

ÉCOLE DOCTORALE 269

IRMA, UMR 7501

THÈSE présentée par :

[**Jean-Stefan KOSKIVIRTA**]

soutenue le : 7 mai 2013

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : MATHEMATIQUES

**Relation de congruence pour les
variétés de Shimura associées aux
groupes unitaires $GU(n-1,1)$**

THÈSE dirigée par :

[Mr CARAYOL Henri]

[Mr CORNUT Christophe]

Professeur, université de Strasbourg

Chargé de recherche, CNRS

RAPPORTEURS :

[Mr WEDHORN Torsten]

[Mr GENESTIER Alain]

Professeur, université de Nancy

Professeur, université de Paderborn

AUTRES MEMBRES DU JURY :

[Mr WINTENBERGER Jean-Pierre]

[Mr NOOT Rutger]

Professeur, université de Strasbourg

Professeur, université de Strasbourg

Relation de congruence pour les variétés de
Shimura associées aux groupes unitaires
 $GU(n - 1, 1)$

Jean-Stefan Koskivirta

Remerciements

Je tiens en premier lieu à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Henri Carayol et mon codirecteur Christophe Cornut. Ils m'ont apporté une aide inestimable. Je rends hommage à leur grande disponibilité.

Je veux également exprimer ma reconnaissance à Alain Genestier et à Torsten Wedhorn pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs conseils avisés m'ont été fort utiles. Merci aussi à ce dernier de m'accueillir à Paderborn l'année prochaine pour un postdoc qui s'annonce très enrichissant. Ich freue mich darauf, mit Ihnen zu arbeiten! Je remercie aussi chaleureusement Jean-Pierre Wintenberger et Rutger Noot qui ont bien voulu participer au jury.

Il y a près de neuf ans, le bac en poche, j'intégrai la MPSI2 de M. Schwartz. Je veux lui exprimer ma gratitude pour m'avoir communiqué sa passion des mathématiques. Je me rappelle tout particulièrement son affabilité et son enseignement rigoureux et soigné. Merci à lui et à tous mes autres professeurs, il y a beaucoup d'eux dans cette thèse.

Merci évidemment aux autres doctorants. Je garderai le souvenir des parties de foot endiablées du jeudi après-midi. Je n'oublie pas non plus mes amis de Cachan, à qui je suis redevable des quelques années formidables.

Kiitos äidille joka on aina auttanut minua kaikissa asioissa kahdenkymmennseitsemän vuoden aikana.

Jag vill också rikta ett stort tack till Maria, Lars, Jenny, Erik och Bella. Ni har välkomnat mig in i er familj så snällt. Sist men inte minst, till Malin, tack för din uppmuntran och ditt stöd. Du har gett mig kraft att slutföra arbetet.

Introduction

Soit G un groupe réductif connexe sur \mathbb{Q} et X une $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison d'homomorphismes de groupes algébriques $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$. On dit que le couple (G, X) est une donnée de Shimura si les axiomes suivants sont satisfaits :

- Pour tout $h \in X$, la structure de Hodge induite par h sur $\text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ est de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$.
- L'automorphisme $\text{ad}(h(i))$ est une involution de Cartan.
- Le groupe G^{ad} n'a pas de \mathbb{Q} -facteur non trivial dont les \mathbb{R} -points forment un groupe compact.

A une donnée de Shimura (G, X) et un sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$, on attache une variété de Shimura $Sh_K(G, X)$ dont les \mathbb{C} -points sont :

$$Sh_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G(\mathbb{A}_f) / K).$$

Cet ensemble est muni d'une structure algébrique canonique par le théorème de Baily-Borel. C'est une variété définie sur un corps de nombre E (le corps reflexe). Notons $K = K_p K^p$ avec $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ hyperspécial et $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ compact ouvert. Pour K^p assez petit, la variété $Sh_K(G, X)$ est lisse. Soit \mathfrak{p} un idéal de E au-dessus de p . Dans [BR94], on définit un polynôme $H_{\mathfrak{p}}$ à coefficients dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p) // K_p)$. C'est l'algèbre des fonctions sur $G(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans \mathbb{C} , à support compact, K_p -invariantes à gauche et à droite, munie du produit de convolution relatif à la mesure de Haar sur $G(\mathbb{Q}_p)$ normalisée par $|K_p| = 1$. L'algèbre de Hecke agit sur la cohomologie de $Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}$ de la manière suivante : Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, on considère la variété de Shimura $Sh_{K \cap g K g^{-1}}$ et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & Sh_{K \cap g K g^{-1}} & \\
 u \swarrow & & \searrow v \\
 Sh_K & & Sh_K
 \end{array}$$

où les morphismes u et v sont définis par $u([x \times a]) = [x \times a]$ et $v([x \times a]) = [x \times ag]$. Ces morphismes sont finis plats, et étales pour K^p assez petit. Ceci définit une correspondance sur $Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}$, qui détermine fonctoriellement un endomorphisme de $H_{et}^i(Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ par pull-back et push-forward.

