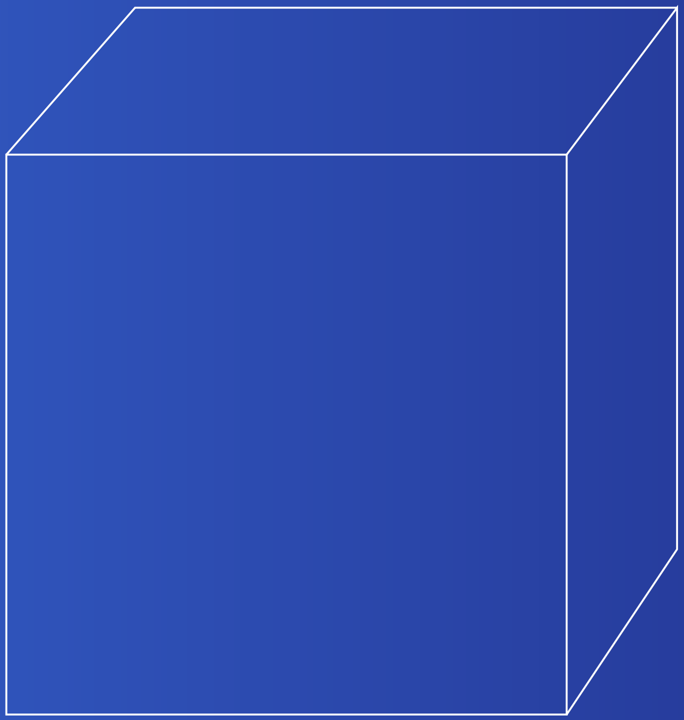
立方体 (正 6 面体)
頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$



3次元の正多面体 (1)

立方体 (正 6 面体)

頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

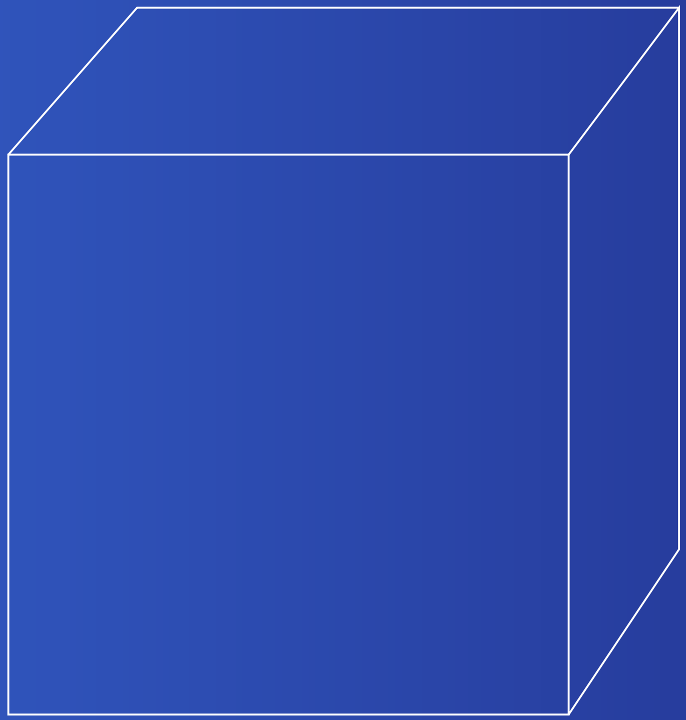


正 4 面体

3次元の正多面体(1)

立方体(正6面体)

頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$



正4面体

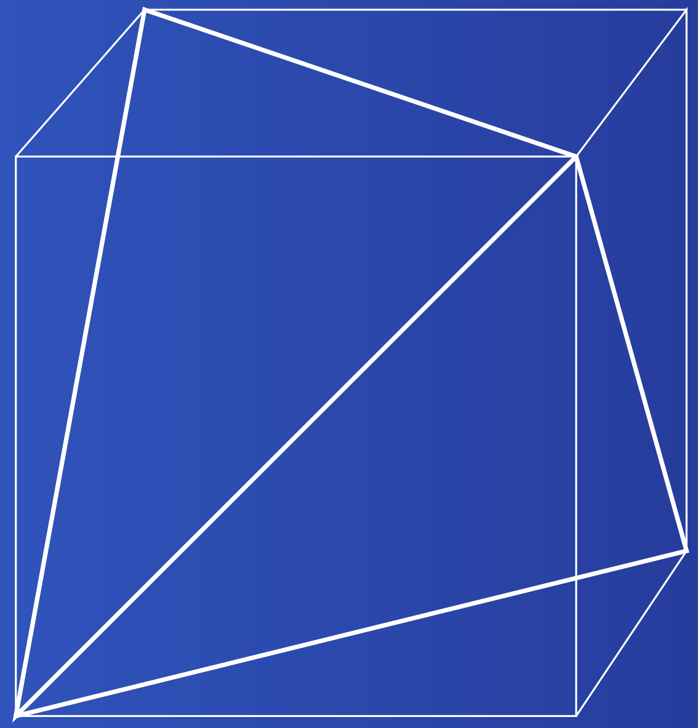
頂点 $(1, -1, 1), (1, 1, -1)$

$(-1, -1, -1), (-1, 1, 1)$

3 次元の正多面体 (1)

立方体 (正 6 面体)
頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

正 4 面体
頂点 $(1, -1, 1), (1, 1, -1)$
$(-1, -1, -1), (-1, 1, 1)$

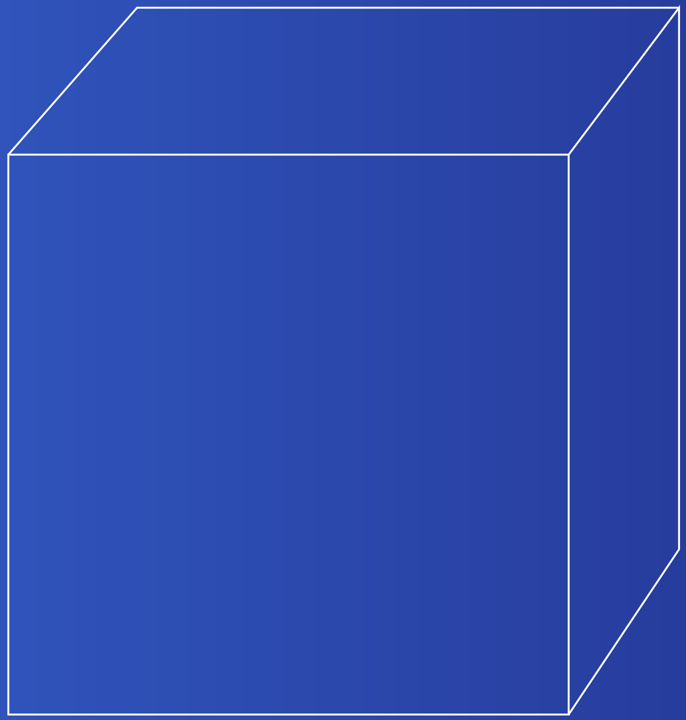


3 次元の正多面体 (2)

立方体 (正 6 面体)

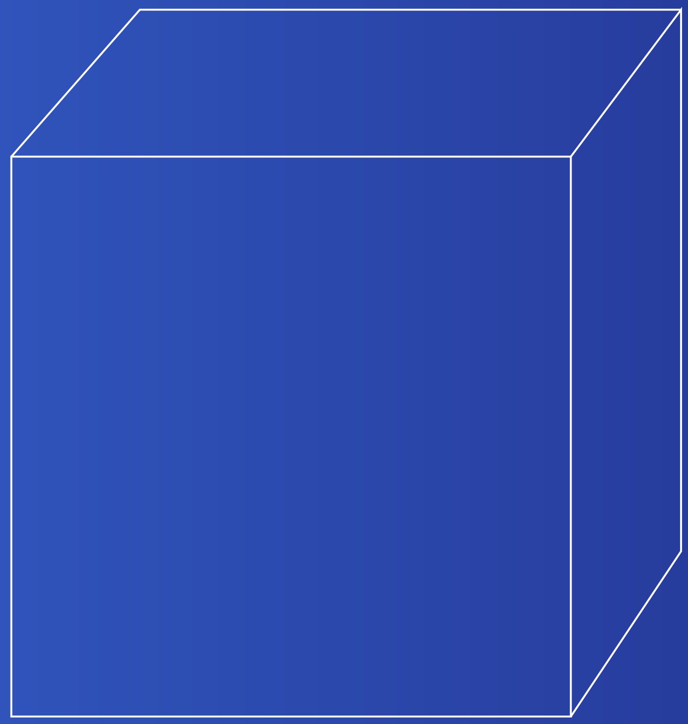
3 次元の正多面体 (2)

立方体 (正 6 面体)



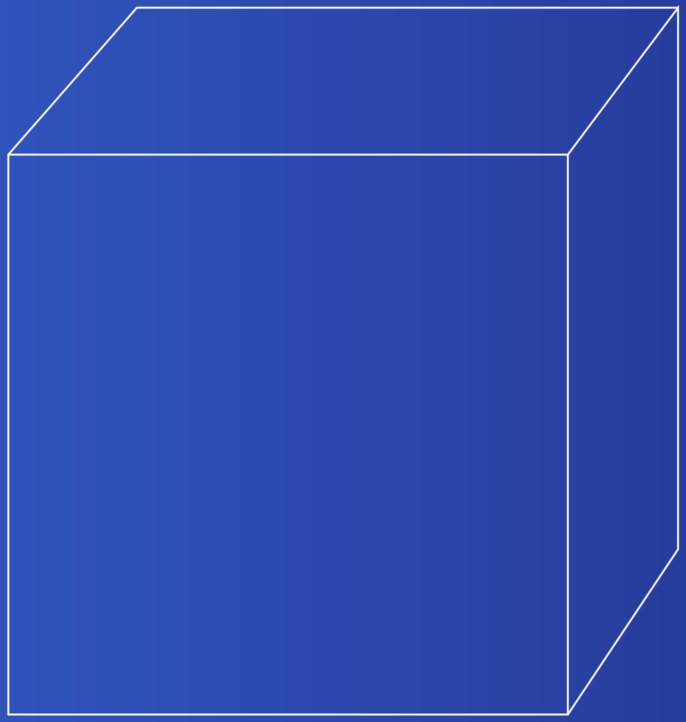
3次元の正多面体(2)

立方体(正6面体)　　　　正8面体



3 次元の正多面体 (2)

立方体 (正 6 面体)

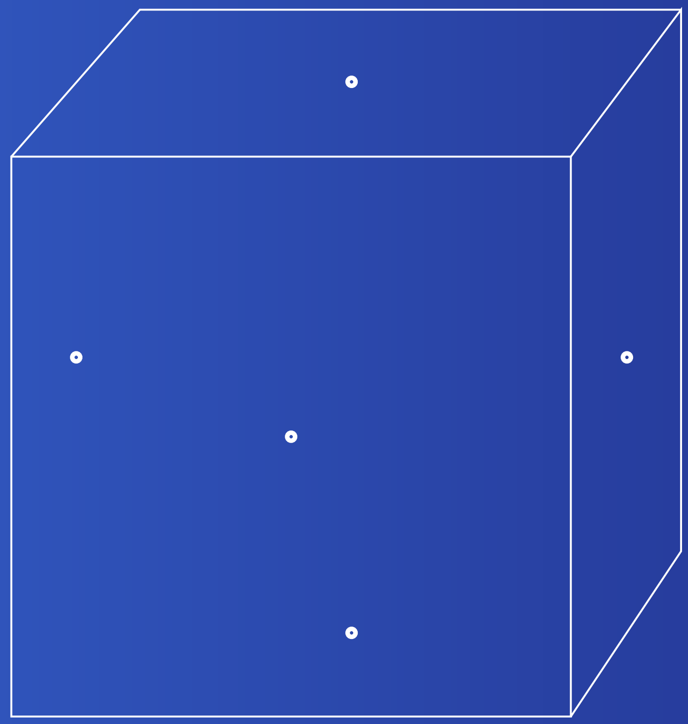


正 8 面体
頂点 $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$

$(0, 0, \pm 1)$

3次元の正多面体(2)

立方体(正6面体)



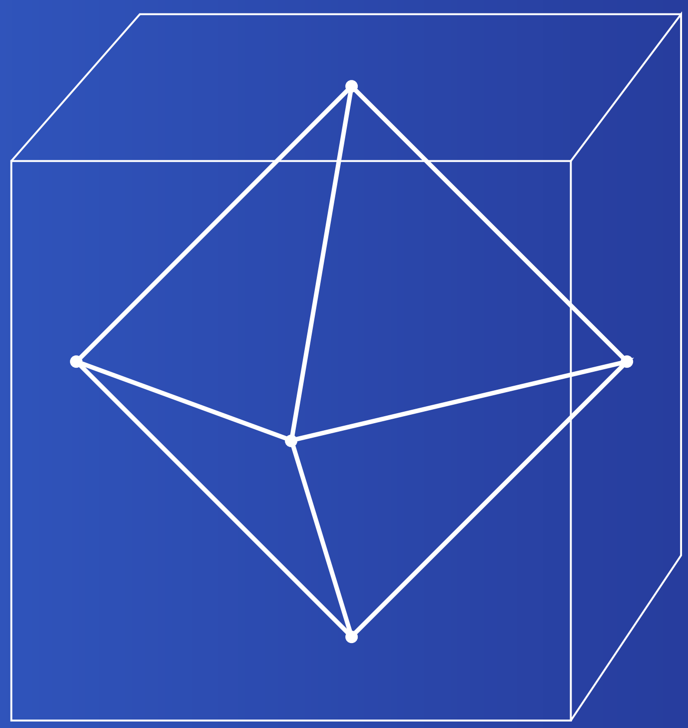
正8面体

頂点 $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$

$(0, 0, \pm 1)$

3次元の正多面体(2)

立方体(正6面体)



正8面体

頂点 $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$

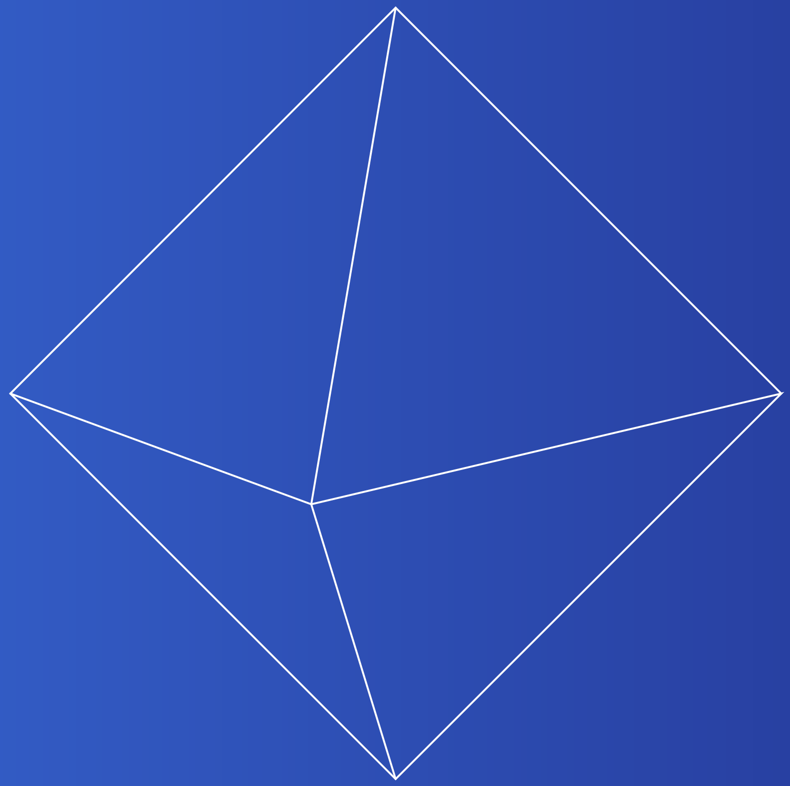
$(0, 0, \pm 1)$

3次元の正多面体(3)

