

3次元 時空 にあける

一般化された カスプ

の 諸性質 について

梅原雅顕 (東工大・情報理工)

(時) 埼玉大・幾何セミナー

16:30 ~ 18:00

5/23 

(論文)

T. Fukui, R. Kinoshita, D. Pei

M. Umehara and H. Yu

Cuspidal edges and Generalized cuspidal edges
in the Lorentz-Minkowski space

の紹介. ⁸48 ホーシ 内蔵なく Arxiv Math $\wedge$
3...プロットの号完

先行研究

 E^3 の類似の仕事

T. Fukui, Local differential
geometry of cuspidal edge
and swallowtail

Osaka. J. Math. 57

(2020) 961-992

L^3 の平均曲率0の
曲面の研究

S. Akamine, Behavior of the
Gaussian curvature of time-like
minimal surfaces with singularities,

Hokkaido Math. J. 48

(2019) 537-568

(今日)

・研究の背景, モチベーション・概要・展望
に2つ2話す!

第1部

Euclid 空間 E^3 における

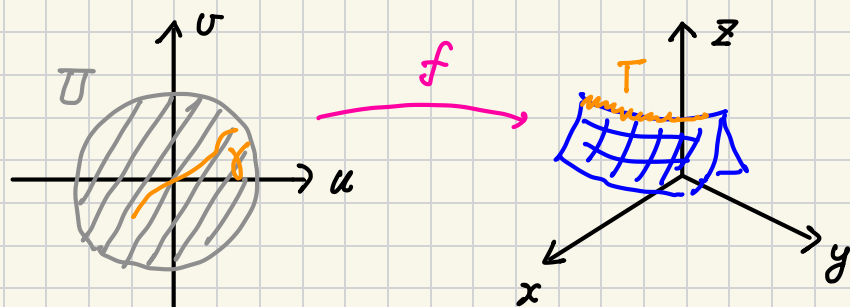
一般化されたカスフ°也

(フロントル と 波面, 非退化 の 特異点)

(1)

$U : (\mathbb{R}^2, u, v)$ の 領域

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a C^∞ -map



f が フロントル $\Leftrightarrow$ $\exists \nu$: 単位 $\wedge$ -クトル 場
 frontal def. s.t. $\nu \perp f_u, f_v$

f が 波面 (wave front)

$\Leftrightarrow L := (f, \nu) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$
 が immersion

以下. f は フロントル と する!

$\lambda: U \ni p \mapsto \det(f_u, f_v, \nu) \in \mathbb{R}$

符号 $\rightarrow$ 面積密度
 関数

$p \in U$ が 特異点

同値 $\Leftrightarrow \lambda(p) = 0$

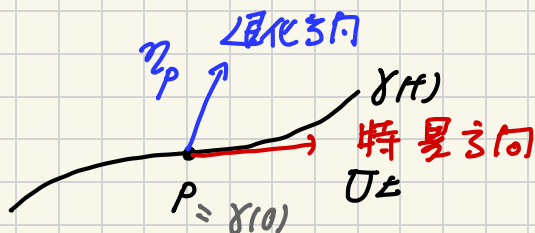
p が 非退化 (non-degenerate)

$\Leftrightarrow d\lambda(p) \neq 0$ i.e. $(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$
 定義

(第1種と第2種の非退化の特異点)

(2)

p が非退化のとき



f の特異点集合は
定義域上の正則曲線となる。

このとき

$$\exists \eta_p : df(\eta_p) = 0$$

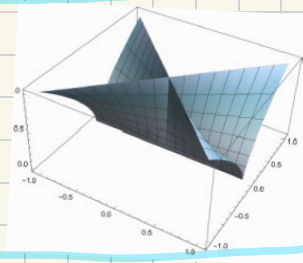
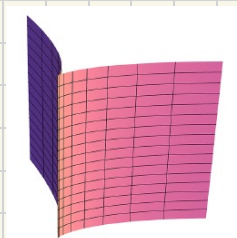
点 p にあつる f の退化方向と云ふ

p が第1種の特異点 $\Leftrightarrow \left(\eta_p \text{ と } \gamma'(0) \text{ が} \right. \\ \left. \text{一次独立} \right)$

• そうでないとき 第2種の特異点

第1種

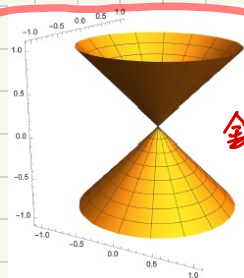
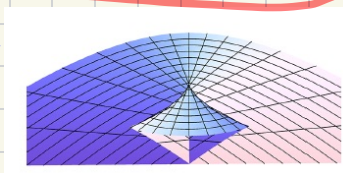
カスプ点



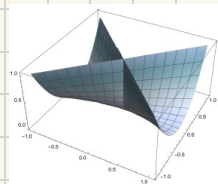
鞍点は
交叉帽子

第2種

ツバメの尾



錐的
特異点



交叉帽子は
フロイドである

カスプ曲 と一般化されたカスプ曲

(3)

(Fact) $p : \text{カスプ曲} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ は } p \text{ の近傍で曲面} \\ p \text{ は 非退化な} \\ \text{第1種の特異点} \end{cases}$
 同値
 def. $\Updownarrow$
 $f_0(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^3 \\ v \end{pmatrix}$
 と左右同値

(定義) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad C^\infty\text{-map}$

が一般化されたカスプ曲とは.

- ① f は フロント
- ② f の 特異点 は すべて 非退化
かつ 第1種

のとてえらう

(特徴) ① カスプ曲の一般化

② 特異点集合の像は空間正則曲線

③ $f(u,v)$ 正則曲面のとき

$g(u,v) = f(u,v^2)$ も一般化されたカスプ曲

$\uparrow$

正則曲面も一般化されたカスプ曲とみなせる!