Conjecture. *On suppose que Sh_K a bonne réduction en \mathfrak{p} . Pour $\ell \neq p$, le $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ -module $H_{et}^i(Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est non-ramifié en \mathfrak{p} et dans l'anneau $\text{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(H_{et}^i(Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell))$, on a la relation :*

$$H_{\mathfrak{p}}(\text{Fr}_{\mathfrak{p}}) = 0.$$

Cette relation a lieu dans un anneau non-commutatif, mais est bien définie car l'action galoisienne commute avec celle des éléments de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ puisque u et v sont définies sur E . Comme la variété Sh_K a bonne réduction, elle possède un bon modèle entier sur $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$, et la cohomologie étale de $Sh_K \times_E \overline{\mathbb{Q}}$ coïncide souvent avec celle de la réduction $\overline{Sh_K} \times_{k(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})} \overline{\mathbb{F}_p}$ (où $\kappa(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$).

On formule souvent un énoncé a priori plus fort, où l'équation ci-dessus a lieu dans un anneau "géométrique" (de correspondances ou de cycles) en caractéristique p . Donnons l'exemple de la courbe modulaire. La variété $X_0(N)$ est définie sur \mathbb{Q} . L'ensemble $X_0(N)(\mathbb{C})$ paramètre les classes d'isomorphisme de couples (E, H) où E est une courbe elliptique sur \mathbb{C} et H est un sous-groupe cyclique de $E(\mathbb{C})$ d'ordre N . Soit p un nombre premier ne divisant pas N . On peut prolonger le problème de modules sur \mathbb{Z}_p et on obtient un modèle entier $\mathcal{X}_0(N)$. Notons $\overline{X_0(N)}$ la fibre spéciale de $\mathcal{X}_0(N)$. Considérons la matrice :

$$g = \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}_p).$$

En caractéristique nulle, cet élément agit sur la courbe modulaire $X_0(N)$ par la correspondance T_g suivante :

$$\begin{array}{ccc} & X_0(Np) & \\ u \swarrow & & \searrow v \\ X_0(N) & & X_0(N) \end{array}$$

où les flèches u et v sont données sur le problème de modules par les formules :

$$u(E, H') = (E, H'[N]) \quad v(E, H') = \left(\frac{E}{H'[p]}, \frac{H'}{H'[p]} \right).$$

En la place p , la variété $X_0(Np)$ a mauvaise réduction. Cependant, elle possède un modèle “parahorique” sur \mathbb{Z}_p . La variété $X_0(Np)$ paramètre les classes d’isomorphisme d’isogénies $(E_1, H_1) \rightarrow (E_2, H_2)$ de degré p , où $(E_i, H_i)_{i \in \{1,2\}}$ sont deux points de $X_0(N)$. On peut étendre ce problème de modules à \mathbb{Z}_p de manière évidente. On note $\overline{X_0(Np)}$ la fibre spéciale de ce modèle entier.

Ceci permet de réduire la correspondance T_g sur \mathbb{F}_p . Les flèches u et v sont finies, de degré $p+1$. En caractéristique p , il existe des sections : Le Frobenius $F : \overline{X_0(N)} \rightarrow \overline{X_0(Np)}$ envoie (E, H) sur l’isogénie $F : (E, H) \rightarrow (E^{(p)}, H^{(p)})$. Le Verschiebung $V : \overline{X_0(N)} \rightarrow \overline{X_0(Np)}$ envoie (E, H) sur l’isogénie duale du Frobenius. On a donc $u \circ F = \text{id}$ et $v \circ V = \text{id}$.

Ainsi F, V sont des immersions fermées $\overline{X_0(N)} \hookrightarrow \overline{X_0(Np)}$. L’ensemble $\overline{X_0(N)}(\overline{\mathbb{F}_p})$ possède une stratification. Si $x = (E, H) \in \overline{X_0(N)}(\overline{\mathbb{F}_p})$, on peut associer à x un module de Dieudonné $\mathbb{D}(E)$, qui est un module libre de rang 2 sur W , l’anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\mathbb{F}_p}$. L’isocristal $N = \mathbb{D}(E) \otimes_W W_{\mathbb{Q}}$ est un $W_{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension 2 (où $W_{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des fractions de W). Les pentes de N sont nécessairement $(0, 1)$ ou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La courbe elliptique est alors respectivement ordinaire ou supersingulière. Il existe un nombre fini de classes d’isomorphisme de courbes elliptiques supersingulières, donc le lieu supersingulier est fini. Son complémentaire est le lieu ordinaire de $\overline{X_0(N)}$, et c’est un ouvert dense.

Tout point de $\overline{X_0(Np)}$ est soit un Frobenius, soit un Verschiebung. En effet, si M est un module de Dieudonné de rang 2 (ordinaire ou supersingulier), les seuls sous-modules d’indice p sont FM et VM , et ils coïncident si M est supersingulier. Ainsi, $\overline{X_0(Np)}$ est la réunion de deux sous-schémas fermés isomorphes à $\overline{X_0(N)}$, qu’on notera respectivement Frob et Ver. On constate que $u|_{\text{Frob}}$ et $v|_{\text{Ver}}$ sont des isomorphismes alors que $u|_{\text{Ver}}$ et $v|_{\text{Frob}}$ sont de degré p .