正８面体

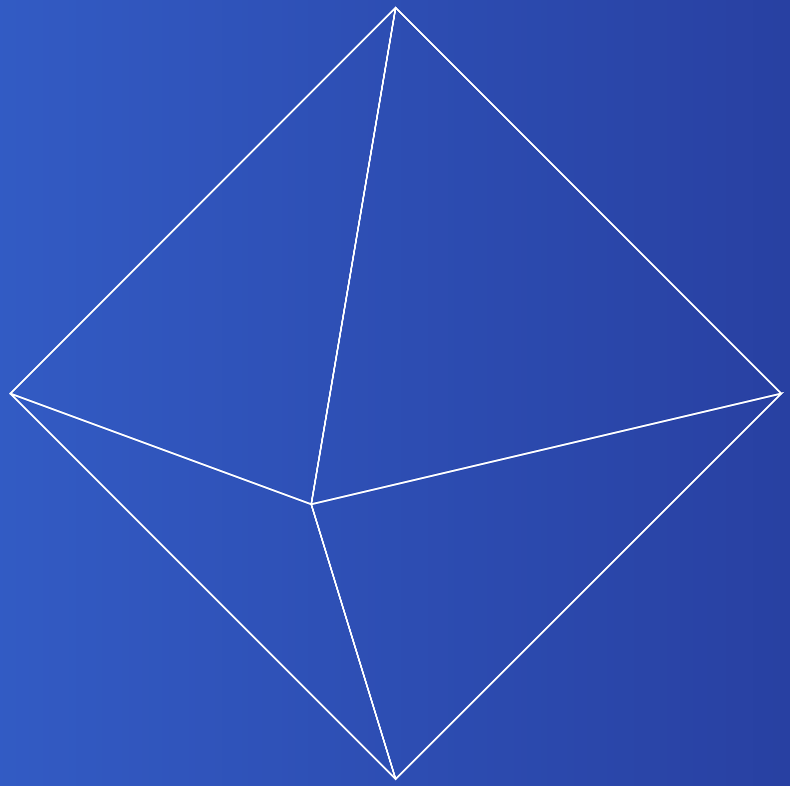
3次元の正多面体(3)

正８面体



3次元の正多面体(3)

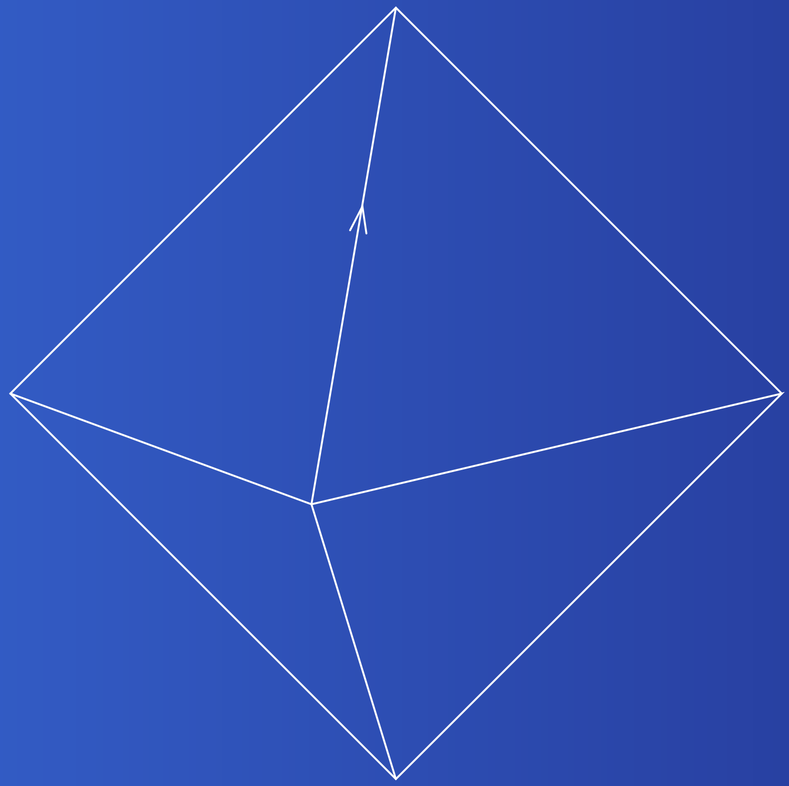
正８面体　　　　　辺に向きをつける



3次元の正多面体(3)

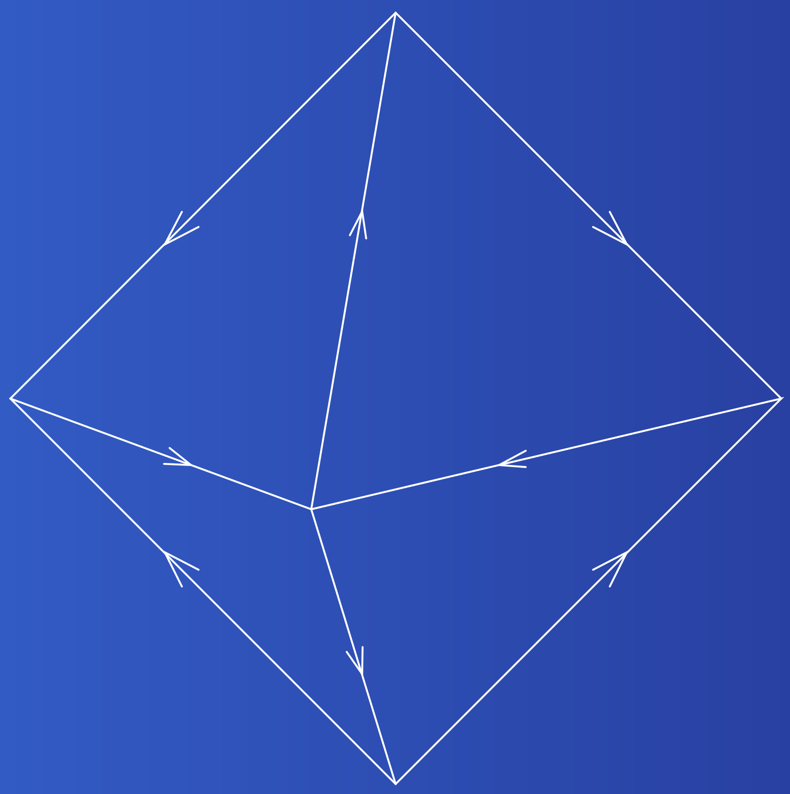
正８面体

辺に向きをつける



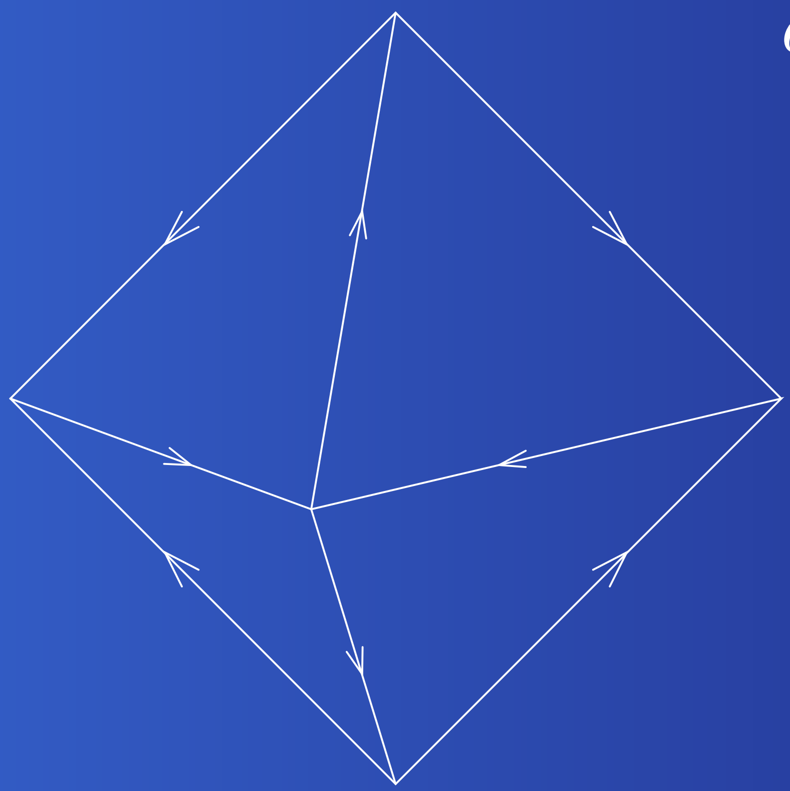
3次元の正多面体(3)

正８面体　　　　辺に向きをつける



3 次元の正多面体 (3)

正 8 面体



辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

3次元の正多面体(3)

正 8 面体

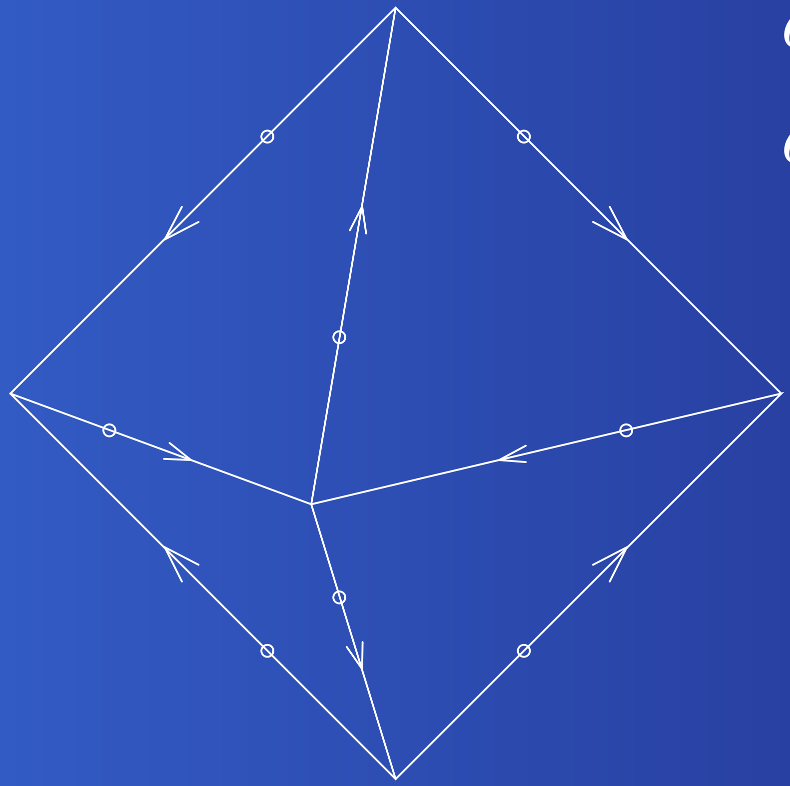
辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

$a : b = 1 : 2$

3次元の正多面体(3)

正８面体



辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

$a : b = 1 : 2$

3次元の正多面体(3)

正８面体

辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

$a : b = 1 : 2$

凸包をとる

3 次元の正多面体 (3)

正 8 面体

辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

$a : b = 1 : 2$

凸包をとる

20 面体ができる

3 次元の正多面体(3)

正 8 面体

辺に向きをつける

$a : b$ に内分する

$a : b = 1 : 2$

凸包をとる

20 面体ができる

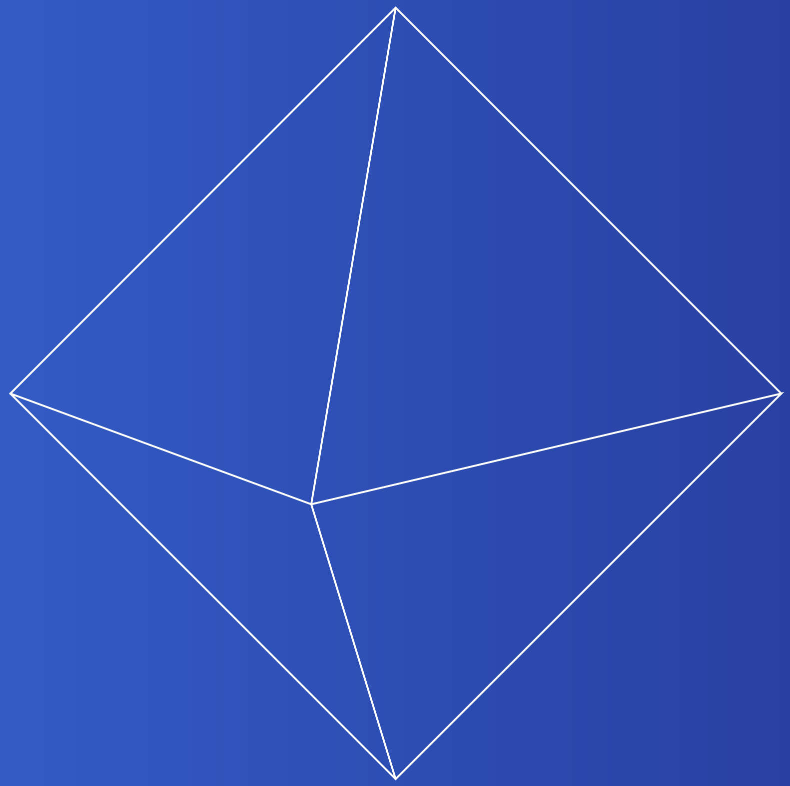
正 3 角形(一辺=$\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$)

2 等辺三角形(底辺 =$2a$)

3 次元の正多面体 (4)

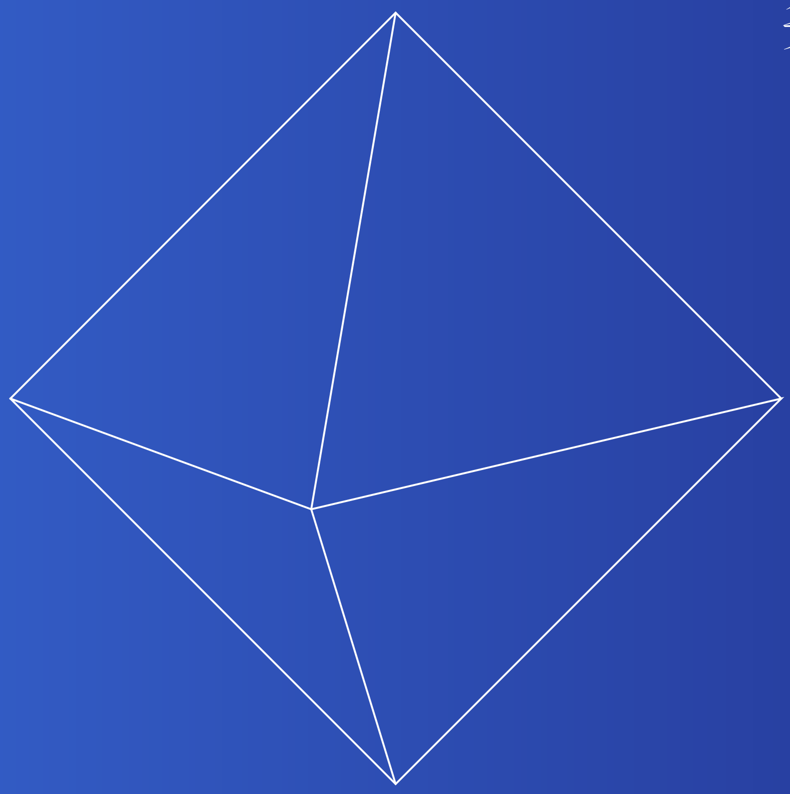
正 8 面体

$2a = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}$ を解く



3 次元の正多面体 (4)

正 8 面体



$2a = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}$ を解く

条件 $a + b = 1$ がある。

3次元の正多面体(4)

正８面体

$2a = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}$ を解く

条件 $a + b = 1$ がある。

$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

3 次元の正多面体 (4)

正 8 面体

$2a = \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}$ を解く

条件 $a + b = 1$ がある。

$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

正 20 面体

3次元の正多面体(4)