(一般化されたカスプ曲の基本定理)

4

(定理) 一般化されたカスプ曲 f は、定義域の座標変換で、以下の性質をそつうにぞする。

- $$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ 特異点集合は } u\text{-軸で } f_u(u,0)=0 \\ \textcircled{2} \{ f_u(u,0), f_{uv}(u,0) \} \text{ は一次独立.} \end{array} \right.$$

逆に $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ をみたす f は、一般化されたカスプ曲ぞある。

$$\Gamma(u) = f(u,0) \text{ 特異曲線 } \subset \mathbb{R}^3$$

一般化されたカスプ曲には、 u -軸に沿って

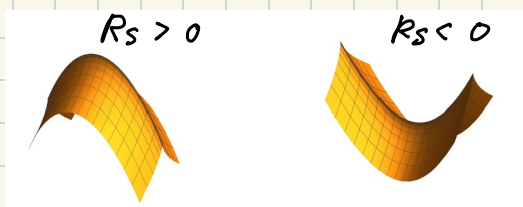
$R_s(u)$ 特異曲率, $R_y(u)$ 極限法曲率

が定義され

$$R^2 = |T''(u)|^2 = R_s(u)^2 + R_y(u)^2$$

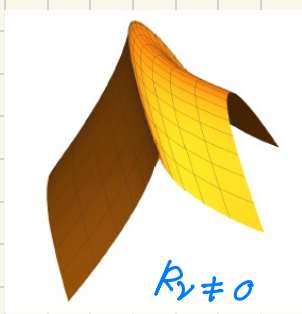
をみたす。

R_s は f の 凹 凸 に関係



$R_y \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \Gamma \text{ の 接平面が} \\ f \text{ の 接平面に一致} \\ \text{しない} \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow \underbrace{K}_{\text{ガウス曲リツ}} \rightarrow \pm \infty$



(平面曲線の表現公式)

$$\gamma: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

C^∞ -regular curve

$$\gamma(s): (|s| < a)$$

s は弧長とする正則曲線 ($|\gamma'(s)| = 1$)

$R(s)$: γ の曲率関数

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos \theta(u) \\ \sin \theta(u) \end{pmatrix} du, \quad \theta(s) = \int_0^s R(u) du$$

は γ と平行移動と回転により重ね合わせることになる。

(def.) $\gamma(t)$ $t \in (a, b)$

$t = c$ での γ が カスプ である $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma'(c) \text{ と } \gamma''(c) \\ \text{は 1-次独立} \end{pmatrix}$

同値 $\gamma'(c) = 0$

標準形 $\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

(def.) $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t = c \in (a, b)$ が一般化されたカスプ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma'(c) = 0 \\ \gamma''(c) \neq 0 \end{cases}$$

(例) カスプは一般化されたカスプ

(例2) $\gamma'(0) \neq 0$

$$\sigma(t) = \gamma(t^2)$$

$\Rightarrow t=0$ は一般化されたカスプ

(Fact) (芝-梅原, 2012)

$\mu(s)$: C^∞ 関数

- 一般化されたカスフ°の表現公式

$$\hat{\gamma}(\lambda) = \int_0^\lambda u \begin{pmatrix} \cos \theta(u) \\ \sin \theta(u) \end{pmatrix} du, \quad \theta(\lambda) = \int_0^\lambda \mu(u) du$$

$$|\hat{\gamma}'(\lambda)| = |\lambda| \quad \lambda \pm 1/2\text{-弧長パラメータとすべし}$$

$$L(\hat{\gamma}) = \int |\hat{\gamma}'| d\lambda = \int |\lambda| d\lambda = \pm \frac{\lambda^2}{2}$$

$\mu(\lambda)$: 正規化された曲率関数

- 一般化されたカスフ°の不変量

$2\mu(0)$: $\hat{\gamma}$ の $\lambda=0$ におけるカスフ°的曲率

その点でその曲線を
最もよく近似する

サイクロイドを生成する円
の半径の逆数の平方根

$$\mu(s) = \mu_0 + \mu_1 s + \frac{\mu_2}{2} s^2 + \frac{\mu_3}{3!} s^3 + \dots$$

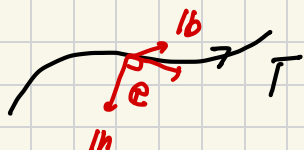
$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$

はすべて曲線 γ の不変量

(福井の一般化したカスプ曲の表現公式)

7

(Fact) 一般化したカスプ曲の像に対して
特異点集合の像に横断的な平面にする
切り口は、平面上で「一般化したカスプ」となる。
その切り口が、カスプとなることと、曲面が
カスプ曲となることは同値。



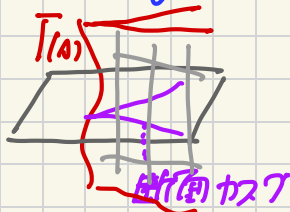
$T(\lambda)$ ($a < \lambda < b$) 双表パラメータで表示された
空間曲線

$T''(\lambda) \neq 0$ のとき

$\underline{e} := T'(\lambda)$, $\underline{m} := \frac{T''}{|T''|}$, $\underline{b} := \underline{e} \times \underline{m}$
単位接ベクトル 単位法ベクトル 単位従法線ベクトル

- T に沿う一般化したカスプ曲を作ることで生み
た公式が福井公式である (次ページ)

given $\theta(\lambda)$ 主方向とカスプの方向のなす角
(cuspidal angle)



$\mu(\lambda, \theta)$: $T(\lambda)$ を基点とする
断面カスプの正規化された
曲率関数

(福井公式)

8

$$f(\lambda, t) = T(\lambda) + (m(\lambda) \quad b(\lambda)) \begin{pmatrix} \cos \theta(\lambda) & \sin \theta(\lambda) \\ -\sin \theta(\lambda) & \cos \theta(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\lambda, t) \\ B(\lambda, t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \int_0^t u \begin{pmatrix} \cos \lambda(\lambda, u) \\ \sin \lambda(\lambda, u) \end{pmatrix} du, \quad \lambda(\lambda, t) = \int_0^t \mu(\lambda, t) du$$