Considérons la \mathbb{C} -algèbre $C(\overline{X_0(N)})$ des correspondances finies sur $\overline{X_0(N)}$. Elle consiste en l’ensemble des combinaisons linéaires formelles de sous-schémas fermés irréductibles de $\overline{X_0(N)} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{X_0(N)}$ tels que les projections sur chacun des facteurs soient finies, surjectives. On peut additionner et multiplier les correspondances. Pour N assez grand, le morphisme (u, v) est une immersion fermée :

$$\overline{X_0(Np)} \hookrightarrow \overline{X_0(N)} \times_{\mathbb{F}_p} \overline{X_0(N)}$$

ce qui permet de considérer $\overline{X_0(Np)}$ comme une correspondance sur $\overline{X_0(N)}$, qu’on note $\overline{T_g}$. On a le théorème bien connu :

Théorème (Eichler-Shimura). *Dans l'anneau $C(\overline{X_0(N)})$, on a la relation*

$$\overline{T}_g = F + V.$$

En multipliant par F , on trouve $F^2 - \overline{T}_g F + p = H_p(F) = 0$, où H_p est le polynôme de Hecke. Vérifions cette relation sur les points. Par un argument de densité, il suffit de traiter le lieu ordinaire. Soit donc $x = (E, H) \in \overline{X_0(N)}(\overline{\mathbb{F}_p})$ ordinaire. Alors $u^{-1}(x)$ consiste en deux points f et g , correspondant respectivement aux inclusions $FM \subset M$ et $VM \subset M$ entre modules de Dieudonné. Ainsi $f \in \text{Frob}$ et $g \in \text{Ver}$. Ces points apparaissent avec une multiplicité égale à l'indice de ramification au point. On a donc

$$u^*(x) = f + pg.$$

On en déduit $\overline{T}_g \cdot x = v_* u^*(x) = \mathcal{F}x + p\mathcal{F}^{-1}x$ où $\mathcal{F} : \overline{X_0(N)} \rightarrow \overline{X_0(N)}$ est le morphisme de Frobenius. En remplaçant x par $\mathcal{F}x$ on trouve $\mathcal{F}^2 x - \overline{T}_g \mathcal{F}x + px = 0$. Par functorialité, on obtient la même relation sur la cohomologie de $X_0(N)$. On peut déterminer entièrement les valeurs propres de Fr_p agissant sur $H_{\text{ét}}^i(X_0(N) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Passons à un cas plus général. Soit Sh_K une variété de Shimura PEL associée à un groupe réductif $G = \text{Aut}(V)$ (où V est un module symplectique) ayant bonne réduction en \mathfrak{p} . On souhaite définir une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ sur la réduction modulo \mathfrak{p} de Sh_K , compatible avec celle sur la cohomologie. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, et T_g la correspondance définie par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & Sh_{K \cap gKg^{-1}} & \\ u \swarrow & & \searrow v \\ Sh_K & & Sh_K \end{array}$$

Un "bon" modèle entier de $Sh_{K \cap gKg^{-1}}$, permettrait de réduire T_g modulo p . Soit \mathcal{I} l'immeuble de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et $x \in \mathcal{I}$ le point qui correspond à K_p . Le \mathbb{C} -espace vectoriel sur $G(\mathbb{Q}_p).x$ est naturellement muni d'une action de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ qui reflète l'action sur $Sh_K \times \mathbb{C}$. Il est possible de décomposer l'action sur $G(\mathbb{Q}_p).x$ en faisant intervenir successivement les sommets voisins dans \mathcal{I} . Ceci décompose l'opérateur de Hecke en morceaux parahoriques. Pour ces compacts, Rapoport et Zink ont construit des bons modèles entiers dans [RZ96], ce qui permet de définir la réduction \overline{T}_g de manière satisfaisante. La correspondance \overline{T}_g est finie sur le lieu ordinaire. On illustrera le cas du groupe $GU(2, 1)$.

Voici une approche moins naïve. Pour S un \mathcal{O}_{E_p} -schéma, les S -points de Sh_K paramètrent les classes d'isogénies (de degré premier à p) de quadruplets $\underline{A} = (A, \iota, \bar{\lambda}, \bar{\eta})$ où A est une variété abélienne sur S munie d'une structure (action, polarisation, structure de niveau). Il existe un \mathcal{O}_{E_p} -schéma p - $\mathcal{I} sog$ paramétrant les p -isogénies entre deux points de Sh_K compatibles avec la structure. Ce schéma est muni de deux flèches, "la source" et "le but", envoyant respectivement l'isogénie $\underline{A}_1 \rightarrow \underline{A}_2$ sur \underline{A}_1 et \underline{A}_2 . En caractéristique p , on a une section de s définie par l'isogénie Frobenius $\underline{A} \rightarrow \underline{A}^{(q)}$. On note p - $\mathcal{I} sog^{(c)}$ le sous-schéma ouvert fermé des isogénies de multiplicateur c .