正8面体

$2a = \sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$ を解く

条件 $a+b=1$ がある。

$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

正20面体

頂点 $(0, \pm a, \pm b)$

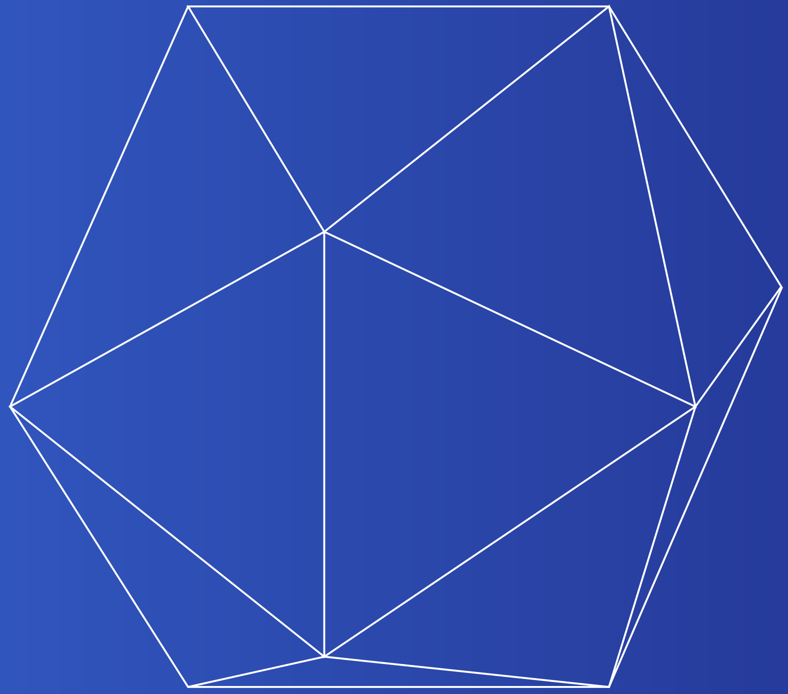
$(\pm b, 0, \pm a)$, $(\pm a, \pm b, 0)$

3 次元の正多面体 (5)

正 20 面体

3 次元の正多面体 (5)

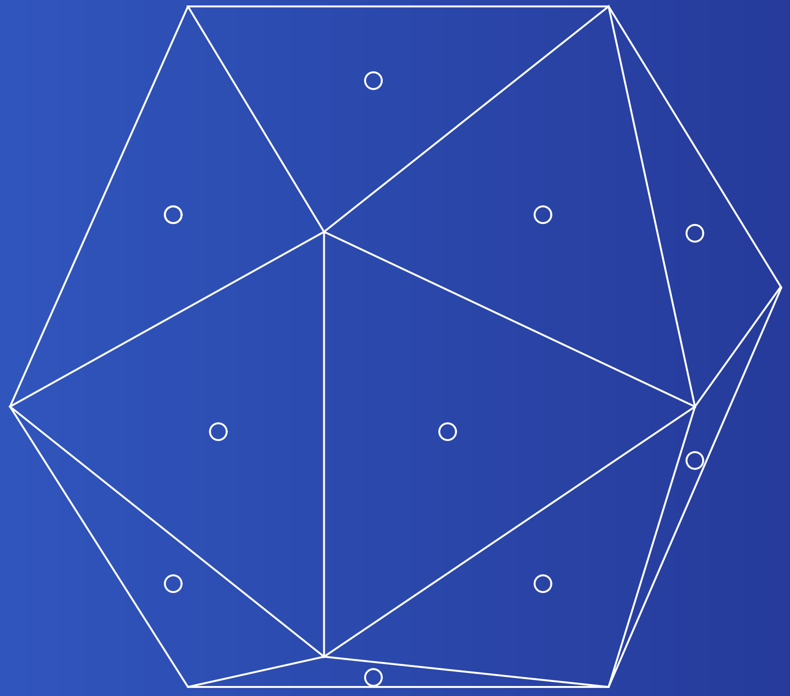
正 20 面体



3次元の正多面体(5)

正20面体

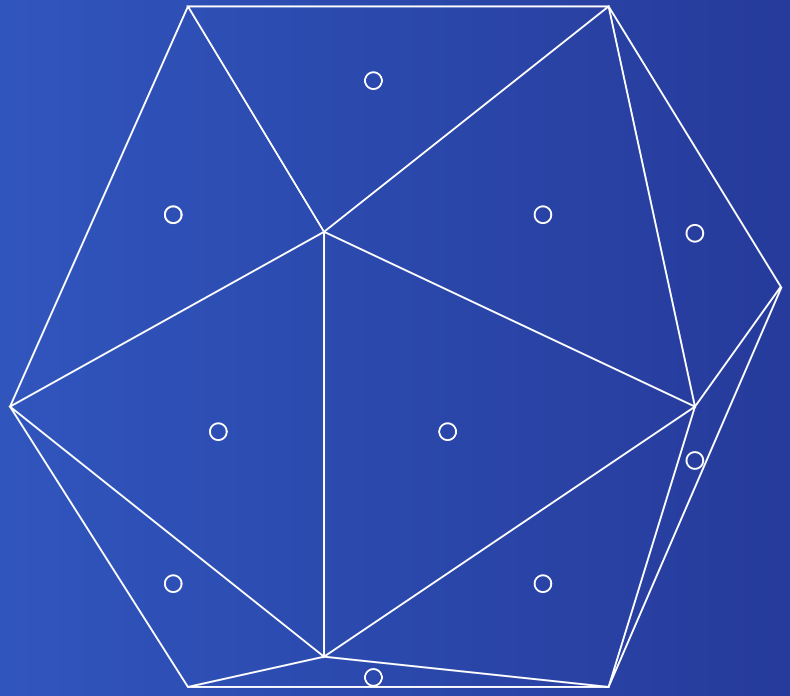
各面の中心をとる



3次元の正多面体(5)

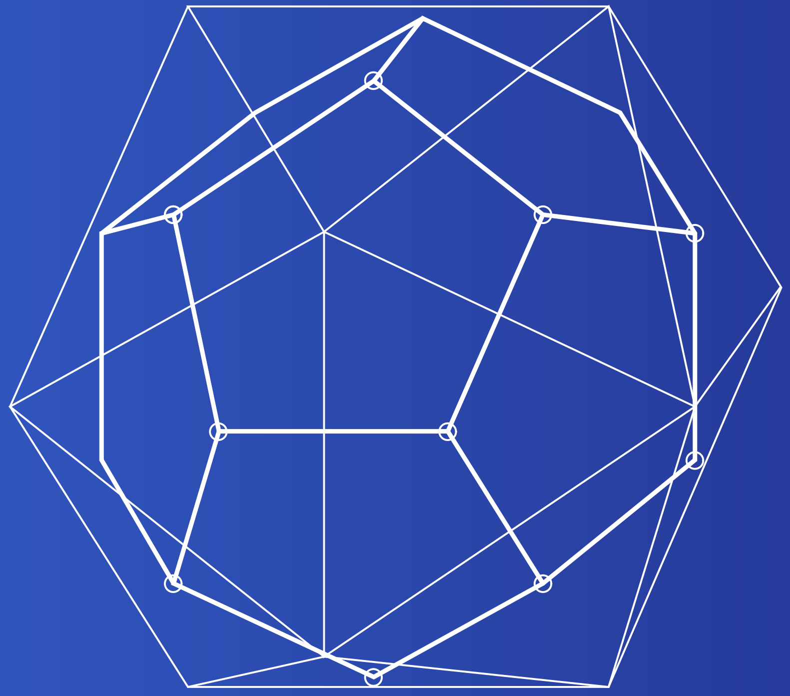
正 20 面体

各面の中心をとる
凸包をとる



3次元の正多面体(5)

正 20 面体



各面の中心をとる
凸包をとる

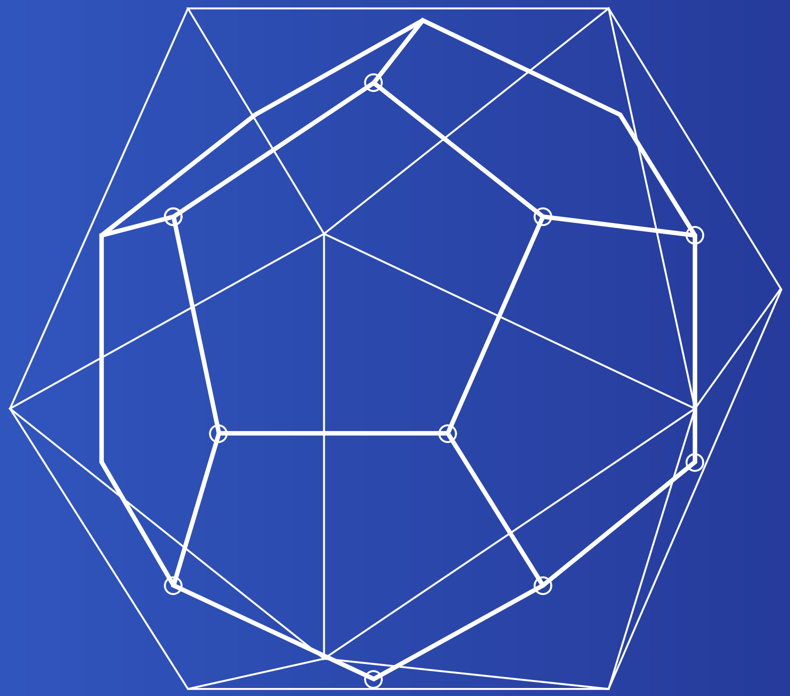
正 12 面体

3 次元の正多面体 (5)

正 20 面体

各面の中心をとる

凸包をとる



正 12 面体

頂点 $(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3})$

$(0, \pm\tau, \pm\sigma)$

$(\pm\sigma, 0, \pm\tau)$

$(\pm\tau, \pm\sigma, 0)$

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{6}$

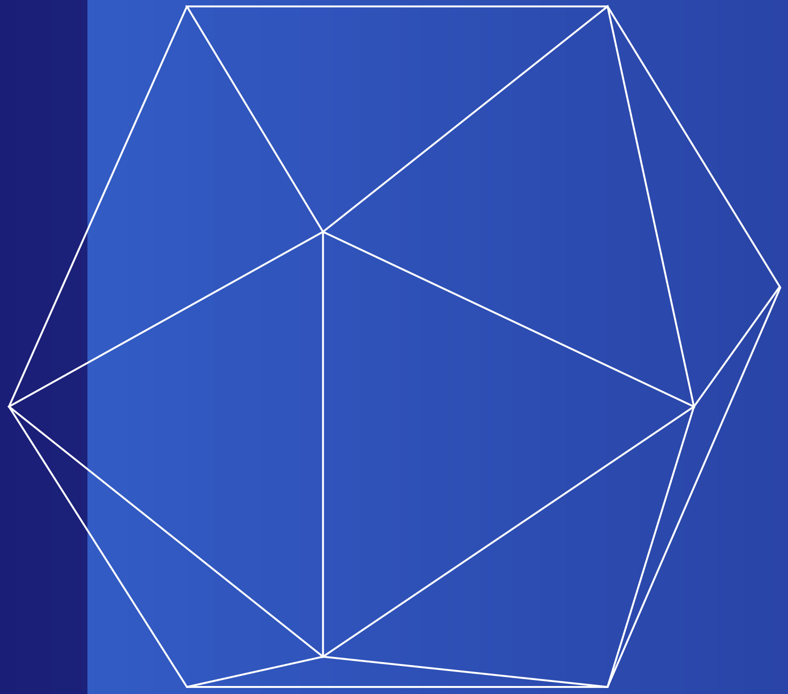
$\sigma = \frac{-1+\sqrt{5}}{6}$

3 次元の正多面体 (6)

正 20 面体 P(原点中心)

3 次元の正多面体 (6)

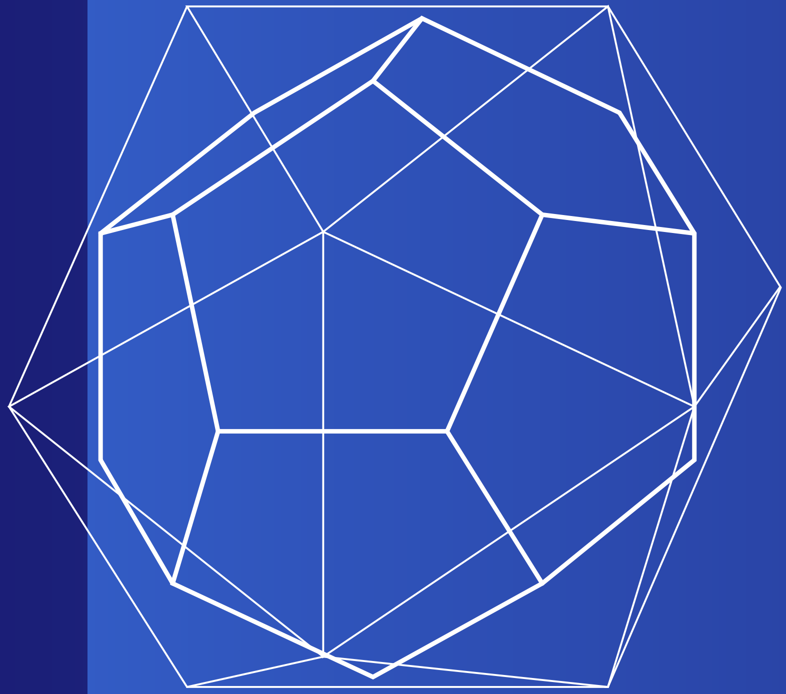
正 20 面体 P(原点中心)



3 次元の正多面体 (6)

正 20 面体 P(原点中心)

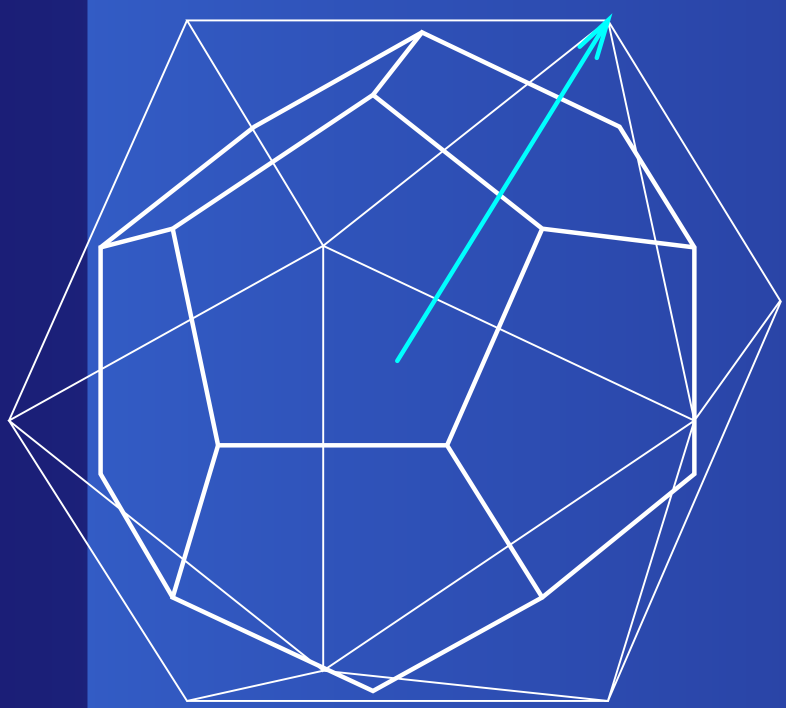
内接正 12 面体 Q



3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)　v : P の頂点

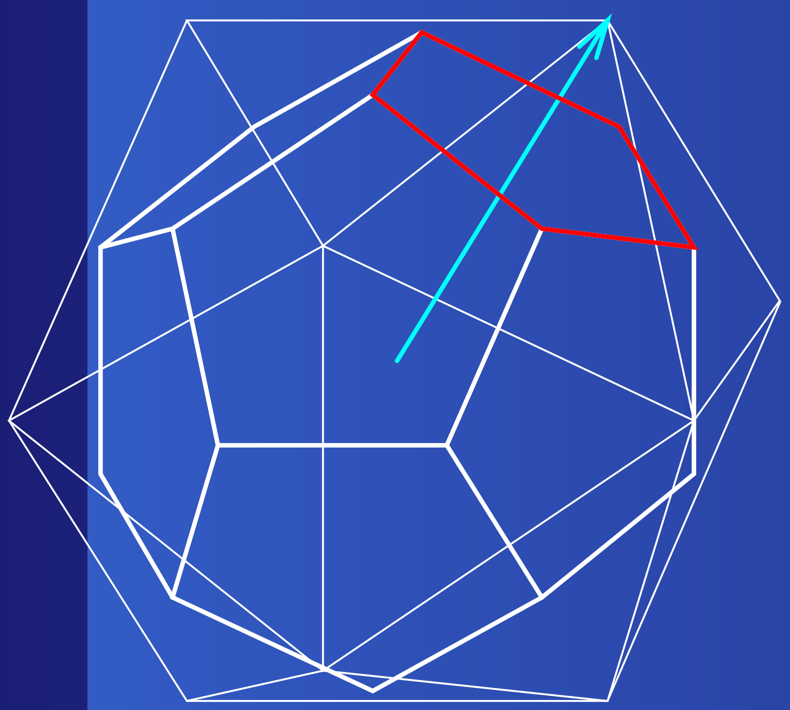
内接正12面体 Q



3次元の正多面体 (6)