※ すべての Γ に沿う一般化されたカスフ曲は
この公式で表現される。

$\Gamma(\lambda)$ が f のカスフ曲 $\Leftrightarrow \mu(\lambda, 0) \neq 0$

$\Gamma(\lambda)$ が f のカスフ双交帽子 $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu(\lambda, 0) = 0 \\ \mu_\lambda(\lambda, 0) \neq 0 \end{cases}$

利点 μ も θ も f の不変量

※ この公式を用いて f のガウス曲率 K と平均曲率 H

を計算すると K 、 H と特異点の不変量の
関係がわかる。

(長所) 具体例の計算に役立つ

(欠点) $\Gamma'' = 0$ とある点があると公式が使えない!

$$\mu(\lambda, t) = \mu_0(\lambda) + \mu_1(\lambda) t + \frac{\mu_2(\lambda)}{2!} t^2 + \dots$$

9

とおく

• 次の式が成り立つ

$$\underbrace{K(\lambda, t)}_{\text{ガウス曲率}} = \frac{1}{t} R_\nu(\lambda) \mu_0(\lambda) - R_\nu(\lambda) \mu_0(\lambda)^2 + R_\nu(\lambda) \mu_1(\lambda) - \omega(\lambda)^2 + O(t)$$

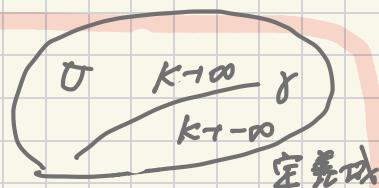
ただし $\omega := \tau - \theta'$ cusp-directional torsion

$$\underbrace{H(\lambda, t)}_{\text{平均曲率}} = \frac{\mu_0(\lambda)}{2t} + \frac{\mu_1(\lambda) + R_\nu(\lambda)}{2} + O(t)$$

この2つの式からわかること!

• $R_\nu \neq 0 \Rightarrow K$ は非有界

t -軸の上下で $K \rightarrow \infty$



• カスプ近の近傍で平均曲率は非有界 ($\mu_0 \neq 0$)

• 臍点 (umbilic) は集積点 ($H^2 - K \approx H^2 \rightarrow \infty$)

• $R_\nu(\lambda) \mu_0(\lambda)$ は第1基本形式のみ依存
(積曲率の $\frac{1}{2}$ 倍)

福井論文では、ツバメの尾にかつても、表現公式を
与えているが、ここでは述べない!

(FKPuy 論文による福井公式の改良)

10

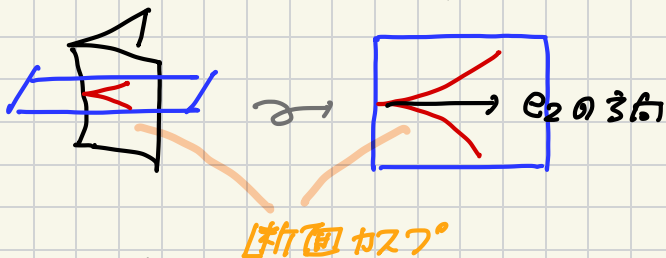
$$T''(\lambda_0) = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{T''}{|T''|} \text{ が定義されるに,}$$

* 断面カスフ°の方向に着目! (もとより福井論文でもこの方向に着目していた.)

$$e_1(\lambda) = T'(\lambda) \quad e_2(\lambda) = \text{断面カスフ°の単位方向ベクトル}$$

$$e_3(\lambda) = e_1(\lambda) \times e_2(\lambda)$$

曲面の法線ベクトル



$$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \alpha$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0 & -R_0 & -R_2 \\ R_0 & 0 & \omega \\ R_2 & -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

微分方程式と見ると与えられた不変量を77一般化したカスフ足が作れる!

77) R_0, R_2, ω は given とする

特異曲率

極限法曲率

cusp. directional torsion

$$f(\lambda, t) = T(\lambda) + A(\lambda, t) e_2(\lambda) + B(\lambda, t) e_3(\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \lambda(\lambda, u) \\ \sin \lambda(\lambda, u) \end{pmatrix} du, \quad \lambda(\lambda, t) = \int_0^t \mu(\lambda, u) du$$

この設定で $T_\#$ を仮定すれば (*) が示せる!

第Ⅱ部

3次元時空における

一般化されたカスフ边

(時空 $\mathbb{L}^3$ 上の曲面)

11

$\mathbb{E}^3$ Euclid 空間

$\mathbb{L}^3$ Lorentz-Minkowski 時空 (+ + -)

x, y $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3 \quad \text{閉曲線}$$

$$p \in U$$

$$\begin{cases} f \text{ は space-like} & \Leftrightarrow ds_p^2 > 0 \\ f \text{ は time-like} & \Leftrightarrow ds_p^2 \text{ は } \square\text{-ノリ計量} \\ f \text{ は light-like} & \Leftrightarrow \text{それ以外} \end{cases}$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{L}^3 \text{ フォントル}$$

$$\Rightarrow \text{法線ベクトル場 } \nu^L: U \rightarrow \mathbb{L}^3 \text{ の } f \text{ の } \nu^L \text{ は定まる!}$$
$$(f_u, f_v \perp \nu^L)$$

$$f \text{ は space-like at } p \Leftrightarrow \nu_p^L \text{ は time-like } (\langle \nu_p, \nu_p \rangle < 0)$$

$$f \text{ は time-like at } p \Leftrightarrow \nu_p^L \text{ は space-like } (\langle \nu_p, \nu_p \rangle > 0)$$

$$f \text{ は light-like at } p \Leftrightarrow \nu_p^L \text{ は light-like } (\langle \nu_p, \nu_p \rangle = 0)$$