Faltings et Chai ont défini la \mathbb{Q} -algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog \times L]$ (L est un corps muni d'un morphisme $\mathcal{O}_{E_p} \rightarrow L$). C'est la sous-algèbre de $Z_{\mathbb{Q}}(p\text{-}\mathcal{I} sog \times L)$ (la \mathbb{Q} -algèbre des cycles) engendrée par les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} sog \times L$ (voir [Moo04], paragraphe 4.2.1). La multiplication est induite par la composition des isogénies. Cette algèbre contient le cycle Frobenius F , l'image de la section Frobenius. Soit $\Lambda \subset V(\mathbb{Q}_p)$ un réseau autodual tel que $K_p = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ engendrée par les fonctions $1_{K_p g K_p}$ avec $g \in G(\mathbb{Q}_p) \cap \text{End}(\Lambda)$. On a un morphisme d'algèbres :

$$\varphi : \mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) \longrightarrow \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] .$$

La sous-algèbre $\mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ contient les coefficients du polynôme de Hecke. Dans ce contexte, la relation de congruence désigne la conjecture :

Conjecture. Dans $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$, on a la relation suivante :

$$H_p(F) = 0.$$

Le lieu ordinaire \overline{Sh}_K^{ord} (ou μ -ordinaire) de la variété de Shimura a été défini dans [Wed99] et [Moo04]. C'est un ouvert dense de \overline{Sh}_K . On définit $p\text{-}\mathcal{I} sog^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) = t^{-1}(\overline{Sh}_K^{ord})$. On construit de manière analogue une algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$. Par intersection avec le lieu ordinaire, on définit un morphisme d'algèbres :

$$\text{ord} : \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] \longrightarrow \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] .$$

Ben Moonen a démontré dans [Moo04] le théorème suivant :

Théorème. Considérons le polynôme de Hecke H_p dans $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} sog^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})][t]$ à travers $\text{ord} \circ \varphi$. Dans cette algèbre, on a :

$$H_p(F) = 0.$$

Remarquons que si le lieu ordinaire $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ est dense, alors la relation de congruence découle de manière immédiate de ce résultat. Ce fait avait été prouvé par T. Wedhorn dans [Wed00], mais en imposant que le groupe G soit déployé et que le complété du corps reflexe soit \mathbb{Q}_p . Signalons l'article [BW06] qui traite spécifiquement le cas unitaire de signature $(n-1, 1)$. La condition de densité de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ est vérifiée si et seulement si n est pair.

On a vu que le polynôme H_p annule F dans l'algèbre $\mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$. Souvent, le polynôme minimal du Frobenius sur le lieu ordinaire est simplement un facteur R de H_p . Ainsi, $R(F)$ appartient au noyau du morphisme ord. C'est une combinaison linéaire de composantes irréductibles non ordinaires. Si en outre on a une factorisation $H_p = R \cdot Q$ telle que $C \cdot Q(F) = 0$ pour toute composante non ordinaire C de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$, on en déduit la relation de congruence. Cela semble être le cas pour les variétés de Hilbert-Blumenthal, et nous montrerons qu'il en est de même pour les variétés de Shimura unitaires en signature $(n-1, 1)$ avec n impair. Ben Moonen écrit : "It would be interesting to investigate if this is a general phenomenon".

Voici en détails les principaux résultats de cette thèse. A chaque fois, on supposera l'entier n impair.

- On montre que le polynôme de Hecke se factorise sous la forme

$$H_p(t) = R(t) \cdot (t - p^{n-1} 1_{pK_p})$$

dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$.

- Pour un entier c fixé, on montre que le morphisme (s, t) est une immersion fermée sur $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ dès lors que la structure de niveau K^p en dehors de p est assez petite. Sous cette hypothèse, deux composantes irréductibles C, C' de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ coïncident si et seulement si $s(C) = s(C')$ et $t(C) = t(C')$.
- Soit C une composante supersingulière de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. On montre justement que $s(C \cdot F) = s(C \cdot \langle p \rangle)$ et $t(C \cdot F) = t(C \cdot \langle p \rangle)$.
- Enfin, on démontre que si C est une composante supersingulière de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$, alors on a la relation

$$C \cdot (F - p^{n-1} \langle p \rangle) = 0.$$

On établit cette relation en deux temps. On la montre d'abord pour un niveau $K'^p \subset K^p$ suffisamment petit pour que (s, t) soit une immersion fermée sur $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c+2)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. L'égalité des supports provient des arguments

précédents, et le facteur p^{n-1} du calcul des multiplicités. Ensuite, on utilise le revêtement étale pour se ramener au niveau K^p .

On démontre aussi certains résultats secondaires sur la géométrie de la fibre spéciale de la variété de Shimura associée au groupe $G = GU(2, 1)$ dans le cas de mauvaise réduction parahorique. Plus précisément, soit K_1 le stabilisateur d'un point spécial de l'immeuble de G .

- On décompose la correspondance de Hecke associée à $g = \text{diag}(p, 1, p^{-1})$ en morceaux parahoriques, ce qui permet de la réduire modulo p par les modèles de Rapoport-Zink.
- On montre que les flèches $\overline{Sh_{K \cap K_1}} \rightarrow \overline{Sh_K}$ et $\overline{Sh_{K \cap K_1}} \rightarrow \overline{Sh_{K_1}}$ sont surjectives. Ceci permet de montrer facilement que le lieu ordinaire de $\overline{Sh_{K_1}}$ est ouvert.
- On montre que $\overline{Sh_{K \cap K_1}}^{ord}$ est la réunion disjointe de deux sous-schémas ouverts, et on calcule les degrés des restrictions des flèches de dégénérescence.
- Soit \mathcal{F} le Frobenius de $\overline{Sh_K}$. On établit la relation $R(\mathcal{F}) = 0$ sur les points ordinaires de $\overline{Sh_K}$, où $R = X^2 + \langle p \rangle (p - 1 - \overline{T}_g)X + p^4 \langle p^2 \rangle$.