正 20 面体 P(原点中心)　v : P の頂点

　内接正 12 面体 Q　　　v は Q の面に直交

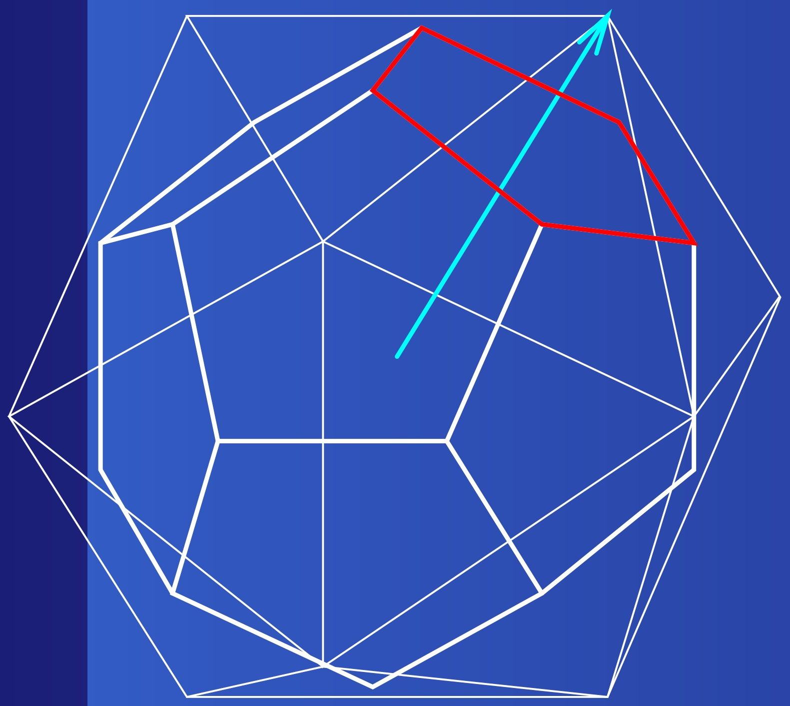


3 次元の正多面体 (6)

正 20 面体 P(原点中心)　v : P の頂点

内接正 12 面体 Q　v は Q の面に直交

$$\{y : \langle v, y\rangle = \ell\}$$

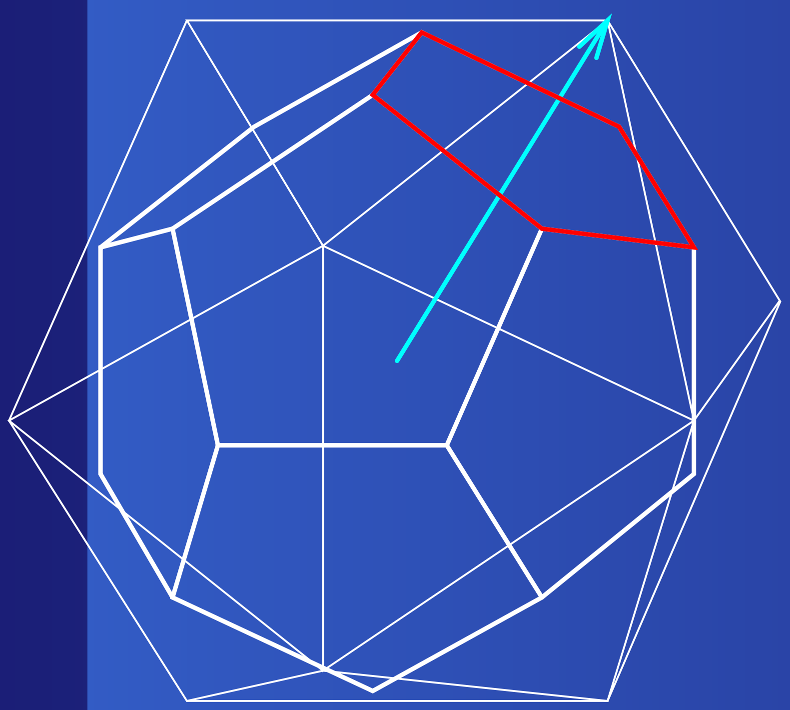


3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)　v : P の頂点

　内接正12面体 Q　　　v は Q の面に直交

$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y \rangle \le \ell\}$$



3 次元の正多面体 (6)

正 20 面体 P(原点中心)

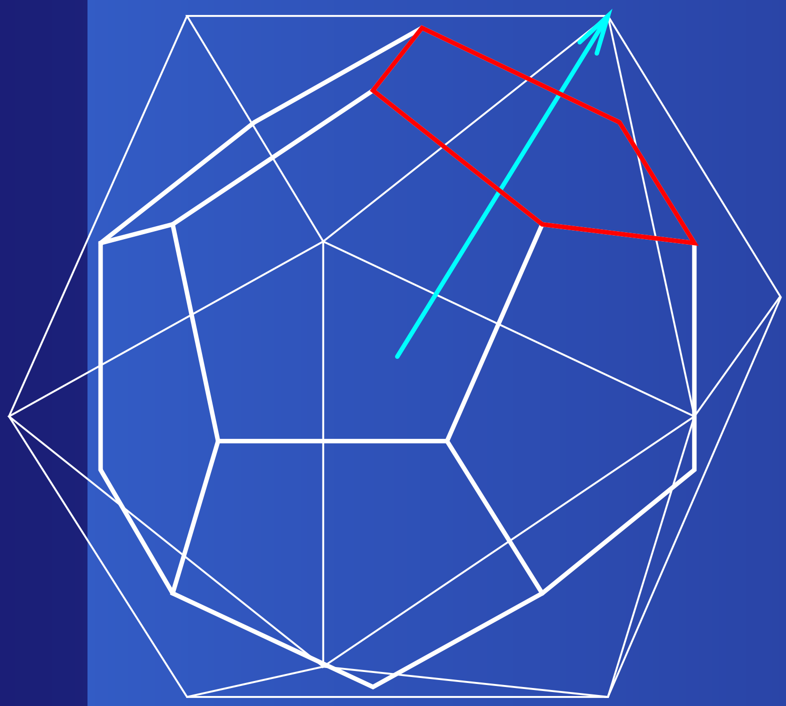
内接正 12 面体 Q

v : P の頂点

v は Q の面に直交

$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y \rangle \leq \ell\}$$

$$\{y : \langle x, y \rangle \leq \ell, \ \forall x \in P\}$$



3 次元の正多面体 (6)

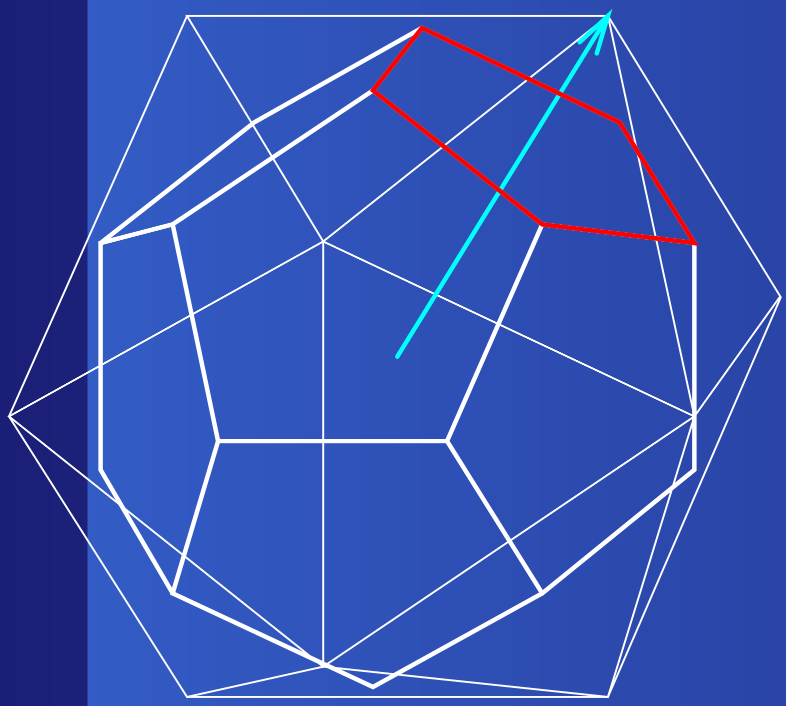
正 20 面体 P(原点中心)

内接正 12 面体 Q

v : P の頂点

v は Q の面に直交

$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$\supset \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$



3 次元の正多面体 (6)

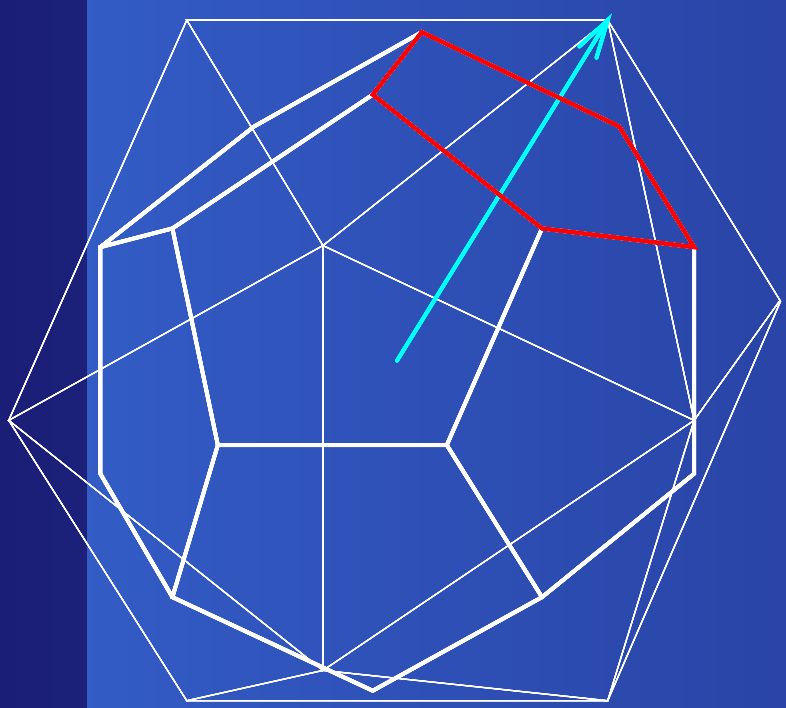
正 20 面体 P(原点中心)

内接正 12 面体 Q

v : P の頂点

v は Q の面に直交

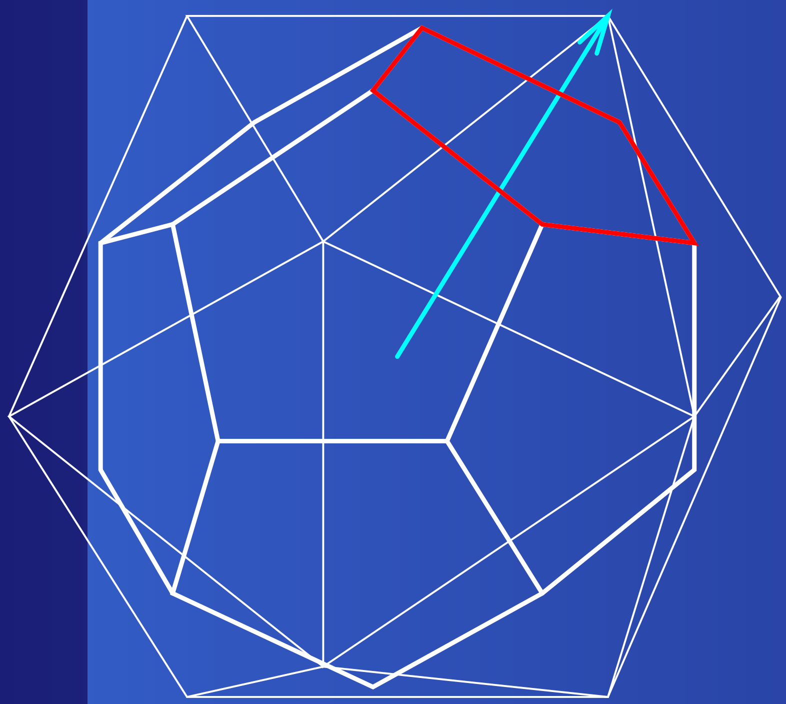
$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell, \ \forall x \in P\}$$



3次元の正多面体(6)

正 20 面体 P(原点中心)

内接正 12 面体 Q



v : P の頂点

v は Q の面に直交

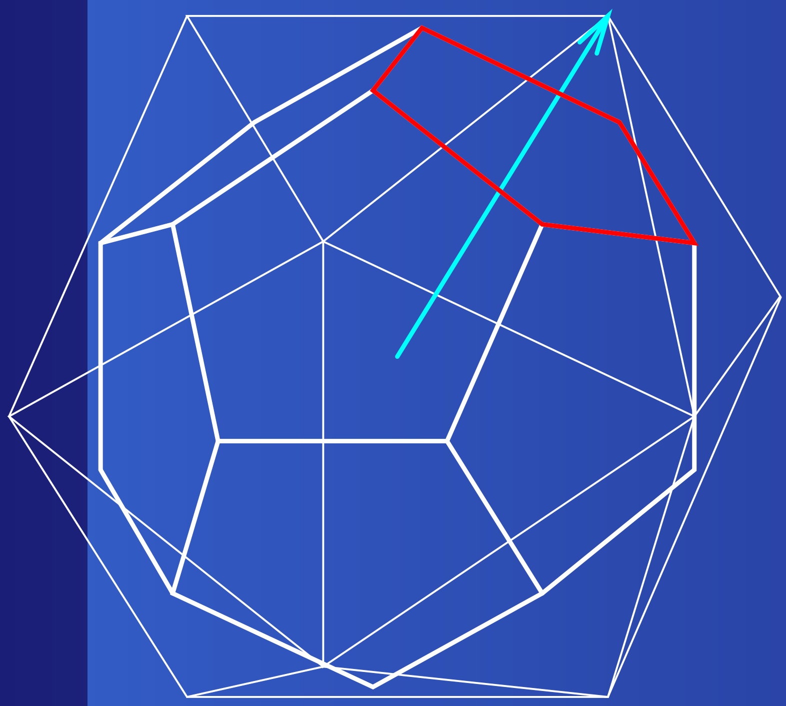
$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

証: $\forall x \in P$

3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)　$v : P$ の頂点

　内接正12面体 Q　　　v は Q の面に直交



$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

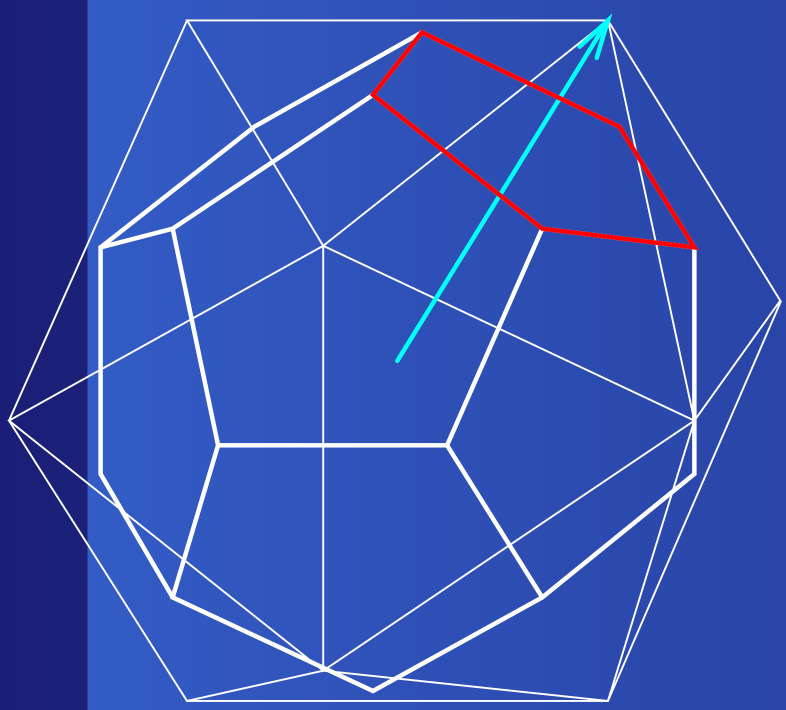
証: $\forall x \in P \quad x = \sum \lambda_v v$

$$\lambda_v \ge 0,\ \sum \lambda_v = 1$$

3次元の正多面体(6)