このように f の因果特性 (causality) を定義する。

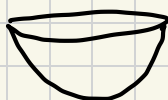
(時空の曲面のガウス曲率)

12

$f: U \rightarrow \mathbb{L}^3$ space-like or time-like
 はめ=み

$$\text{sgn}(K_f^L) = - \text{sgn}(K_f^E)$$

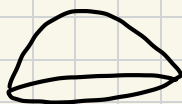
* ガウス曲率の符号が 我々の見たものと逆
 E^3 での曲率



2葉双曲面 (hyperbolic plane)

$$K^L < 0$$

$$H^2(-1) = \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{L}^3 \mid \begin{aligned} &x^2 + y^2 - t^2 = 1 \end{aligned} \right\}$$



H^2



正曲リリに見える!



$$K^L > 0$$

de Sitter 時空 $S_1^2(+1)$

$$= \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{L}^3 \mid \begin{aligned} &x^2 + y^2 - t^2 = -1 \end{aligned} \right\}$$

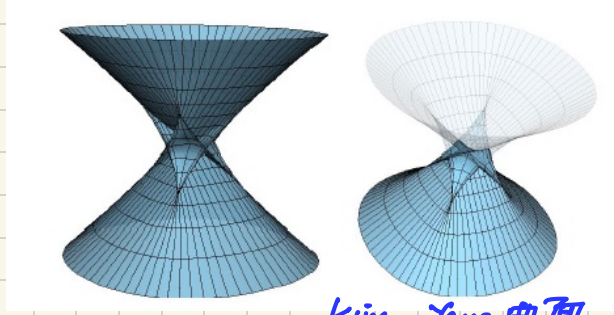
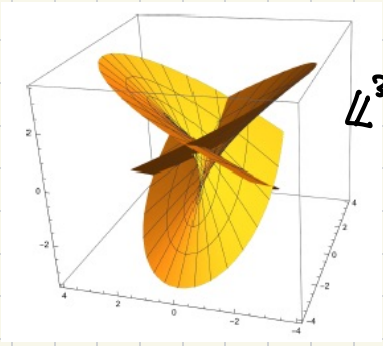
S_1^2



負曲率に見える!

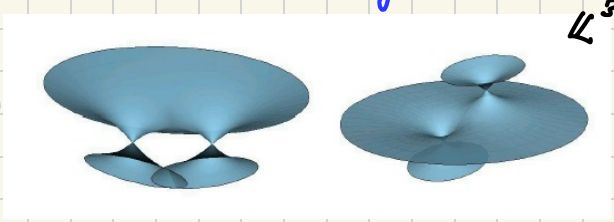
(時空 の カスプ 面 に 特徴 的 な こ と !)

- 平均曲率 H が 有界 と な る 場 合 が あ る。
(平均曲率 が 零 の カスプ 面 の 存 在)

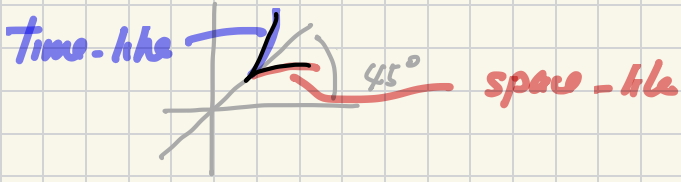


Enneper 型
極大曲面

3つの
インドネシア
極大曲面



- 特異点集合に沿った型変化をする可能性はある。



- umbilic point (臍点) が 集積 する 可能性
がある!

主曲率が 零 での 可能性 3) $H^2 K = 0$ g-umbilic
quasi-umbilic g-umbilic は 集積 する 場 合 が あ る。

※ そのようなときに 上記 の こ と が 成 立 する の が
その 場 合 の 曲 面 の 「ふりまひ」 に 興 味 が あ る!

$\mathbb{E}^3$ の 極小曲面 の 性質 $U \subset (\mathbb{R}^2, u, v)$

$$f: U \rightarrow \mathbb{E}^3 \text{ immersion } H \equiv 0$$

$$\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ 正則 } \text{is } \partial = \bar{\partial}$$

$$\text{s.t. } f = \text{Re}(F)$$

$$\begin{aligned} & \cap (\mathbb{C}, z) \\ & z = u + iv \\ & i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

極大面の定義 maxface

$$f: U \rightarrow \mathbb{L}^3 \text{ } C^\infty\text{-map } \exists U_* \text{ open dense } \subset U^2$$

$$\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ 正則 } \text{is } \partial = \bar{\partial} \quad \text{s.t. } f|_{U_*} \text{ is space-like immersion}$$

$$\text{s.t. } f = \text{Re}(F)$$

$$\text{with } H \equiv 0$$

極小面の定義 minface

$$f: U \rightarrow \mathbb{L}^3 \text{ } C^\infty\text{-map } \exists U_* \text{ open dense } \subset U^2$$

$$\exists F: U \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ } \text{is } \partial = \bar{\partial} \quad \text{s.t. } f|_{U_*} \text{ is time-like immersion}$$

$$\text{s.t. } f = \text{Re}(F)$$

$$\text{with } H \equiv 0$$

$$F = x + iy$$

$$\begin{pmatrix} x_u = y_v \\ x_v = -y_u \end{pmatrix}$$

$$\text{is } \partial = \bar{\partial} \text{ } \text{is } \partial = \bar{\partial}$$

$$\begin{pmatrix} x_u = y_v \\ x_v = -y_u \end{pmatrix}$$

$$\text{is } \partial = \bar{\partial} \text{ } \text{is } \partial = \bar{\partial}$$

(極大面と極小面の性質)

14

(Fact 1) 極大面と極小面のフロンタル

(Fact 2) f : 極大面 or 極小面

$$\Rightarrow f = \operatorname{Re}(F)$$

$$f_* = \operatorname{Im}(F) \text{ 共役な極大面 (極小面)}$$

(f と f_* の第1基本形式は同じ)