Table des matières

Introduction	iii
Contenu des chapitres	xv
1 Polynôme de Hecke de $GU(n-1, 1)$	1
1.1 Préliminaires et définitions	1
1.1.1 Formes hermitiennes	1
1.1.2 Groupes de similitudes unitaires	3
1.1.3 Groupe dual	4
1.1.4 Polynôme de Hecke	5
1.2 Isomorphisme de Satake	6
1.2.1 L-paramètres non ramifiés, représentations non ramifiées	6
1.2.2 Isomorphisme de Satake	7
1.2.3 Un facteur du polynôme de Hecke	9
1.3 Le polynôme de Hecke de $GU(2, 1)$ dans l'algèbre de Hecke de G	10
1.3.1 Calcul de l'intersection $(K_p g K_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)$	10
1.3.2 Calcul du polynôme H_p	11
1.3.2.1 Calcul de $[L : g L g^{-1}]$	12
1.3.2.2 Calcul de $[L : L \cap g' L g'^{-1}]$	12
2 La variété de Shimura Sh_K	15
2.1 Variété de Shimura sur \mathbb{C}	15
2.1.1 Formes hermitiennes, formes alternées	15
2.1.2 Variétés abéliennes polarisées	16
2.1.3 Problème de modules	16
2.2 Modèle entier de $Sh_K(G, X)$	17
2.3 Réduction modulo p	19
2.3.1 Isocristaux, modules, espaces de Dieudonné unitaires .	19
2.3.2 Stratifications	23
2.3.3 Cristaux supersinguliers	24

2.3.3.1	Isocristaux unitaires supersinguliers	24
2.3.3.2	Cristaux superspéciaux	25
2.3.3.3	Saut superspécial	26
3	Espace de module d'isogénies	27
3.1	Espace de p -isogénies	27
3.2	L'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L]$	28
3.3	Un diagramme commutatif	29
4	Immeuble de $GU(3)$	33
4.1	Définition de l'immeuble	33
4.2	Géométrie de l'immeuble	38
4.3	Action de l'algèbre de Hecke	41
4.4	Isomorphisme de Satake et immeubles	42
5	Graphe des cristaux de $GU(2, 1)$	47
5.1	Quelques rappels	47
5.1.1	Groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1	47
5.1.2	Cohomologie galoisienne	49
5.2	Cristaux ordinaires	51
5.3	Cristaux supersinguliers	54
5.3.1	Cristaux superspéciaux	55
5.3.2	L'ensemble $\mathcal{C}(M')$	55
5.3.3	Quelques ensembles de cristaux	59
5.3.4	Classes d'isomorphisme de cristaux unitaires	61
5.4	Graphe des cristaux supersinguliers	64
5.4.1	Graphe superspécial \mathbb{X}_{Sh}	64
5.4.2	Applications	66
5.4.3	Graphe de \mathcal{I}	68
6	Relation de congruence ordinaire pour $GU(2, 1)$	71
6.1	Opérateur de Hecke en caractéristique nulle	71
6.2	Réduction modulo p	73
6.2.1	Problème de module parahorique	73
6.2.2	Lieu ordinaire, lieu supersingulier	75
6.2.3	Espace tangent	76
6.2.4	Degrés des morphismes w, w_1	77
6.3	Opérateur de Hecke en caractéristique p	80
6.4	Relation de congruence ordinaire et immeuble de G	81

7	Relation de congruence	85
7.1	L'espace de module \mathcal{N}'	85
7.2	Etude des fibres	87
7.3	Choix du compact K^p	89
7.4	Composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I}so\mathcal{g}^{(c)} \times k$	90
7.5	Revêtements étales	92
7.6	Théorème principal	93
8	Relèvements	97
8.1	Quelques résultats	97
8.2	Cohomologie cristalline et déformations	99
8.3	Déformation des points de $\overline{Sh}_K(k)$ et $p\text{-}\mathcal{I}so\mathcal{g}^{(2)}(k)$ sur W . . .	101
	Appendices	105

Contenu des chapitres

A partir de 1.1.2, n est toujours impair. Dans les chapitres 1,2,3, on introduit les objets de bases qui permettent de formuler la relation de congruence.

Chapitre 1 On introduit les formes hermitiennes et on en donne la classification sur \mathbb{Q} , \mathbb{Q}_p et \mathbb{R} . On définit le groupe G , le groupe dual G^\vee , la donnée de Shimura, le cocaractère μ , la représentation r , le polynôme de Hecke H_p , l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$. On énonce quelques résultats sur les représentations non ramifiées et les L-paramètres non ramifiés, puis le théorème de Satake. On montre que le polynôme H_p se factorise sous la forme $H_p(t) = R(t) \cdot (t - p^{n-1} 1_{pK_p})$. Pour $n = 3$, on calcule H_p dans $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)[t]$ en explicitant l'isomorphisme de Satake.

Chapitre 2 On introduit la variété de Shimura Sh_K , on donne son problème de module sur \mathbb{C} , puis on définit un modèle entier sur \mathcal{O}_{E_p} . On étudie la fibre spéciale \overline{Sh}_K . On définit les modules de Dieudonné quasi-unitaires, les espaces de Dieudonné, les isocristaux. En suivant [Vol10, VW11, BW06], on donne la stratification d'Ekedahl-Oort et de Newton de la fibre spéciale \overline{Sh}_K ainsi que les dimensions des strates. En particulier, on définit la strate ordinaire et la strate supersingulière. On étudie les cristaux supersinguliers. On classe les cristaux quasi-unitaires superspéciaux, et on définit le saut superspécial.