正 20 面体 P(原点中心) v : P の頂点

内接正 12 面体 Q v は Q の面に直交



$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y \rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y \rangle \le \ell, \ \forall x \in P\}$$

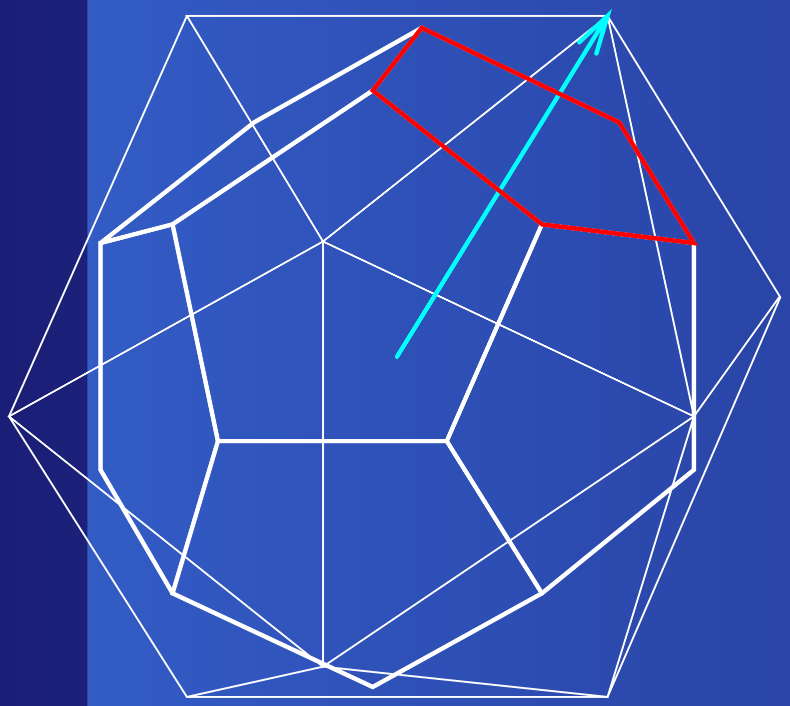
証: $\forall x \in P \quad x = \sum \lambda_v v$

$$\lambda_v \ge 0, \sum \lambda_v = 1$$
$$\langle x, y \rangle = \sum \lambda_v \langle v, y \rangle \le \ell$$

3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)

内接正12面体 Q



v : P の頂点

v は Q の面に直交

$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

証: $\forall x \in P \quad x = \sum \lambda_v v$

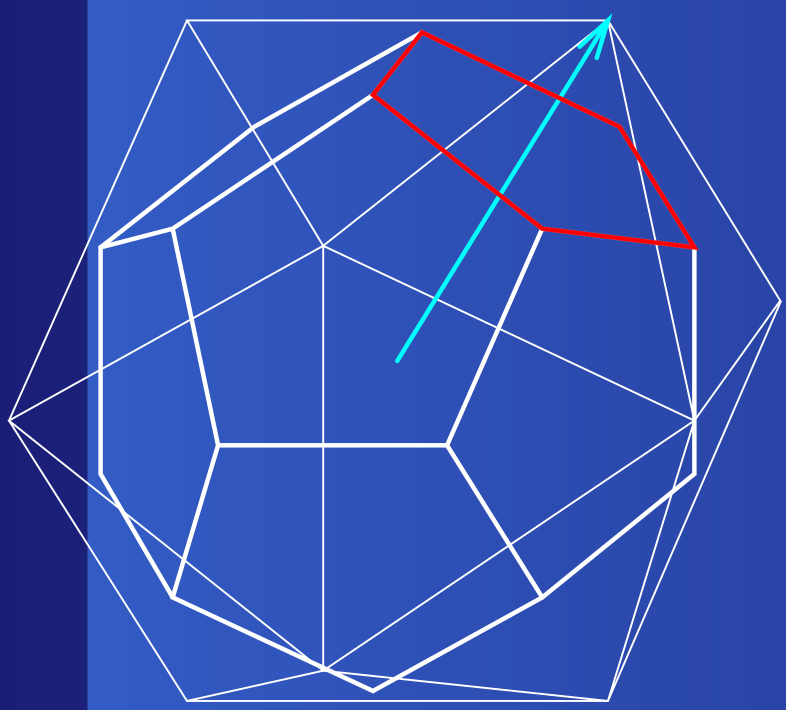
$$\lambda_v \ge 0,\ \sum \lambda_v = 1$$
$$\langle x, y\rangle = \sum \lambda_v \langle v, y\rangle \le \ell$$

Q の頂点 u は P の面に直交

3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)　v : P の頂点

　内接正12面体 Q　　v は Q の面に直交



$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$

$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

証: $\forall x \in P \quad x = \sum \lambda_v v$

$$\lambda_v \ge 0,\ \sum \lambda_v = 1$$

$$\langle x, y\rangle = \sum \lambda_v \langle v, y\rangle \le \ell$$

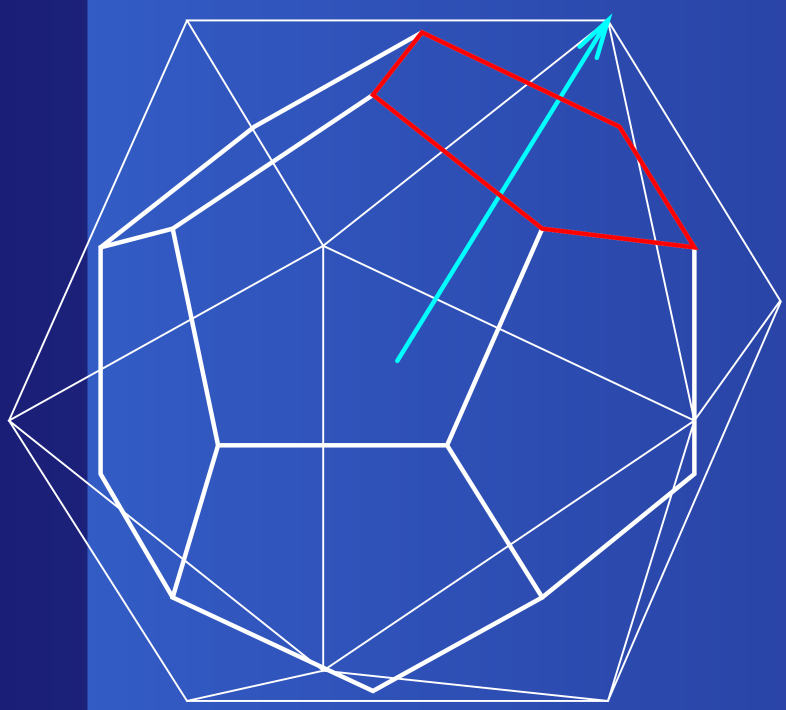
Q の頂点 u は P の面に直交

$$P = \bigcap_u \{x : \langle x, u\rangle \le \ell\}$$

3次元の正多面体(6)

正20面体 P(原点中心)　v : P の頂点

内接正12面体 Q　　v は Q の面に直交



$$Q = \bigcap_v \{y : \langle v, y\rangle \le \ell\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

証: $\forall x \in P$　$x = \sum \lambda_v v$

$$\lambda_v \ge 0,\ \sum \lambda_v = 1$$
$$\langle x, y\rangle = \sum \lambda_v \langle v, y\rangle \le \ell$$

Q の頂点 u は P の面に直交

$$P = \bigcap_u \{x : \langle x, u\rangle \le \ell\}$$
$$= \{x : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall y \in Q\}$$

3次元の正多面体のまとめ

面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12

3次元の正多面体のまとめ

面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12

正12面体と正20面体は互いに双対

3 次元の正多面体のまとめ

面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12

正 12 面体と正 20 面体は互いに双対
正 6 面体と正 8 面体は互いに双対

3次元の正多面体のまとめ

面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12

正12面体と正20面体は互いに双対
正6面体と正8面体は互いに双対

正4面体は自己双対的

Euler の公式

Euler の公式

球面と位相同型な多面体について

$$\text{頂点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数} = 2$$

がなりたつ。

Euler の公式

球面と位相同型な多面体について

$$\text{頂点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数} = 2$$

がなりたつ。

これを用いて正多面体は前述の 5 つしかない事を示すことができる。

3次元の正多面体の可能性 (1)

3次元の正多面体の可能性 (1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。

3次元の正多面体の可能性 (1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。
k 本集まっているとしよう。

3次元の正多面体の可能性 (1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。
k 本集まっているとしよう。
各面が正 n 角形で、面の個数を f とすると

3次元の正多面体の可能性 (1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。
k 本集まっているとしよう。
各面が正 n 角形で、面の個数を f とすると

$$\text{頂点の数} = \frac{fn}{k}, \qquad \text{辺の数} = \frac{fn}{2}$$

3次元の正多面体の可能性 (1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。
k 本集まっているとしよう。
各面が正 n 角形で、面の個数を f とすると

$$\text{頂点の数} = \frac{fn}{k}, \qquad \text{辺の数} = \frac{fn}{2}$$

Euler の公式より

3次元の正多面体の可能性(1)

正多面体では
各頂点に集まる辺の数はすべて等しい。
k 本集まっているとしよう。
各面が正 n 角形で、面の個数を f とすると

$$\text{頂点の数} = \frac{fn}{k}, \qquad \text{辺の数} = \frac{fn}{2}$$

Euler の公式より

$$\frac{fn}{k} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

3次元の正多面体の可能性 (2)

3次元の正多面体の可能性 (2)

$k \leq 2$ はありえない。

3次元の正多面体の可能性 (2)

$k \leq 2$ はありえない。
$k = 3$ としてみる。

3 次元の正多面体の可能性 (2)

$k \leq 2$ はありえない。
$k = 3$ としてみる。

$$\frac{fn}{3} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

3 次元の正多面体の可能性 (2)

$k \leq 2$ はありえない。
$k = 3$ としてみる。

$$\frac{fn}{3} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(6-n) = 12$$

3次元の正多面体の可能性(2)

$k \leq 2$ はありえない。
$k = 3$ としてみる。

$$\frac{fn}{3} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(6-n) = 12 = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3$$

これより

$$(f, n) = (12, 5), (6, 4), (4, 3)$$

3次元の正多面体の可能性 (3)

3次元の正多面体の可能性 (3)

$k = 4$ としてみる。

3次元の正多面体の可能性 (3)

$k = 4$ としてみる。

$$\frac{fn}{4} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

3 次元の正多面体の可能性 (3)

$k = 4$ としてみる。

$$\frac{fn}{4} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(4 - n) = 8$$

3次元の正多面体の可能性 (3)

$k = 4$としてみる。

$$\frac{fn}{4} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(4 - n) = 8 = 8 \cdot 1 (= 4 \cdot 2)$$

3次元の正多面体の可能性(3)

$k = 4$としてみる。

$$\frac{fn}{4} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(4-n) = 8 = 8 \cdot 1 (= 4 \cdot 2)$$

これより

$$(f, n) = (8, 3)$$

3 次元の正多面体の可能性 (4)

3次元の正多面体の可能性 (4)

$k = 5$としてみる。

3次元の正多面体の可能性(4)

$k = 5$としてみる。

$$\frac{fn}{5} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

3次元の正多面体の可能性(4)

$k = 5$としてみる。

$$\frac{fn}{5} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(10 - 3n) = 20$$

3次元の正多面体の可能性(4)

$k=5$としてみる。

$$\frac{fn}{5}-\frac{fn}{2}+f=2$$

整理すると

$$f(10-3n)=20=20\cdot 1(=10\cdot 2)$$

3次元の正多面体の可能性(4)

$k = 5$としてみる。

$$\frac{fn}{5} - \frac{fn}{2} + f = 2$$

整理すると

$$f(10 - 3n) = 20 = 20 \cdot 1 (= 10 \cdot 2)$$

これより

$$(f, n) = (20, 3)$$

3次元の正多面体の可能性 (5)

3 次元の正多面体の可能性 (5)

$k \geq 6$ としてみる。

3次元の正多面体の可能性(5)

$k \geq 6$ としてみる。

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{fn}{k} - \frac{fn}{2} + n \\
&\leq \frac{fn}{6} - \frac{fn}{2} + n \\
&= \frac{f}{3}(3 - n) \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

3次元の正多面体の可能性 (5)

$k \geq 6$ としてみる。

$$\begin{aligned} 2 =& \frac{fn}{k} - \frac{fn}{2} + n \\ \leq& \frac{fn}{6} - \frac{fn}{2} + n \\ =& \frac{f}{3}(3-n) \\ \leq& 0 \end{aligned}$$

これは矛盾

3次元の正多面体の頂点図形

3次元の正多面体の頂点図形

P: 原点中心の正多面体

3 次元の正多面体の頂点図形

P: 原点中心の正多面体
v: P の頂点を固定

3次元の正多面体の頂点図形

P: 原点中心の正多面体
v: P の頂点を固定
v での**頂点図形**: v と辺で結ばれる頂点全部の凸包

3 次元の正多面体の頂点図形

P: 原点中心の正多面体
v: P の頂点を固定
v での**頂点図形**: v と辺で結ばれる頂点全部の凸包

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
面	正 3 角形	正 4 角形	正 3 角形	正 5 角形	正 3 角形
頂点図形	正 3 角形	正 3 角形	正 4 角形	正 3 角形	正 5 角形

3次元の正多面体の回転

3 次元の正多面体の回転

正多面体 P の面の形が正 p 角形、
頂点図形の形が正 q 角形であるとする。

3次元の正多面体の回転

正多面体 P の面の形が正 p 角形、
頂点図形の形が正 q 角形であるとする。

回転で P を保つもの

3 次元の正多面体の回転

正多面体 P の面の形が正 p 角形、
頂点図形の形が正 q 角形であるとする。

回転で P を保つもの
頂点を通る軸を中心に $2\pi/q$ の整数倍回転

3次元の正多面体の回転

正多面体 P の面の形が正 p 角形、
頂点図形の形が正 q 角形であるとする。

回転で P を保つもの
頂点を通る軸を中心に $2\pi/q$ の整数倍回転
辺の中点を通る軸を中心に π 回転

3 次元の正多面体の回転

正多面体 P の面の形が正 p 角形、
頂点図形の形が正 q 角形であるとする。

回転で P を保つもの
頂点を通る軸を中心に $2\pi/q$ の整数倍回転
辺の中点を通る軸を中心に π 回転
面の中心を通る軸を中心に $2\pi/p$ の整数倍回転

正多面体群

正多面体群

正多面体を保つ回転のなす群を**正多面体群**と言う。

正多面体群

正多面体を保つ回転のなす群を**正多面体群**と言う。

正多面体群の元の個数

回転軸が通る点	正 4 面体群 T	正 8 面体群 O	正 20 面体群 I
頂点	8(位数 3 の元)	9(位数 4,2 の元)	24(位数 5 の元)
辺の中点	3(位数 2 の元)	6(位数 2 の元)	15(位数 2 の元)
面の中心	[8(位数 3 の元)]	8(位数 3 の元)	20(位数 3 の元)
恒等変換	1	1	1
群の位数	12	24	60

正多面体群

正多面体を保つ回転のなす群を**正多面体群**と言う。
正多面体群の元の個数

回転軸が通る点	正 4 面体群 T	正 8 面体群 O	正 20 面体群 I
頂点	8(位数 3 の元)	9(位数 4,2 の元)	24(位数 5 の元)
辺の中点	3(位数 2 の元)	6(位数 2 の元)	15(位数 2 の元)
面の中心	[8(位数 3 の元)]	8(位数 3 の元)	20(位数 3 の元)
恒等変換	1	1	1
群の位数	12	24	60

$T = A_4$ (4 次交代群)

正多面体群

正多面体を保つ回転のなす群を**正多面体群**と言う。

正多面体群の元の個数

回転軸が通る点	正 4 面体群 T	正 8 面体群 O	正 20 面体群 I
頂点	8(位数 3 の元)	9(位数 4,2 の元)	24(位数 5 の元)
辺の中点	3(位数 2 の元)	6(位数 2 の元)	15(位数 2 の元)
面の中心	[8(位数 3 の元)]	8(位数 3 の元)	20(位数 3 の元)
恒等変換	1	1	1
群の位数	12	24	60