(Fact 3) f の特異点はすべて非退化とせよ。

f が波面 $\Leftrightarrow f_*$ が一般化された

(Umehara-Yamada) 2006 UY. Takahashi カスプ面
2012年の修論

(Fact 4) f がカスプ面 $\Leftrightarrow f_*$ もカスプ面

UY. Takahashi

(Fact 5) f がツバメの尾 $\Leftrightarrow f_*$ はカスプ状

UY. Takahashi 交叉帽子

つまり、非退化な極大面・極小面のカスプ面等の

ふるまいを調へるには、平均曲率カスプ等の一般化

されたカスプ面の性質を調へられる。

Weierstraß型
の表現公式 $\rightarrow$ (昌頭・赤嶺氏の先行研究)

(一般の場合の時空の一般化した
カスフ辺の性質)

$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{U}^3$ - 一般化したカスフ辺

□-レンズ版 改良された福井公式

(□-レンズ版・芝-梅原公式)

(全部2~5つの
版を用意)

$$f(u, 0) = T(u)$$

T が time-like

丁型

①

space-like

S型

<

f が time-like

ST

②

f が space-like

SS

③

f が light-like

SL

④

- $\mathbb{U}^3$ のとその手法が
そのとき使える。

• H は非有界

• K は $K_V \neq 0$
の2重発散

• umbilic - g-umbilic
の集積点

quasi
umbilic

理想的な1次元の

福井公式は作れなくなる

H, K の解析が可能

• H は非有界

• f は型変化する

• K は $K_V \neq 0$ の2重発散

• umbilic - g-umbilic 集積点

(設定)

$\{\mathbf{a}_0(s), \mathbf{a}_1(s), \mathbf{a}_2(s)\}$ be a frame field of $\mathbb{R}^3$ along $\Gamma(s)$ satisfying

$$(2.1) \quad \det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) > 0.$$

We consider a symmetric bilinear form $(\cdot, \cdot)$ on $\mathbb{R}^3$ defined by

$$(2.2) \quad (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j} \quad (i, j = 0, 1, 2),$$

where $\delta_{i,j}$ is Kronecker's delta, and $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. In the following calculation, we assume that $\Gamma(s)$ is parametrized by arc-length with respect to the bilinear form $(\cdot, \cdot)$, that is,

$$(\Gamma'(s), \Gamma'(s)) = \pm 1 \quad (s \in I)$$

is assumed. Moreover, we set

$$(2.3) \quad \mathbf{a}_0(s) := \Gamma'(s).$$

There exists a 3×3 matrix $\mathcal{K}$ satisfying

$$(2.4) \quad (\mathbf{a}'_0(s), \mathbf{a}'_1(s), \mathbf{a}'_2(s)) = (\mathbf{a}_0(s), \mathbf{a}_1(s), \mathbf{a}_2(s))\mathcal{K}(s),$$

where $\Gamma'(s) = \mathbf{a}_0(s)$ for each $s \in I$ and $\mathbf{a}'_i := \partial \mathbf{a}_i / \partial s$ ($i = 0, 1, 2$). By (2.2), $\mathcal{K}$ can be written in the following form

$$(2.5) \quad \mathcal{K} := \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa_1 & -\varepsilon_0 \varepsilon_2 \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega \\ \kappa_2 & \Omega & 0 \end{pmatrix},$$

15-a

$$f(\lambda, t) = T(\lambda) + X(\lambda, t) \alpha_1(\lambda) + Y(\lambda, t) \alpha_2(\lambda)$$

$$(2.7) \quad X = \cos \theta A + \sin \theta B, \quad Y = -\sin \theta A + \cos \theta B,$$

$$(2.8) \quad A(s, t) = \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i(s)}{i!} t^i + O(t^{m+1}), \quad B(s, t) = \sum_{i=0}^m \frac{\beta_i(s)}{i!} t^i + O(t^{m+1}),$$

where $O(t^m)$ is a function written as $t^m \varphi(s, t)$ using a C^∞ -function φ defined on a neighborhood of $(s, 0)$. In this setting,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \alpha_0(s) &= \alpha_1(s) = 0, \quad \alpha_2(0) \neq 0, \\ \beta_0(s) &= \beta_1(s) = \beta_2(s) = 0, \end{aligned}$$

θ は SL 型の解析にのみ必要!
(通常 $\theta \equiv 0$)

and θ is a C^∞ -function of one variable which vanishes identically if f is of type E, T, S_s or S_t . We will use the following asymptotic expansion of a given smooth function $\mu(s, t)$ with respect to t

$$(2.10) \quad \mu(s, t) = \mu_0(s) + \mu_1(s)t + \frac{\mu_2(s)}{2!}t^2 + \frac{\mu_3(s)}{3!}t^3 + O(t^4) \quad (s \in I),$$

where $\mu_i(s)$ ($s = 1, 2, 3$) are smooth functions on I as follows: If we think of c as lying in the Euclidean plane $\mathbb{E}^2$, we can write (cf. Fact A.2)

$$(2.11) \quad \begin{pmatrix} A(s, t) \\ B(s, t) \end{pmatrix} = \int_0^t u \begin{pmatrix} \cos \lambda(s, u) \\ \sin \lambda(s, u) \end{pmatrix} du, \quad \lambda(s, t) := \int_0^t \mu(s, u) du.$$

In this case, we have

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} A(s, t) \\ B(s, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0(s) \end{pmatrix} t^3 + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\mu_0(s)^2 \\ \mu_1(s) \end{pmatrix} t^4 + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3\mu_0(s)\mu_1(s) \\ -\mu_0(s)^3 + \mu_2(s) \end{pmatrix} t^5 + O(t^6)$$

and

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = -3\mu_0^2, \quad \alpha_5 = -12\mu_0\mu_1, \\ \beta_3 &= 2\mu_0, \quad \beta_4 = 3\mu_1, \quad \beta_5 = 4(-\mu_0^3 + \mu_2). \end{aligned}$$