Chapitre 3 On introduit l'espace de module p - $\mathcal{I}so$, les morphismes s, t , etc. On définit la \mathbb{Q} -algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I}so \times L]$. On construit un diagramme commutatif faisant intervenir l'algèbre de Hecke. On énonce le théorème 45 dû à Moonen et Wedhorn qui assure que $H_p(F) = 0$ sur le lieu ordinaire.

Les chapitres 4,5,6 sont consacrés au cas $n = 3$. Les objectifs sont les suivants : Réduire les correspondances de Hecke et démontrer une relation de congruence ordinaire sur les points de \overline{Sh}_K^{ord} . En caractéristique nulle, l'action des opérateurs de Hecke peut se lire sur l'immeuble de G . Cet immeuble sert

aussi pour décrire l'ensemble des cristaux supersinguliers et permet d'étudier l'espace de Rapoport-Zink utilisé dans le chapitre 7.

Chapitre 4 On définit l'immeuble de $GU(3)$ sur \mathbb{Q}_p . On montre que c'est un arbre et on calcule le nombre de voisins. On définit l'action de l'algèbre de Hecke sur l'immeuble. On calcule l'isomorphisme de Satake en utilisant l'immeuble, et on retrouve le résultat du chapitre 1.

Chapitre 5 On redémontre de manière élémentaire et concrète certains résultats du chapitre 2. L'objectif est d'étudier l'ensemble des cristaux unitaires (à une constante près) dans un isocristal fixé. On fait ce travail pour la strate ordinaire et la strate supersingulière. On détermine les relations de voisinage entre cristaux. On montre que le graphe de l'ensemble des cristaux superspéciaux est isomorphe à l'immeuble de G et on donne quelques applications. On explicite la structure de graphe de l'ensemble des cristaux supersinguliers.

Chapitre 6 On décompose les correspondances de Hecke agissant sur $Sh_K \times \mathbb{C}$ en des opérateurs "à niveau parahorique". Pour ces différents niveaux parahoriques, on étudie la fibre spéciale du modèle entier de Rapoport-Zink. On définit le lieu ordinaire, le lieu supersingulier. On construit des sections des flèches de dégénérescence sur le lieu ordinaire. On réduit les opérateurs de Hecke modulo p et on montre qu'un facteur du polynôme de Hecke annule l'action du Frobenius sur le lieu ordinaire de \overline{Sh}_K . Enfin, on montre la même relation d'un point de vue formel.

Le chapitre 7 contient le théorème principal : la relation de congruence pour $GU(n-1, 1)$ avec n impair.

Chapitre 7 On introduit l'espace \mathcal{N}' de Rapoport-Zink associé à un point supersingulier de \overline{Sh}_K . On donne sa structure, en citant [Vol10, VW11]. On étudie les fibres des morphismes s, t . On montre que (s, t) est fini sur $p\text{-}\mathcal{I}so^{(c),ss} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ et que c'est une immersion fermée si K^p est assez petit. On étudie les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I}so \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. Enfin, on démontre la relation de congruence.

Dans le chapitre 8, on revient à $n = 3$. On étudie les relèvements des points supersinguliers de $p\text{-}\mathcal{I}so^{(2)} \times k$ et on en déduit que le polynôme de Hecke n'est pas ordinaire.

Chapitre 8 On fait quelques rappels sur les déformations de variétés abéliennes et on introduit la cohomologie cristalline. On étudie les déformations des points supersinguliers de $p\text{-}\mathcal{I}so\mathcal{g}^{(2)} \times k$ sur W .

Chapitre 1

Polynôme de Hecke de $GU(n-1, 1)$

1.1 Préliminaires et définitions

Soit n un entier positif. Soit E un corps quadratique imaginaire et $\sigma : x \mapsto \bar{x}$ l'automorphisme non trivial de E . On fixe un plongement $\vartheta : E \hookrightarrow \mathbb{C}$ et on identifie $E \otimes \mathbb{R}$ avec \mathbb{C} . Soit $p > 2$ un nombre premier **inerte** dans E , E_p le complété de E en p , et \mathcal{O}_{E_p} l'anneau des entiers de E_p .

1.1.1 Formes hermitiennes

Soit A une algèbre séparable commutative de degré 2 sur un corps k . On note $*$ l'involution non-triviale de A . Un A/k -espace hermitien (V, ψ) de dimension n est la donnée d'un A -module V libre de rang n et d'une forme k -bilinéaire ψ sur V à valeurs dans A vérifiant :

1. $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in A, \psi(\lambda x, y) = \lambda \psi(x, y)$.
2. $\forall x, y \in V, \psi(x, y) = \psi(y, x)^*$.
3. ψ est non-dégénérée (la matrice de ψ dans une A -base de V appartient à $GL_n(A)$).