$T = A_4$ (4 次交代群)

$O = S_4$ (4 次対称群)

正多面体群

正多面体を保つ回転のなす群を**正多面体群**と言う。
正多面体群の元の個数

回転軸が通る点	正 4 面体群 T	正 8 面体群 O	正 20 面体群 I
頂点	8(位数 3 の元)	9(位数 4,2 の元)	24(位数 5 の元)
辺の中点	3(位数 2 の元)	6(位数 2 の元)	15(位数 2 の元)
面の中心	[8(位数 3 の元)]	8(位数 3 の元)	20(位数 3 の元)
恒等変換	1	1	1
群の位数	12	24	60

$T = A_4$ (4 次交代群)

$O = S_4$ (4 次対称群)

$I = A_5$ (5 次交代群)

多胞体

多胞体

多胞体とは高次元の正多面体

多胞体

多胞体とは高次元の正多面体

$\mathbf{R}^n$ の有限集合 M の凸包

多胞体

多胞体とは高次元の正多面体
$\mathbf{R}^n$ の有限集合 M の凸包

$$P = \mathrm{ch}\, M = \{ \sum_{m \in M} \lambda_m m : \lambda_m \geq 0, \ \sum_m \lambda_m = 1 \}$$

多胞体

多胞体とは高次元の正多面体
$\mathbf{R}^n$ の有限集合 M の凸包

$$P = \mathrm{ch}\, M = \{ \sum_{m \in M} \lambda_m m : \lambda_m \geq 0,\ \sum_m \lambda_m = 1\}$$

$a_i \in \mathbf{R}^n$ をうまくとって、次のように表すこともできる。

$$P = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq \ell,\ i = 1, \ldots, k\}$$

多胞体の次元

多胞体の次元

$v_1, \ldots, v_d$:1 次独立なベクトル

多胞体の次元

$v_1, \ldots, v_d$:1 次独立なベクトル
$a \in \mathbf{R}^n$

多胞体の次元

v_1,. . . ,v_d :1 次独立なベクトル
$a \in \mathbf{R}^n$
d 次元アファイン空間:

$$\{a + b_1 v_1 + \cdots + b_d v_d : b_1, \ldots, b_d \in \mathbf{R}\}$$

多胞体の次元

$v_1,\ldots,v_d$:1 次独立なベクトル
$a \in \mathbf{R}^n$
d 次元アファイン空間:

$$\{a + b_1 v_1 + \cdots + b_d v_d : b_1, \ldots, b_d \in \mathbf{R}\}$$

多胞体 P が d 次元 $\Longleftrightarrow$
P を含む最小のアファイン空間が d 次元

多胞体の次元

v_1,...,v_d :1 次独立なベクトル
$a \in \mathbf{R}^n$
d 次元アファイン空間:

$$\{a + b_1 v_1 + \cdots + b_d v_d : b_1, \ldots, b_d \in \mathbf{R}\}$$

多胞体 P が d 次元 $\Longleftrightarrow$
P を含む最小のアファイン空間が d 次元

0 次元多胞体は点、1 次元多胞体は線分、2 次元多胞体は多角形、3 次元多胞体は多面体である。

超球面

超球面

$a \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 r の超球面:

$$S_r^{n-1}(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \\ (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2\}$$

超球面

$a \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 r の超球面:

$$S_r^{n-1}(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \\ (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2\}$$

原点 O 中心の半径 1 の超球面を S^{n-1} と書く。

超球面

$a \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 r の超球面:

$$S_r^{n-1}(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \\ (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = r^2\}$$

原点 O 中心の半径 1 の超球面を S^{n-1} と書く。

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

正多胞体

正多胞体

n 次元多胞体が**正多胞体**$\Longleftrightarrow$

- 頂点がすべてある超球面に属している。
- 辺 (1 次元面) の長さがすべて等しい。
- 2 次元面がすべて合同な正多角形。
- すべての頂点図形が $d-1$ 次元の合同な正多胞体。

正多胞体

n 次元多胞体が**正多胞体**$\Longleftrightarrow$

- 頂点がすべてある超球面に属している。
- 辺 (1 次元面) の長さがすべて等しい。
- 2 次元面がすべて合同な正多角形。
- すべての頂点図形が $d-1$ 次元の合同な正多胞体。

多胞体の頂点図形とは、多胞体を頂点の近くの超平面で切って得られる切断面

頂点図形

頂点図形

頂点がすべて S^{n-1} 内にある多胞体 P と
その１つの頂点 v を固定する。

頂点図形

頂点がすべて S^{n-1} 内にある多胞体 P と
その 1 つの頂点 v を固定する。
P の v での**頂点図形** Q は

$$Q = P \cap \{x \in \mathbf{R}^n : \langle v, x \rangle = 1 - \varepsilon\}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$

頂点図形

頂点がすべて S^{n-1} 内にある多胞体 P と
その 1 つの頂点 v を固定する。
P の v での**頂点図形** Q は

$$Q = P \cap \{x \in \mathbf{R}^n : \langle v, x\rangle = 1 - \varepsilon\}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$

$$\lambda = \max\{\langle v, v'\rangle : v' \text{は } P \text{ の } v \text{ 以外の頂点}\}$$

とおくと、$\lambda \leq 1 - \varepsilon$ なら OK

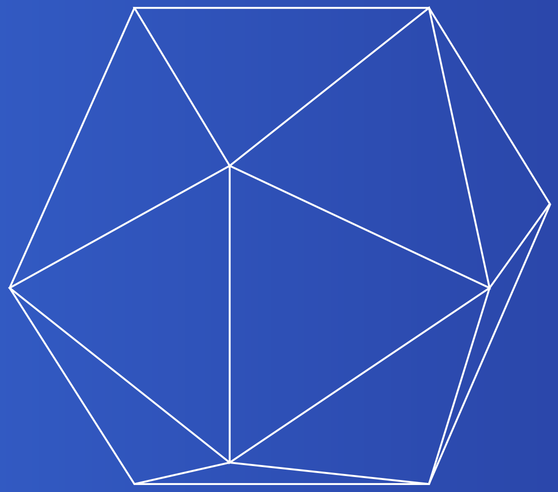
正多胞体の双対

正多胞体の双対

原点を中心とする正多胞体 P

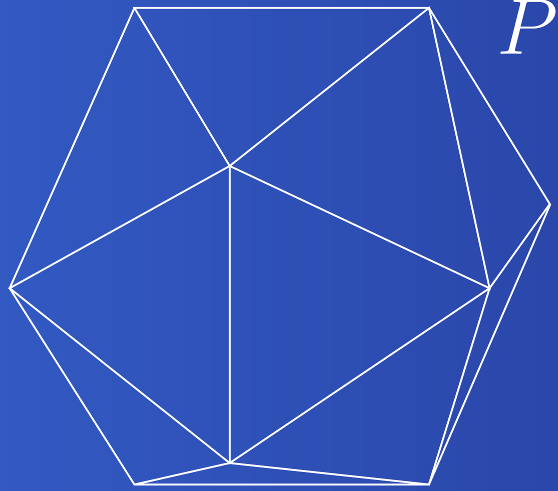
正多胞体の双対

原点を中心とする正多胞体 P



正多胞体の双対

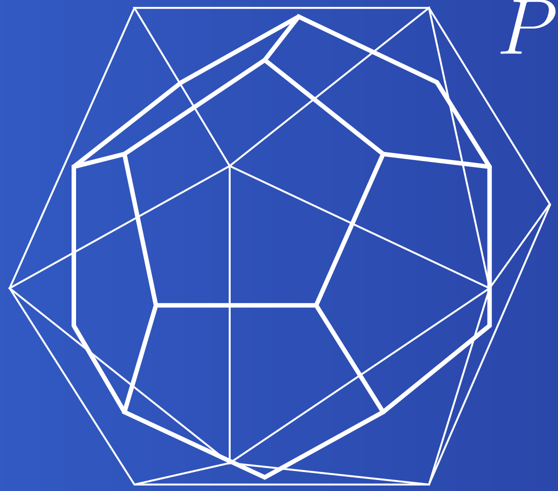
原点を中心とする正多胞体 P



$$P^* = \{y : \langle v, y\rangle \leq \ell,\ v \text{ は } P \text{ の頂点}\}$$

正多胞体の双対

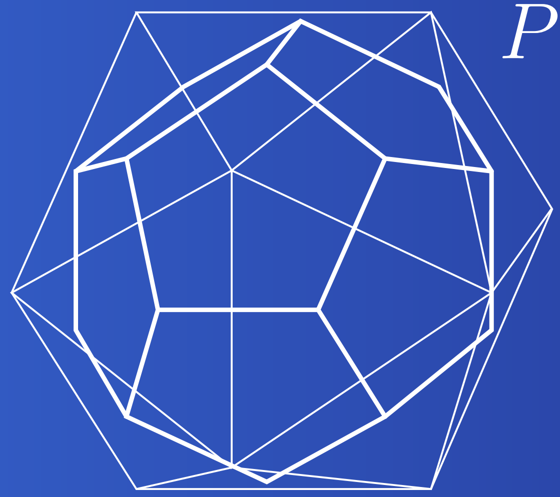
原点を中心とする正多胞体 P



$$P^* = \{y : \langle v, y\rangle \leq \ell,\ v \text{ は } P \text{ の頂点}\}$$

正多胞体の双対

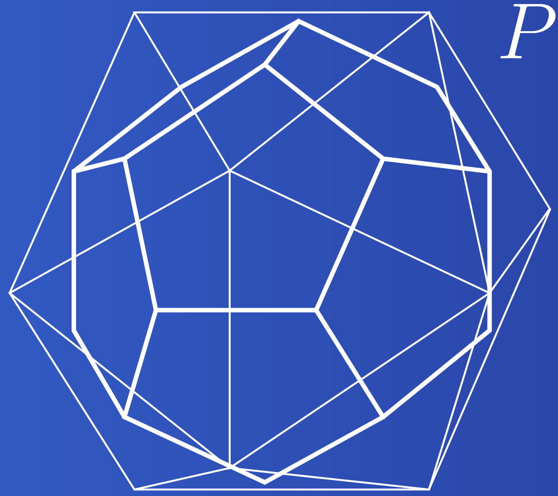
原点を中心とする正多胞体 P



$$P^* = \{y : \langle v, y\rangle \le \ell,\ v \text{ は } P \text{ の頂点}\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

正多胞体の双対

原点を中心とする正多胞体 P



$$P^* = \{y : \langle v, y\rangle \le \ell,\ v \text{ は } P \text{ の頂点}\}$$
$$= \{y : \langle x, y\rangle \le \ell,\ \forall x \in P\}$$

P^* を P の**双対**多胞体という。

標準正多胞体

標準正多胞体

正単体: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$,. . . $(0, \ldots, 0, 1)$ の凸包

標準正多胞体

正単体: $(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)$ の凸包
正軸体: $(\pm 1,0,\ldots,0), (0,\pm 1,0,\ldots,0),\ldots,$ $(0,\ldots,0,\pm 1)$ の凸包

標準正多胞体

正単体: $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$,... $(0,\dots,0,1)$ の凸包

正軸体: $(\pm1,0,\dots,0)$, $(0,\pm1,0,\dots,0)$, . . . , $(0,\dots,0,\pm1)$ の凸包

超立方体: $(\pm1,\pm1,\dots,\pm1)$ の凸包

$$[-1,1]^d$$

標準正多胞体

正単体: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$,$\ldots$ $(0, \ldots, 0, 1)$ の凸包

正軸体: $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, \pm 1)$ の凸包

超立方体: $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ の凸包

$$[-1, 1]^d$$

正軸体と超立方体は互いに双対

標準正多胞体

正単体: $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$,$\ldots$ $(0,\ldots,0,1)$ の凸包

正軸体: $(\pm1,0,\ldots,0)$, $(0,\pm1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,\ldots,0,\pm1)$ の凸包

超立方体: $(\pm1,\pm1,\ldots,\pm1)$ の凸包

$$[-1,1]^d$$

正軸体と超立方体は互いに双対

正単体と自己双対

正多胞体の **Schläfli** の記号

正多胞体の Schläfli の記号

2 次元: 正 p 角形の Schläfli の記号は $\{p\}$

正多胞体の **Schläfli** の記号

2 次元: 正 p 角形の Schläfli の記号は $\{p\}$

3 次元: 各面が正 p 角形で
頂点図形が正 q 角形のとき、
Schläfli の記号は $\{p, q\}$

正多胞体の **Schläfli** の記号

2 次元: 正 p 角形の Schläfli の記号は $\{p\}$

3 次元: 各面が正 p 角形で
頂点図形が正 q 角形のとき、
Schläfli の記号は $\{p, q\}$

d 次元: 各 2 次元面が正 p 角形で
頂点図形が $\{q_2, \ldots, q_{d-1}\}$ のとき、
Schläfli の記号は $\{p, q_2, \ldots, q_{d-1}\}$

Schläfli の記号の性質

Schläfli の記号の性質

- $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ の k 次元面は $\{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$
- $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ の双対は $\{p_{d-1}, \ldots, p_1\}$

Schläfli の記号の性質

- $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ の k 次元面は $\{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$
- $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ の双対は $\{p_{d-1}, \ldots, p_1\}$

正多胞体の特性比

正多胞体の特性比

正多胞体 P の**特性比** $s(P)$ を次で定める。

$$s(P) = \frac{\ell}{2r}$$

但し ℓ は一辺の長さで、
r は中心から頂点までの距離

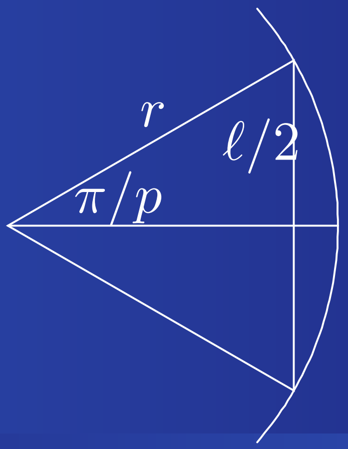
正多胞体の特性比

正多胞体 P の**特性比** $s(P)$ を次で定める。

$$s(P) = \frac{\ell}{2r}$$

但し ℓ は一辺の長さで、
r は中心から頂点までの距離
例: 正 p 角形 P

$$s(P) = \frac{\ell}{2r} = \sin\frac{\pi}{p}$$



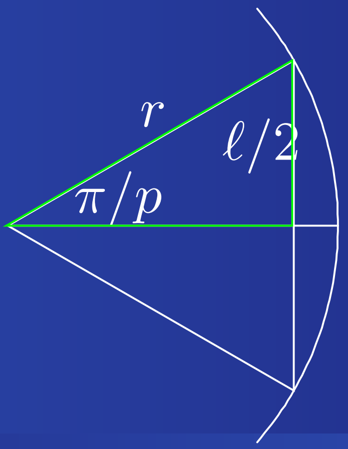
正多胞体の特性比

正多胞体 P の**特性比** $s(P)$ を次で定める。

$$s(P) = \frac{\ell}{2r}$$

但し ℓ は一辺の長さで、
r は中心から頂点までの距離
例: 正 p 角形 P

$$s(P) = \frac{\ell}{2r} = \sin\frac{\pi}{p}$$



特性比に関する補題

特性比に関する補題

2 次元面が正 p 角形で、頂点図形が Q ならば

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{p}}{s(Q)} \right)^2$$

特性比に関する補題

2 次元面が正 p 角形で、頂点図形が Q ならば

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{p}}{s(Q)} \right)^2$$

特に、

$$\cos \frac{\pi}{p} < s(Q)$$

特性比に関する補題

2 次元面が正 p 角形で、頂点図形が Q ならば

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{p}}{s(Q)} \right)^2$$

特に、

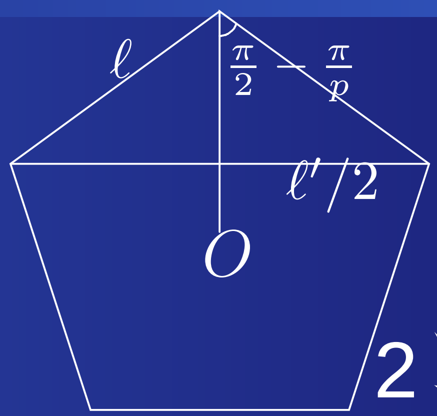
$$\cos \frac{\pi}{p} < s(Q)$$

$p \geq 3$ より左辺 $\geq \frac{1}{2}$.