On the other hand, if we think of c as lying in the Lorentz-Minkowski plane $\mathbb{L}^2$, we can write (cf. (A.5))

$$(2.14) \quad \begin{pmatrix} A(s, t) \\ B(s, t) \end{pmatrix} = \int_0^t u \begin{pmatrix} \cosh \lambda(s, u) \\ \sinh \lambda(s, u) \end{pmatrix} du, \quad \lambda(s, t) := \int_0^t \mu(s, u) du.$$

In this case, we have

$$(2.15) \quad \begin{pmatrix} A(s, t) \\ B(s, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0(s) \end{pmatrix} t^3 + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \mu_0(s)^2 \\ \mu_1(s) \end{pmatrix} t^4 + \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 3\mu_0(s)\mu_1(s) \\ \mu_0(s)^3 + \mu_2(s) \end{pmatrix} t^5 + O(t^6),$$

which implies that

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 3\mu_0^2, \quad \alpha_5 = 12\mu_0\mu_1, \\ \beta_3 &= 2\mu_0, \quad \beta_4 = 3\mu_1, \quad \beta_5 = 4(\mu_0^3 + \mu_2). \end{aligned}$$

2.2. Computation in the general setting. For the sake of simplicity, we write

$$S(s) := \sin \theta(s), \quad C(s) := \cos \theta(s).$$

By (2.6), we set

$$(2.22) \quad f_s = \mathbf{a}_0 + \frac{\varepsilon_0(-\varepsilon_1\kappa_1C + \varepsilon_2\kappa_2S)\mathbf{a}_0 + (\varepsilon_1\varepsilon_2\Omega - \theta')S\mathbf{a}_1 + (\Omega - \theta')C\mathbf{a}_2}{2}t^2 \\ + \frac{-\varepsilon_0\beta_3(\varepsilon_1\kappa_1S + \varepsilon_2\kappa_2C)\mathbf{a}_0 + (\beta_3(-\varepsilon_1\varepsilon_2\Omega + \theta')C + \beta'_3S)\mathbf{a}_1 + (\beta_3(\Omega - \theta')S + \beta'_3C)\mathbf{a}_2}{6}t^3 \\ + O(t^4),$$

$$(2.23) \quad f_t = (\mathbf{a}_1C - S\mathbf{a}_2)t + \frac{\beta_3(S\mathbf{a}_1 + C\mathbf{a}_2)}{2}t^2 + \frac{(\alpha_4C + \beta_4S)\mathbf{a}_1 + (-\alpha_4S + \beta_4C)\mathbf{a}_2}{6}t^3 + O(t^4),$$

which imply that

$$(2.24) \quad (f_s, f_s) := \varepsilon_0 - (\varepsilon_1\kappa_1C - \varepsilon_2\kappa_2S)t^2 - \frac{\beta_3(\varepsilon_1\kappa_1S + \varepsilon_2\kappa_2C)}{3}t^3 + O(t^4),$$

$$(2.25) \quad (f_s, f_t) = \frac{1}{2}CS((-\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\theta')t^3 + O(t^4),$$

$$(2.26) \quad (f_t, f_t) = (\varepsilon_1C^2 + \varepsilon_2S^2)t^2 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\beta_3CSt^3 + O(t^4).$$

Using them, we have

$$(2.27) \quad \Delta_L = \varepsilon_0(\varepsilon_1C^2 + \varepsilon_2S^2)t^2 + \varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\beta_3CSt^3 + O(t^4)$$

and

$$(2.28) \quad \tilde{\nu}_E := f_s \times_E f_v = (S\mathbf{a}_1 + C\mathbf{a}_2)t + \frac{\beta_3}{2}(-C\mathbf{a}_1 + S\mathbf{a}_2)t^2 + O(t^3).$$

We next compute the second derivatives of f , and have

$$(2.29) \quad f_{ss} = a_1 \kappa_1 + a_2 \kappa_2 - \frac{\varepsilon_0}{2} \left((\varepsilon_2 \kappa_2 (\Omega - 2\theta') + \varepsilon_1 \kappa_1') C + (\kappa_1 (\varepsilon_2 \Omega - 2\varepsilon_1 \theta') - \varepsilon_2 \kappa_2') S \right) \mathbf{a}_0 t^2 \\ + \frac{1}{2} \left((-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega (\Omega - 2\theta') - \theta'^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa_1^2) C + (-\theta'' + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \kappa_1 \kappa_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega') S \right) \mathbf{a}_1 t^2 \\ + \frac{1}{2} \left((-\theta'' - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa_1 \kappa_2 + \Omega') C + (-2\Omega \theta' + \theta'^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \kappa_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega^2) S \right) \mathbf{a}_2 t^2 + O(t^3),$$

$$(2.30) \quad f_{st} = \left(\varepsilon_0 (-\varepsilon_1 \kappa_1 C + \varepsilon_2 \kappa_2 S) \mathbf{a}_0 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega - \theta') S \mathbf{a}_1 + (\Omega - \theta') C \mathbf{a}_2 \right) t \\ + \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_0 \beta_3 (\varepsilon_2 \kappa_2 C + \varepsilon_1 \kappa_1 S) \mathbf{a}_0 + (\beta_3 (\theta' - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega) C + \beta_3' S) \mathbf{a}_1 \right. \\ \left. + (\beta_3' C + \beta_3 (\Omega - \theta') S) \mathbf{a}_2 \right) t^2 + O(t^3),$$

$$(2.31) \quad f_{tt} = C \mathbf{a}_1 - S \mathbf{a}_2 + \beta_3 (S \mathbf{a}_1 + C \mathbf{a}_2) t + \frac{1}{2} \left((\alpha_4 C + \beta_4 S) \mathbf{a}_1 + (\beta_4 C - \alpha_4 S) \mathbf{a}_2 \right) t^2 + O(t^3).$$