Soit $\mathfrak{H}_{A/k}^n$ l'ensemble des A/k -espaces hermitiens de dimension n . Si (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) sont deux A/k -espaces hermitiens, on note $(V_1, \psi_1) \simeq (V_2, \psi_2)$ s'ils sont isomorphes et $(V_1, \psi_1) \sim (V_2, \psi_2)$ s'il existe $a \in k^\times$ tel que $(V_1, \psi_1) \simeq (V_2, a\psi_2)$. On dit alors qu'ils sont similaires. Si on fixe une base de V , la forme ψ est donnée par $(X, Y) \mapsto {}^t X M Y^*$ où M est une matrice vérifiant ${}^t M^* = M$ (matrice hermitienne). On pose $N_{A/k}(a) = aa^* \in k$. Le déterminant de ψ est par définition l'élément :

$$\det(\psi) = \det(M) \in \frac{k^\times}{N(A^\times)}$$

où M est la matrice de ψ dans une A -base de V . L'élément $\det(\psi)$ est bien défini. Pour un A/k -espace hermitien (V, ψ) , il existe une base orthogonale de ψ , dans laquelle ψ est donnée par $(X, Y) \mapsto {}^t XMY^*$ avec $M = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $a_1, \dots, a_n \in k^\times$.

On supposera dans la suite $(A, *) = (E, \sigma)$ ou $(E \otimes \mathbb{Q}_v, \sigma)$, où v est une place de \mathbb{Q} (finie ou infinie). Si $(V, \psi) \in \mathfrak{H}_{E/\mathbb{Q}}^n$, on peut parler du signe de $\det(\psi)$ car $N(E^\times) \subset \mathbb{Q}_{>0}$. On définit la signature de ψ comme le couple d'entiers $\varepsilon(\psi) = (r, s)$ avec $r + s = n$ tel que la forme $\psi_{\mathbb{R}}$ s'écrive dans une base $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec " r fois 1" et " s fois -1 ". Nous donnons ci-dessous la classification des formes hermitiennes. Soit $A_n = \{(r, s) \in \mathbb{N}^2; r + s = n\}$ et $\Xi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ défini par $\Xi(r, s) = (s, r)$.

Théorème 1 (local). *Soit ℓ un nombre premier. Les applications $(V, \psi) \mapsto \det(\psi)$ et $(V, \psi) \mapsto \varepsilon(\psi)$ définissent respectivement des bijections :*

$$\frac{\mathfrak{H}_{E \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Q}_\ell}^n}{\simeq} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{Q}_\ell^\times}{N(E \otimes \mathbb{Q}_\ell)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{H}_{E \otimes \mathbb{R} / \mathbb{R}}^n}{\simeq} \xrightarrow{\sim} A_n.$$

Démonstration. C'est un exercice facile. □

Théorème 2 (global). *L'application $(V, \psi) \mapsto (\det(\psi), \varepsilon(\psi))$ définit une bijection*

$$\frac{\mathfrak{H}_{E/\mathbb{Q}}^n}{\simeq} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{Q}^\times}{N(E^\times)} \times A_n.$$

Démonstration. cf. [Jac40] page 268, paragraphe 5. □

Corollaire 3 (principe de Hasse). *L'application naturelle définit une injection*

$$\frac{\mathfrak{H}_{E/\mathbb{Q}}^n}{\simeq} \hookrightarrow \left(\prod_{\ell} \frac{\mathfrak{H}_{E \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Q}_\ell}^n}{\simeq} \right) \times \frac{\mathfrak{H}_{E \otimes \mathbb{R} / \mathbb{R}}^n}{\simeq}.$$

Démonstration. Soit (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) deux E/\mathbb{Q} -espaces hermitiens isomorphes sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q}_ℓ pour tout ℓ . Alors $\frac{\det(\psi_1)}{\det(\psi_2)}$ est la norme d'un élément de $E \otimes \mathbb{Q}_v$ pour toute place v de \mathbb{Q} . C'est donc la norme d'un élément de E ([Jan73], théorème V.4.5). Ainsi $(V_1, \psi_1) \simeq (V_2, \psi_2)$ d'après le théorème 2. □

Corollaire 4. *Si n est impair, l'application $(V, \psi) \mapsto \varepsilon(\psi)$ définit une bijection*

$$\frac{\mathfrak{H}_{E/\mathbb{Q}}^n}{\sim} \xrightarrow{\sim} \frac{A_n}{\Xi} = \frac{\mathfrak{H}_{E \otimes \mathbb{R} / \mathbb{R}}^n}{\sim}.$$

Démonstration. Soit (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) deux E/\mathbb{Q} -espaces hermitiens similaires sur \mathbb{R} . Leurs signatures coïncident ou bien sont inversées. Quitte à considérer $-\psi_2$, on peut supposer qu'ils ont même signature. Soit $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. Alors (V_1, ψ_1) et $(V_2, a\psi_2)$ ont même signature, et ils sont isomorphes si et seulement si

$$\det(\psi_1) = \det(a\psi_2) = a^n \det(\psi_2) = a \det(\psi_2)$$

car n est impair. Il existe $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ vérifiant ceci, car $\det(\psi_1)$ et $\det(\psi_2)$ ont même signe. D'où le résultat. \square