特性比に関する補題の証明

特性比に関する補題の証明

ℓ' : Q の一辺の長さ

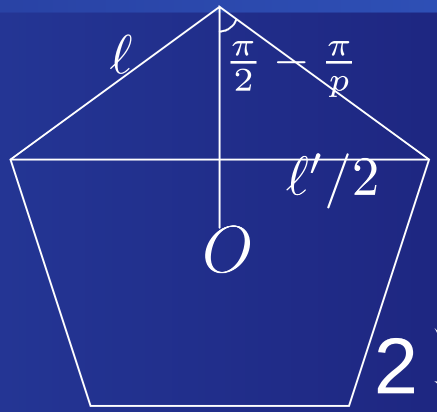


2 次元面
(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

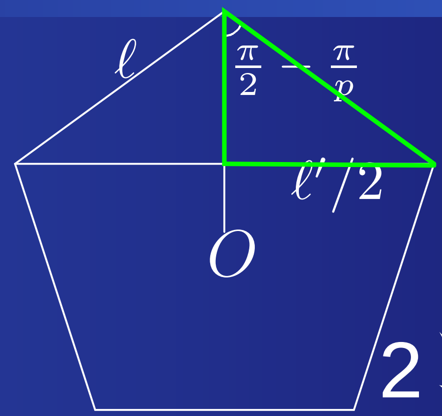


2 次元面
(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$



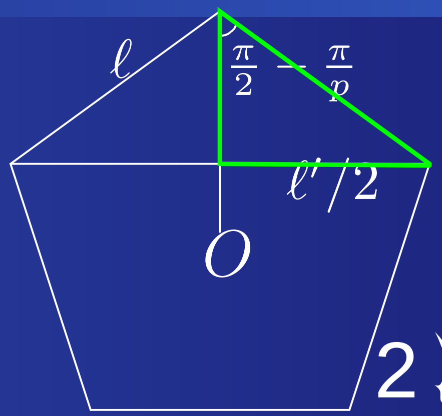
2 次元面
(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}$$



2 次元面

(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

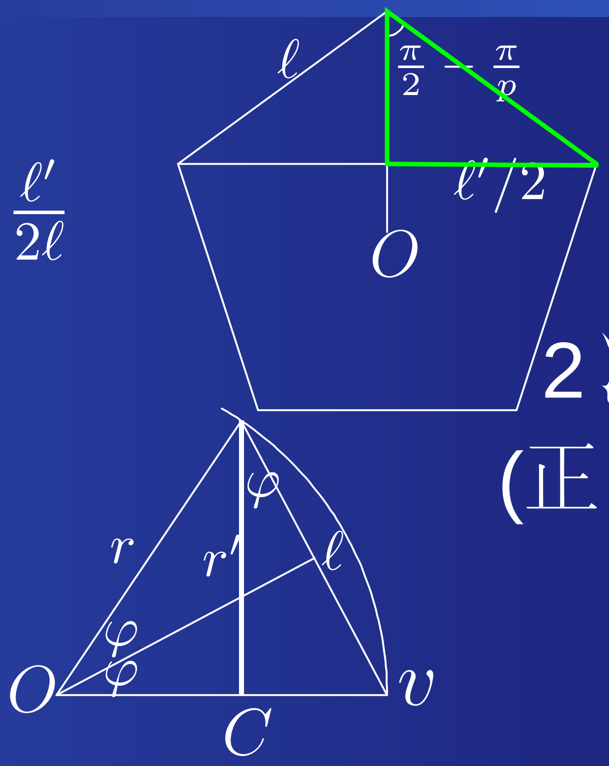
ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}$$

r': Q の中心と頂点の距離

$$\sin\varphi = \frac{\ell}{2r}$$



2 次元面
(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

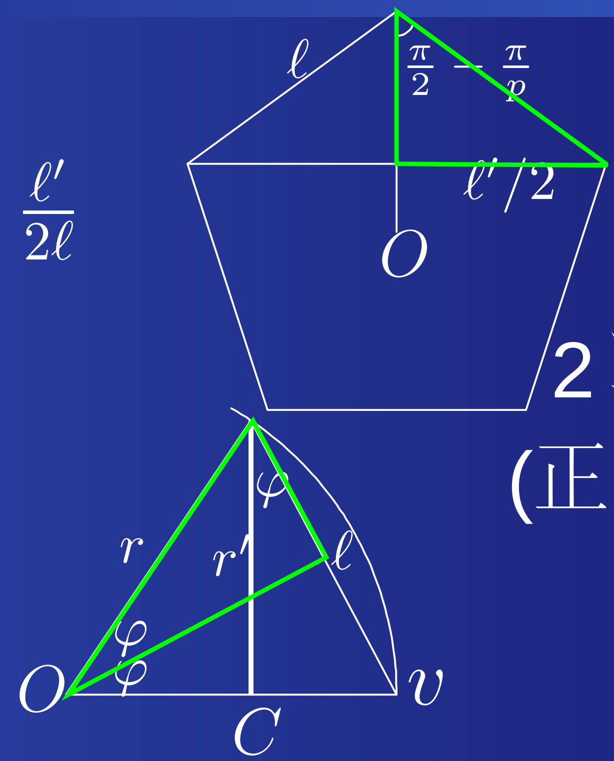
ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}$$

r': Q の中心と頂点の距離

$$\sin\varphi = \frac{\ell}{2r}$$



2 次元面

(正 p 角形)

特性比に関する補題の証明

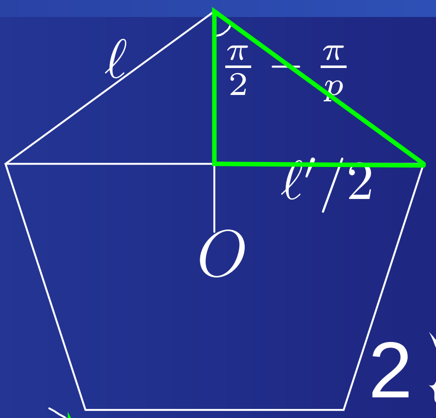
ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

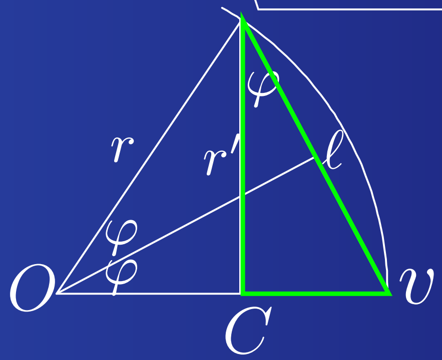
$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}$$

r': Q の中心と頂点の距離

$$\sin\varphi = \frac{\ell}{2r} \qquad \cos\varphi = \frac{r'}{\ell}$$



2 次元面
(正 p 角形)



特性比に関する補題の証明

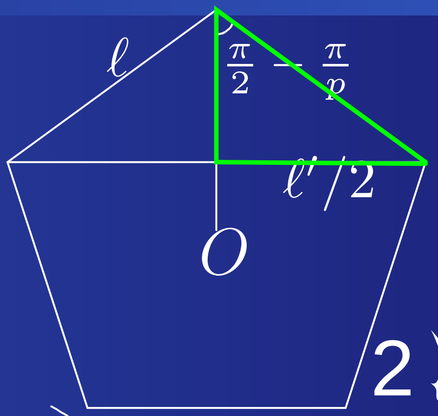
ℓ' : Q の一辺の長さ

$$\cos\frac{\pi}{p} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right) = \frac{\ell'/2}{\ell} = \frac{\ell'}{2\ell}$$

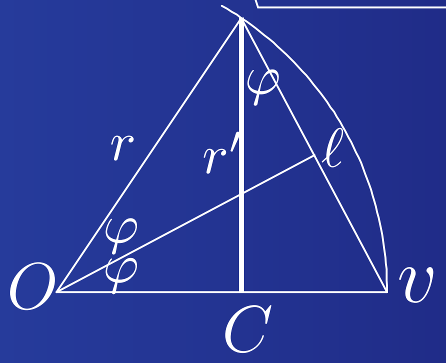
$$\frac{1}{\ell} = \frac{2}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}$$

r': Q の中心と頂点の距離

$$\sin\varphi = \frac{\ell}{2r} \qquad \cos\varphi = \frac{r'}{\ell}$$



2 次元面
(正 p 角形)



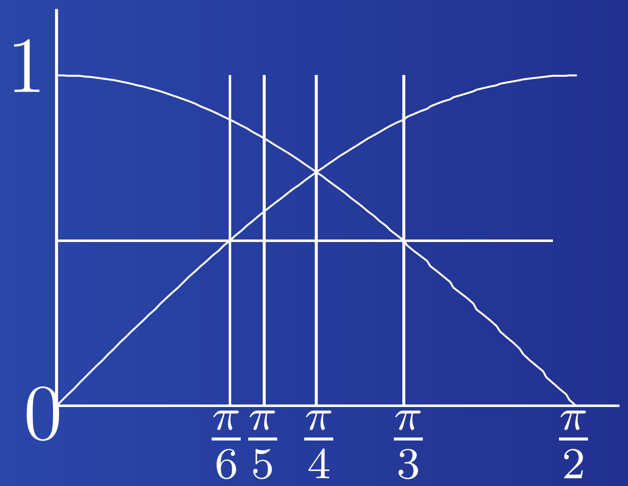
$$s(P)^2 = \left(\frac{\ell}{2r}\right)^2 = \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - \left(\frac{r'}{\ell}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{2r'}{\ell'}\cos\frac{\pi}{p}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\cos\frac{\pi}{p}}{s(Q)}\right)^2$$

3 次元正多胞体 $\{p, q\}$ の可能性

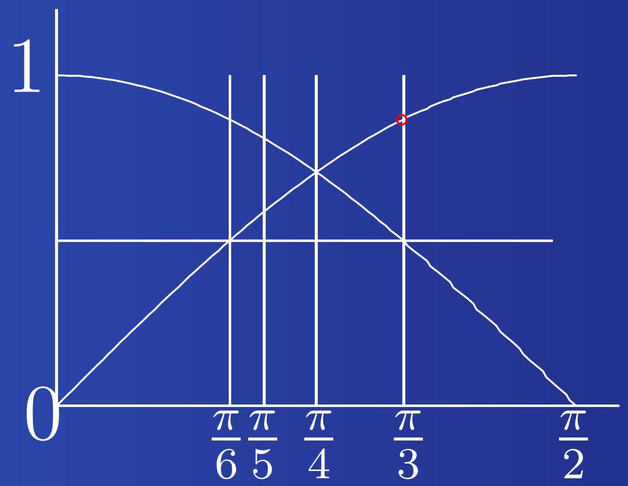
3次元正多胞体 $\{p, q\}$ の可能性

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}$$



3次元正多胞体 $\{p,q\}$ の可能性

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}$$

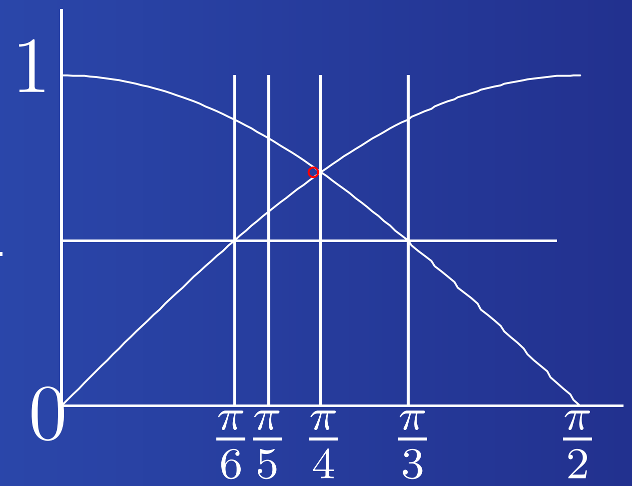


これを満たす $\{p,q\}$ は次の **5** つしかない。

P	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

3 次元正多胞体 $\{p,q\}$ の可能性

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}$$

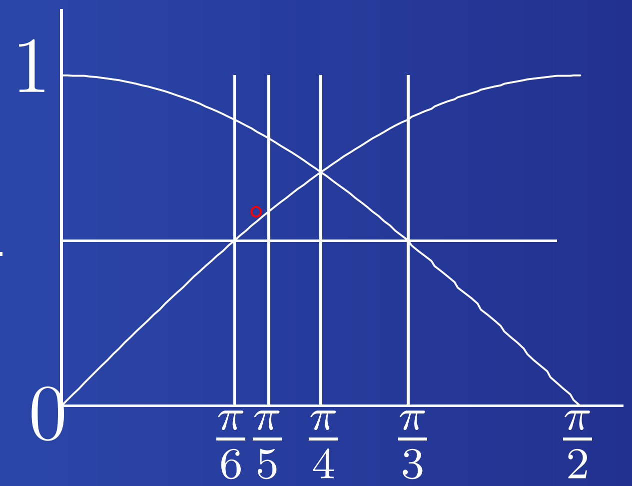


これを満たす $\{p,q\}$ は次の **5** つしかない。

P	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

3 次元正多胞体 $\{p,q\}$ の可能性

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}$$

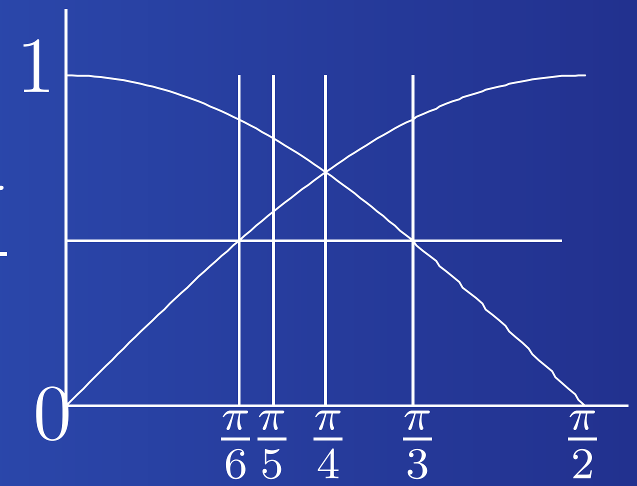


これを満たす $\{p,q\}$ は次の 5 つしかない。

P	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

3 次元正多胞体 $\{p,q\}$ の可能性

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}$$



これを満たす $\{p,q\}$ は次の 5 つしかない。

P	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

順に、正 4 面体, 正 8 面体, 正 6 面体, 正 20 面体, 正 12 面体

4次元正多胞体 $\{p, q, r\}$ の可能性

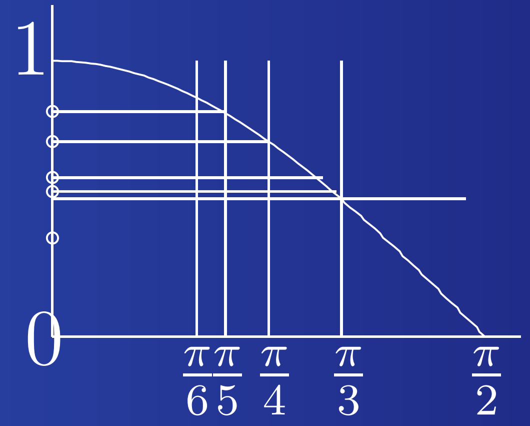
4次元正多胞体 $\{p,q,r\}$ の可能性

$\{q,r\}$ は前の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

4 次元正多胞体 $\{p, q, r\}$ の可能性

$\{q, r\}$ は前の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

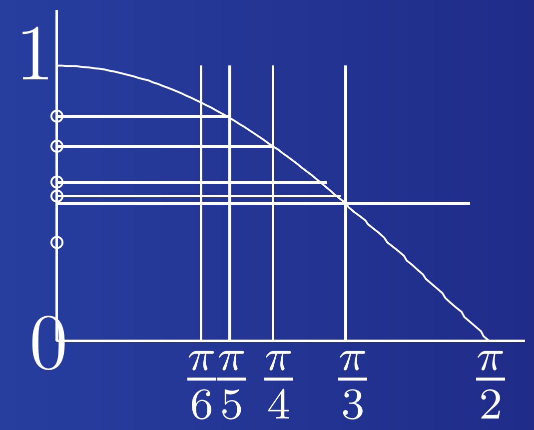
$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < s$$