By (0.3) and (2.1), we have

$$(2.32) \quad d^C((s, 0)) := -\det(f_s, f_{ss}, f_{tt}) \Big|_{t=0} = -\det(\mathbf{a}_0, \kappa_1 \mathbf{a}_1 + \kappa_2 \mathbf{a}_2, C \mathbf{a}_1 - S \mathbf{a}_2) = \kappa_1 S + \kappa_2 C.$$

Using (2.28) and (2.29), we have

$$(2.33) \quad \tilde{L} = (S \kappa_1 + C \kappa_2) t + \frac{\beta_3}{2} (-\kappa_1 C + \kappa_2 S) t^2 \\ + \frac{1}{6} \left((-\beta_4 \kappa_1 + \alpha_4 \kappa_2) C + (\alpha_4 \kappa_1 + \beta_4 \kappa_2) S \right) t^3 + \left((\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) \Omega \theta' - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa_1^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \kappa_2^2 \right) C S t^3 \\ + \frac{1}{2} \left(-\theta'' - 2\varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa_1 \kappa_2 + \Omega' \right) C^2 t^3 + \frac{1}{2} \left(-\theta'' + 2\varepsilon_0 \varepsilon_2 \kappa_1 \kappa_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Omega' \right) S^2 t^3.$$

Similarly, using (2.28), (2.30), (2.31) and the relation $C^2 + S^2 = 1$, we have

$$(2.34) \quad \tilde{M} = \left((\Omega(C^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 S^2) - \theta') t^2 + \frac{1}{2} (2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \beta_3 \Omega C S + \beta_3') t^3 \right),$$

$$(2.35) \quad \tilde{N} = \frac{\beta_3}{2} t^2 + \frac{\beta_4}{3} t^3 + O(t^4).$$

(第一基本形式の 位数 ^{order} と上記の
場合分けとの関係)

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$f(u, t)$ - 一般化された
カスプ型

曲面 f の 第一基本形式

$$E := \langle f_u, f_u \rangle, \quad F := \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

もし f が 一般化されたカスプ型

$$f_v = t a + O(t^2)$$

$$\Rightarrow F \equiv 0 \text{ にできる}$$

($|f_u| = 1$) S型 or T型

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = EG = G = \langle f_v, f_v \rangle$$

$$f_v \neq 0 \text{ 且 } \boxed{\text{ord}(\Delta_p)}^{ip} = 2 \text{ が generic}$$

f_v : light-like の zz 軸 order 3 があろう。

$\mathbb{E}^3$ 2'は generalized cuspidal edge になる? $ip = 2$

$\mathbb{L}^3$ 2'は

$$ip = 3 \Leftrightarrow \Gamma \text{ が S 型}$$

断面カスプの3'が $\angle$

つまり SL 型

$$ip \geq 4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \Gamma \text{ が light-like} \\ R_{\gamma}^E = 0 \end{array} \right)$$

T' : light-like
2' order 2 以上
あろう!
 $F = 0(\pi)$

(T' が光的の場合の3D-4)

17

以下 $\langle T'(a), T'(a) \rangle \equiv 0$ とする。

このとき f は time-like と light-like

order $i = 2$

order $i \geq 4$

平面曲線

$$\langle T'(a), T'(a) \rangle \equiv 0$$

が $\forall a \in \mathbb{R}$ の a に $\forall i \geq 2$ 成立

$T' : L\text{-like}$

def $\Leftrightarrow T$ は L 型

$$T = (\gamma(a), a)$$

$$T' = (\gamma', 1) \quad |\gamma'| - 1 = 0$$

$\gamma(a) \subset xy\text{-平面}$
 a は γ の弧長

平面曲線 γ の法線ベクトル

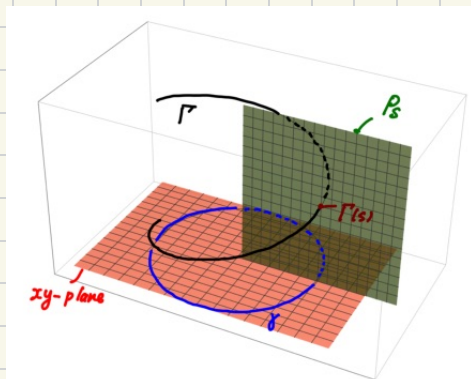
$$e_1 = \gamma'(a), \quad e_2 = \eta(a), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

と12福井型の公式を作る。

$$f(a, t) = (\gamma(a), a) + X(a, t) \gamma'(a) + Y(a, t) \eta(a)$$

$$X = (\cos \theta, \sin \theta) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad Y = (-\sin \theta, \cos \theta) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \int_0^t u \begin{pmatrix} \cos \lambda(a, u) \\ \sin \lambda(a, u) \end{pmatrix} du \quad \lambda(a, t) = \int_0^t \mu(a, u) du$$



② Σ の $\mathbb{R}^3$ への $f(1, t)$ - 一般化されたカスプ曲 18

$T'(1, 0)$ not light-like $\Rightarrow H$ は非有界

H が有界 $\Rightarrow \langle T', T' \rangle \equiv 0$ かつ T は L 型

(T が L 型, f が T 型 の 場合)

f が一般化されたカスプ曲 のとき

② の $\mathbb{R}^3$ へ
 $H \equiv 0$ とある
例を知りたい!

① $order = 2$

② 平均曲率 H^L は有界

③ ガウス曲率 K^L は u -軸の両側で
 $+\infty, -\infty$ に発散

④ 主曲率は 1 の倒で実数

もし 1 の倒で非実数

⑤ umbilic, g -umbilic は累積せず

特異曲線

* $H^L \equiv 0$ の $\mathbb{R}^3$ へあるかは不明

が g -umbilic の
役割

しかし (maxface はありえる
minface でもありえる)

* 極大面と極小面上の一般化されたカスプ曲は

常に $order$ が 4 であることを示せる。

(極大面・極小面には一般化されたカスプ曲以外の特異点も現れる)

(Order 4 の Σ $\left\{ T \text{ は } L\text{-型} \right.$ (19)
 $\sigma > 0 \Rightarrow \Sigma \sigma < 0 \quad R > 0 \quad f \text{ は 特異点 } \Sigma \text{ 光射}$

(定理) $f(\Lambda, t)$ - 一般化した カスフ度

$$T(\Lambda) := f(\Lambda, 0) \quad L\text{-型} \quad \langle T', \Gamma' \rangle \equiv 0$$

$(\Lambda, 0)$ は $\Sigma \wedge \Sigma$ の Λ に Γ して order 4 と Σ する

$$\sin \theta = 0 \quad \sigma = \cos \theta$$

① f は 型 変化 し ない。

② H は 有界 $\Leftrightarrow 3K\mu_1 = 8\mu_0\mu'_0 + 3\sigma R'$

④ 脐点 は 特異点 に 集積 し ない。

さらに $\Gamma'' \neq 0$ なる

f が カスフ度
 2 階 微分 係数 の Σ -ス

⑤ f が 正則点 Σ 空間的 $\Rightarrow \begin{cases} K^L > 0 & \text{on } U, \Sigma_f \\ K^E < 0 \end{cases}$

⑥ f が 正則点 Σ 時間的 $\Rightarrow \begin{cases} K^L > 0 \Leftrightarrow R_s^E > 0 \\ K^L < 0 \Leftrightarrow R_s^E < 0 \end{cases}$

⑦ K^L は 発散, Σ_f の 両側 Σ 同符号

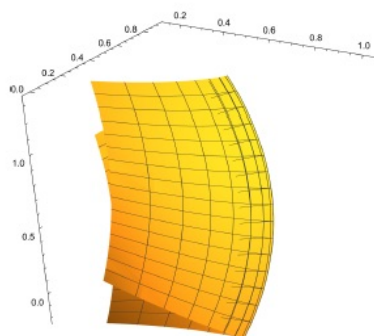
⑧ 主曲率は 2 つ 共に 有界
 (実数 Σ は 限る)

⑨ g -umbilic は 集積 せず。

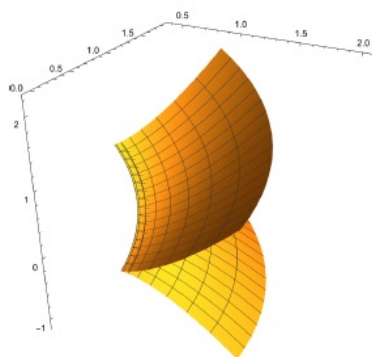
- 一般化した
 カスフ度 に Σ する

(2) 利

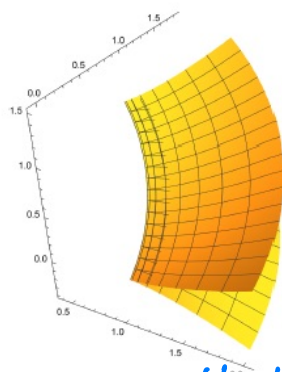
赤鉛筆の max face と min face に 関する 結果が
 その Σ order 4 の 一般化した カスフ度 に Σ 拡張 できる。



time-like $k_L > 0$



time-like $k_L < 0$



space-like $k_L > 0$

FIGURE 3. Cuspidal edges of order four along a light-like helix, which is time-like of convex-type (left), and time-like of concave-type (center) and space-like (right), respectively. These are explained in Example 5.5.

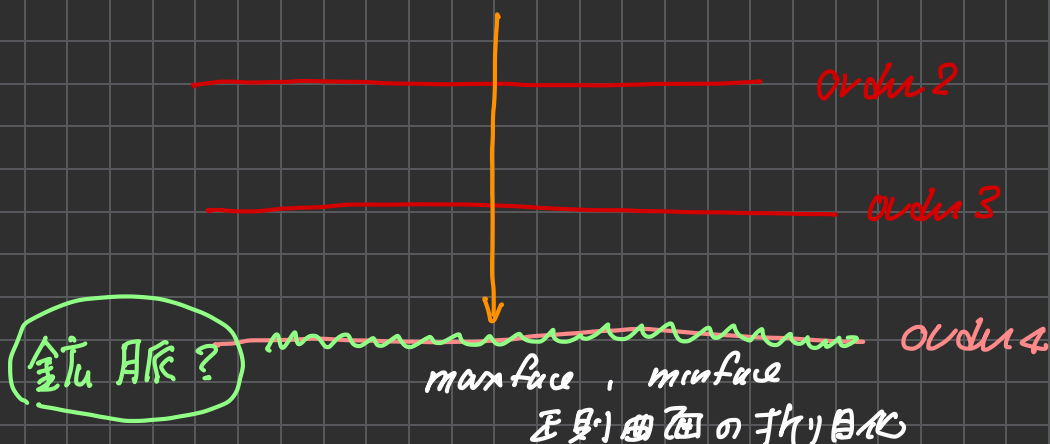
赤嶺氏 による示された

極大面・極小面 のその特異点

の性質の多かれ order 4 の

一般化されたカスプ辺の性質により

拡張できることが示された。



0 R_0^E の正負・カスフ面の見た目の凹凸

特異曲率

on 圧³

↑

order 4 のカスフ面に217は

ガウス曲率の符号に運動

(問1)

R_s^E の正負がローレンツ変換で
不変となるような一般化されたカスフ面
はどのようなものか

(福井 + 本田 + 梅: 最近の共同研究)

(問2) SL型の場合に、よい福井型公式
はあるか?

(問3) 特異点はカスフ面に集積できるか
(未解決)