4次元正多胞体 $\{p, q, r\}$ の可能性

$\{q, r\}$ は前の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < s$$



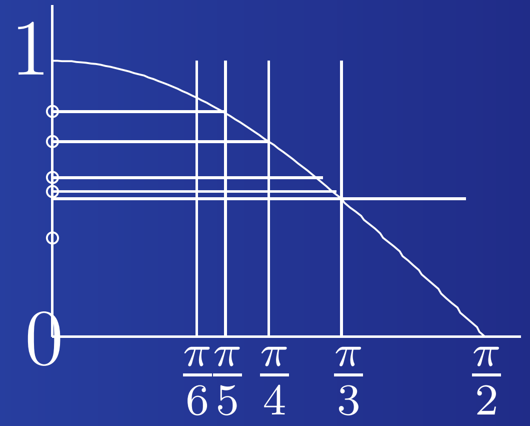
これを満たす $\{p, q, r\}$ は次の 6 つしかない。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$

$\mathbf{4}$ 次元正多胞体 $\{p, q, r\}$ の可能性

$\{q, r\}$ は前の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p} < s$$



これを満たす $\{p, q, r\}$ は次の 6 つしかない。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$

最初の 3 つは，正単体，正軸体，超立方体として実現される．

d次元正多胞体の可能性 $(d \geq 5)$

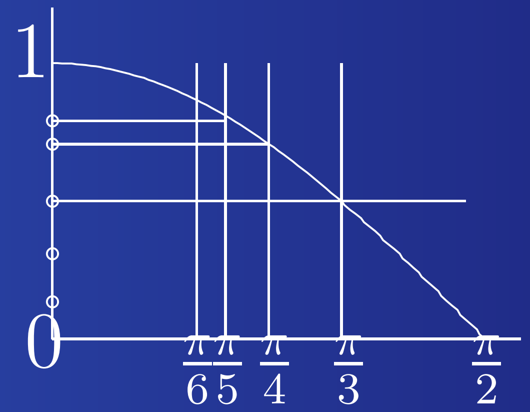
d 次元正多胞体の可能性 $(d \geq 5)$

d 次元正多胞体 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ を考える。
$\{p_2, \ldots, p_{d-1}\}$ は $d-1$ 次元の正多胞体の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

d 次元正多胞体の可能性 $(d \geq 5)$

d 次元正多胞体 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ を考える。
$\{p_2, \ldots, p_{d-1}\}$ は $d-1$ 次元の正多胞体の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

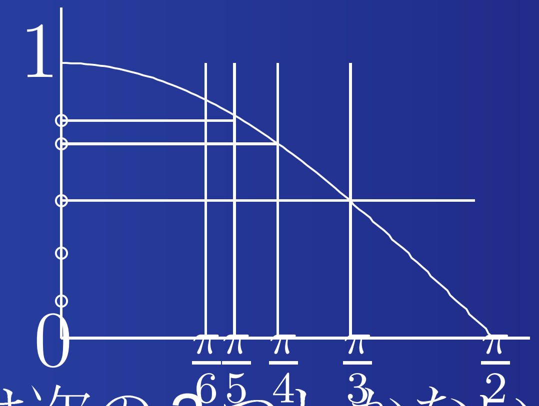
$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p_1} < s$$



d 次元正多胞体の可能性 $(d \geq 5)$

d 次元正多胞体 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ を考える。
$\{p_2, \ldots, p_{d-1}\}$ は $d-1$ 次元の正多胞体の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p_1} < s$$



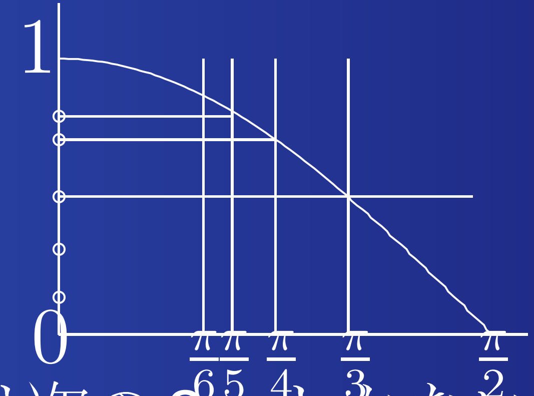
これを満たす $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ は次の 3 つしかない。

P	$\{3,3,\ldots,3\}$	$\{3,\ldots,3,4\}$	$\{4,3,\ldots,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{d+1}{2d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{d}$

d 次元正多胞体の可能性 $(d \geq 5)$

d 次元正多胞体 $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ を考える。
$\{p_2, \ldots, p_{d-1}\}$ は $d-1$ 次元の正多胞体の表に現れなければならず、その特性比を s とすると

$$\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\pi}{p_1} < s$$



これを満たす $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ は次の 3 つしかない。

P	$\{3, 3, \ldots, 3\}$	$\{3, \ldots, 3, 4\}$	$\{4, 3, \ldots, 3\}$
$s(P)^2$	$\frac{d+1}{2d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{d}$

順に，正単体，正軸体，超立方体として実現される.

4元数 (1)

4元数(1)

$$\mathbf{H} = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\}$$

は、行列の加法、乗法に関して非可換体になる。

4元数(1)

$$\mathbf{H} = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\}$$

は、行列の加法、乗法に関して非可換体になる。

$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が乗法の単位元

4 元数 (1)

$$\mathbf{H} = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\}$$

は、行列の加法、乗法に関して非可換体になる。

$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が乗法の単位元

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4元数(1)

$$\mathbf{H} = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\}$$

は、行列の加法、乗法に関して非可換体になる。

$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が乗法の単位元

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, e_1, e_2, e_3 は $\mathbf{H}$ の実ベクトル空間としての基底

4元数(1)

$$\mathbf{H} = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\}$$

は、行列の加法、乗法に関して非可換体になる。

$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が乗法の単位元

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, e_1, e_2, e_3 は $\mathbf{H}$ の実ベクトル空間としての基底

$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -e$

4元数 (2)

4元数(2)

$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ に対し $\det q = a\bar{a} + b\bar{b}$

4元数(2)

$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ に対し $\det q = a\bar{a} + b\bar{b}$

$\mathbf{H}$ 内の原点中心の 3 次元単位球面 S^3 は乗法について閉じている。

4元数(2)

$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ に対し $\det q = a\bar{a} + b\bar{b}$

$\mathbf{H}$ 内の原点中心の 3 次元単位球面 S^3 は乗法について閉じている。

S^3 の元はユニタリ行列

4元数(2)

$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ に対し $\det q = a\bar{a} + b\bar{b}$

$\mathbf{H}$ 内の原点中心の **3** 次元単位球面 S^3 は乗法について閉じている。

S^3 の元はユニタリ行列　なので次の内積を保存する。

4元数(2)

$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$ に対し $\det q = a\bar{a} + b\bar{b}$

$\mathbf{H}$ 内の原点中心の 3 次元単位球面 S^3 は乗法について閉じている。

S^3 の元はユニタリ行列　なので次の内積を保存する。

$q, q' \in \mathbf{H}$ に対し

$$\langle q, q' \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(q(q')^*) = \mathrm{Re}(a\overline{a'} + b\overline{b'})$$

q^* は q の共役転置行列

4元数と回転(1)

4元数と回転(1)

$V = \{v \in \mathbf{H} : \langle e, v \rangle = 0\}$ とおく。(3次元空間)

4元数と回転(1)

$V=\{v\in\mathbf{H}:\langle e,v\rangle=0\}$ とおく。(3次元空間)
$g\in S^3$ に対し $v\mapsto gvg^*$ により V の変換

$$\rho(g):V\to V,\quad v\mapsto gvg^*$$

が定まる。

4元数と回転(1)

$V = \{v \in \mathbf{H} : \langle e, v\rangle = 0\}$ とおく。(3次元空間)
$g \in S^3$ に対し $v \mapsto gvg^*$ により V の変換

$$\rho(g) : V \to V, \quad v \mapsto gvg^*$$

が定まる。
$g = \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot w$, $w \in V$, $|w| = 1$, と書くとき

4元数と回転(1)

$V = \{v \in \mathbf{H} : \langle e, v\rangle = 0\}$ とおく。(3次元空間)
$g \in S^3$ に対し $v \mapsto gvg^*$ により V の変換

$$\rho(g) : V \to V, \quad v \mapsto gvg^*$$

が定まる。

$g = \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot w$, $w \in V$, $|w| = 1$, と書くとき
$\rho(g)$ は $w \in V$ を回転軸の正方向とする 2φ 回転

4元数と回転(1)

$V = \{v \in \mathbf{H} : \langle e, v \rangle = 0\}$ とおく。(3次元空間)
$g \in S^3$ に対し $v \mapsto gvg^*$ により V の変換

$$\rho(g) : V \to V, \quad v \mapsto gvg^*$$

が定まる。

$g = \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot w$, $w \in V$, $|w| = 1$, と書くとき
$\rho(g)$ は $w \in V$ を回転軸の正方向とする 2φ 回転
証明: $w_1 = w$, $w_1^2 = w_2^2 = w_3^2 = -e$, $w_1 w_2 w_3 = -e$
となる V の基底 w_1, w_2, w_3 をとって計算。

4 元数と回転 (1)

$V = \{v \in \mathbf{H} : \langle e, v \rangle = 0\}$ とおく。(3 次元空間)
$g \in S^3$ に対し $v \mapsto gvg^*$ により V の変換

$$\rho(g) : V \to V, \quad v \mapsto gvg^*$$

が定まる。
$g = \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot w$, $w \in V$, $|w| = 1$, と書くとき
$\rho(g)$ は $w \in V$ を回転軸の正方向とする 2φ 回転
証明: $w_1 = w$, $w_1^2 = w_2^2 = w_3^2 = -e$, $w_1 w_2 w_3 = -e$
となる V の基底 w_1, w_2, w_3 をとって計算。

$$\begin{aligned} &g(a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3)g^* \\ &\quad = a_1w_1 + (a_2\cos 2\varphi - a_3\sin 2\varphi)w_2 \\ &\qquad + (a_2\sin 2\varphi + a_3\cos 2\varphi)w_3 \end{aligned}$$

4元数と回転(2)

4 元数と回転 (2)

$\mathrm{SO}(V)$ を V の回転全体のなす群とすれば

4元数と回転(2)

$\mathrm{SO}(V)$ を V の回転全体のなす群とすれば

$$\rho : S^3 \to \mathrm{SO}(V), \quad g \mapsto \rho(g)$$

は $2:1$ の写像。

4元数と回転(2)

$\mathrm{SO}(V)$ を V の回転全体のなす群とすれば

$$\rho : S^3 \to \mathrm{SO}(V), \quad g \mapsto \rho(g)$$

は $2:1$ の写像。
$w \in S^2$ を回転軸の正方向とする α 回転
$(0 \leq \alpha \leq \pi)$ を $h \in \mathrm{SO}(V)$ とすると

4元数と回転(2)

SO(V) を V の回転全体のなす群とすれば

$$\rho : S^3 \to \mathrm{SO}(V), \quad g \mapsto \rho(g)$$

は $2:1$ の写像。
$w \in S^2$ を回転軸の正方向とする α 回転
$(0 \leq \alpha \leq \pi)$ を $h \in \mathrm{SO}(V)$ とすると
$\rho^{-1}(h)$ は次の 2 つの元からなる。

4元数と回転(2)

SO(V) を V の回転全体のなす群とすれば

$$\rho : S^3 \to \mathrm{SO}(V), \quad g \mapsto \rho(g)$$

は $2:1$ の写像。
$w \in S^2$ を回転軸の正方向とする α 回転
($0 \leq \alpha \leq \pi$) を $h \in \mathrm{SO}(V)$ とすると
$\rho^{-1}(h)$ は次の 2 つの元からなる。

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot e + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot w,\ \cos(\pi - \frac{\alpha}{2})\cdot e + \sin(\pi - \frac{\alpha}{2})\cdot(-w)$$

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正多胞体 $\{3, 4, 3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。

正多胞体 $\{3, 4, 3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$

正多胞体 $\{3, 4, 3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,4,3\}$ になる。

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,4,3\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,4,3\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/3} \cap P$ が頂点 e での頂点図形でこれは正 6 面体

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,4,3\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/3} \cap P$ が頂点 e での頂点図形でこれは正 6 面体
$V \cap P = V_{\pi/2} \cap P$ は正 8 面体

正多胞体 $\{3,4,3\}$ の構成

正 4 面体群 $T \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\# T = 12$
$G = \rho^{-1}(T)$ は 24 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,4,3\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q \rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/3} \cap P$ が頂点 e での頂点図形でこれは正 6 面体
$V \cap P = V_{\pi/2} \cap P$ は正 8 面体
$V_{2\pi/3} \cap P$ は正 6 面体

正多胞体 $\{3, 3, 5\}$ の構成

正多胞体 $\{3, 3, 5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。

正多胞体 $\{3, 3, 5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q \rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/5} \cap P$ が頂点図形でこれは正 20 面体

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/5} \cap P$ が頂点図形でこれは正 20 面体
$V_{\pi/3} \cap P$ は正 12 面体

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/5} \cap P$ が頂点図形でこれは正 20 面体
$V_{\pi/3} \cap P$ は正 12 面体
$V_{2\pi/5} \cap P$ は正 20 面体

正多胞体 $\{3,3,5\}$ の構成

正 20 面体群 $I \subset \mathrm{SO}(V)$ を考える。 $\#I = 60$
$G = \rho^{-1}(I)$ は 120 個の元からなる。
G の $\mathbf{H}$ 内での凸包 P が正多胞体 $\{3,3,5\}$ になる。

$V_\varphi = \{q \in \mathbf{H} : \langle e, q\rangle = \cos\varphi\}$ とおくと
$V_{\pi/5} \cap P$ が頂点図形でこれは正 20 面体
$V_{\pi/3} \cap P$ は正 12 面体
$V_{2\pi/5} \cap P$ は正 20 面体
$V \cap P = V_{\pi/2} \cap P$ は $20 \cdot 12$ 面体 (準正多面体)

胞数の公式

胞数の公式

S^3 内の有限群 G の $\mathbf{H}$ での凸包が正多胞体 P であるとする。

胞数の公式

S^3 内の有限群 G の $\mathbf{H}$ での凸包が正多胞体 P であるとする。
P の k 次元胞体の個数 n_k を調べよう。

胞数の公式

S^3 内の有限群 G の $\mathbf{H}$ での凸包が正多胞体 P であるとする。
P の k 次元胞体の個数 n_k を調べよう。
q_k : P の k 次元胞体の頂点の個数
r_k : e を含む k 次元胞体の個数
(= 頂点図形 Q の $k-1$ 次元胞体の個数)

胞数の公式

S^3 内の有限群 G の $\mathbf{H}$ での凸包が正多胞体 P であるとする。
P の k 次元胞体の個数 n_k を調べよう。
q_k : P の k 次元胞体の頂点の個数
r_k : e を含む k 次元胞体の個数
(= 頂点図形 Q の $k-1$ 次元胞体の個数)
とおくと、

$$n_k q_k = n_0 r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

4次元正多胞体の胞数の表

4次元正多胞体の胞数の表

前公式を用いて胞数の表を作ってみよう。

4次元正多胞体の胞数の表

前公式を用いて胞数の表を作ってみよう。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
n_0	5	8	16	24	120	600
n_1	10	24	32	96	720	1200
n_2	10	32	24	96	1200	720
n_3	5	16	8	24	600	120

4次元正多胞体の胞数の表

前公式を用いて胞数の表を作ってみよう。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
n_0	5	8	16	24	120	600
n_1	10	24	32	96	720	1200
n_2	10	32	24	96	1200	720
n_3	5	16	8	24	600	120

順に、正単体、正軸体、超立方体

4次元正多胞体の胞数の表

前公式を用いて胞数の表を作ってみよう。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
n_0	5	8	16	24	120	600
n_1	10	24	32	96	720	1200
n_2	10	32	24	96	1200	720
n_3	5	16	8	24	600	120

順に、正単体、正軸体、超立方体

$\{3,4,3\}, \{3,3,5\}$ に、前公式を利用。

4次元正多胞体の胞数の表

前公式を用いて胞数の表を作ってみよう。

P	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
n_0	5	8	16	24	120	600
n_1	10	24	32	96	720	1200
n_2	10	32	24	96	1200	720
n_3	5	16	8	24	600	120

順に、正単体、正軸体、超立方体
$\{3,4,3\}, \{3,3,5\}$ に、前公式を利用。

$\{5,3,3\}$ は $\{3,3,5\}$ の双対として構成。