1.1.2 Groupes de similitudes unitaires

Le groupe algébrique sur \mathbb{Q} associé à un E/\mathbb{Q} -espace hermitien (V, ψ) est défini par :

$$G(R) = \{g \in GL_{E \otimes_{\mathbb{Q}} R}(V \otimes_{\mathbb{Q}} R), \exists \nu(g) \in R^\times, \psi_R(gx, gy) = \nu(g)\psi_R(x, y)\}$$

pour une \mathbb{Q} -algèbre R . C'est un groupe réductif. Si l'on remplace ψ par $a\psi$, avec $a \in \mathbb{Q}^\times$, on ne change pas le groupe G . Ainsi, la classe d'isomorphisme de G dépend uniquement de la classe de similitude de ψ . Si n est impair, le corollaire 4 montre qu'elle est déterminée par la signature. On a $V \otimes_{\mathbb{Q}} E \simeq \prod_{\tau \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})} V$. Le choix de $\text{id} \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ fournit un isomorphisme :

$$G_E \simeq GL_E(V) \times \mathbb{G}_{m,E}. \quad (1.1.1)$$

Soit \mathcal{B} une E -base de V et J la matrice de ψ dans \mathcal{B} . Le groupe $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma\}$ agit sur $G(E) \simeq GL_n(E) \times E^\times$ par :

$$\sigma.(A, \lambda) = (\bar{\lambda}J({}^t\bar{A}^{-1})J, \bar{\lambda}) \quad \forall (A, \lambda) \in GL_n(E) \times E^\times.$$

Dorénavant, on fixe un E/\mathbb{Q} -espace hermitien (V, ψ) de signature $(n-1, 1)$ avec n impair. On fait l'hypothèse $\det(\psi \otimes \mathbb{Q}_p) = 1$ dans $\frac{\mathbb{Q}_p^\times}{N(E_p^\times)}$.

On fixe une base de Witt \mathcal{B}_W de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ où ψ possède la matrice $(\delta_{i, n+1-j})_{i,j}$. Soit Λ le \mathcal{O}_{E_p} -réseau défini par cette base. Alors $\psi : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathcal{O}_{E_p}$ est un accouplement parfait. On notera toujours $T \subset G_{\mathbb{Q}_p}$ le tore des matrices diagonales dans \mathcal{B}_W , $A \subset T$ le sous-tore déployé sur \mathbb{Q}_p maximal et $B \subset G_{\mathbb{Q}_p}$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures dans \mathcal{B}_W . L'ensemble $T(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie aux matrices $\text{diag}(x_1, \dots, x_n) \in GL_n(E_p)$ vérifiant :

$$\bar{x}_n x_1 = \bar{x}_{n-1} x_2 = \dots = \bar{x}_k x_k. \quad (1.1.2)$$

Le groupe de Weyl $\Omega(T)$ sur \mathbb{Q}_p est l'ensemble des permutations qui laissent stables les équations (1.1.2) :

$$\Omega(T) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall i = 1, \dots, n; \sigma(i) + \sigma(n-i) = n\}. \quad (1.1.3)$$

On note $K_p = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda)$ (sous-groupe hyperspécial), $L = K_p \cap B(\mathbb{Q}_p)$ et $T_c = K_p \cap T(\mathbb{Q}_p)$.

On a deux morphismes $\nu : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ et $\det : G \rightarrow \text{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$. Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, on a $\nu(g)^n = \det(g)\overline{\det(g)}$ dans E_p . Puisque n est impair et que $\frac{\mathbb{Q}_p^\times}{N(E_p^\times)} = \{1, p\}$, on en déduit $\nu(g) \in N(E_p^\times)$, et par suite :

$$\nu(G(\mathbb{Q}_p)) = N(E_p^\times) \subset \mathbb{Q}_p^*. \quad (1.1.4)$$

Ceci montre que $G(\mathbb{Q}_p) = S(\mathbb{Q}_p)E_p^\times$ où S est le noyau de ν .

1.1.3 Groupe dual

Pour le tore diagonal $T_{n,\mathbb{Q}} \subset GL_{n,\mathbb{Q}}$, on note χ_1, \dots, χ_n (resp. μ_1, \dots, μ_n) les caractères (resp. cocaractères) usuels. Soit χ_0 (resp. μ_0) le caractère (resp. cocaractère) de $GL_{n,\mathbb{Q}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ défini par $\chi_0 : (A, x_0) \mapsto x_0$ (resp. $\mu_0 : x \mapsto (\text{Id}, x)$).

Le groupe dual de G est $\widehat{G} = GL_{n,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Un épinglage est un triplet $\Sigma = (\widehat{T}, \widehat{B}, \{X_\alpha\})$ où $(\widehat{T}, \widehat{B})$ est une paire de Borel de \widehat{G} et X_α un vecteur α -propre de $\text{Lie}(\widehat{G})$ pour chaque racine simple α de \widehat{G} . L'action de $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ sur $\Psi(\widehat{G}) = \Psi(G)^\vee$ se relève en une action par automorphisme sur \widehat{G} qui fixe l'épinglage Σ (voir [BR94], paragraphe 1.6). On fait les choix standards suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= \{\text{sous-groupe des matrices diagonales}\} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \\ \widehat{B} &= \{\text{sous-groupe des matrices triangulaires supérieures}\} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \\ \{X_k\} &= \text{matrices } (a_{i,j}) = (\delta_{i,k}\delta_{j,k+1}) \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Le vecteur X_k appartient à $\text{Lie}(\widehat{G}) = M_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, c'est un vecteur propre pour la racine simple $\chi_k - \chi_{k+1}$. Il existe un unique automorphisme non trivial de \widehat{G} qui fixe Σ , induisant l'action de σ sur \widehat{G} . Il est défini par :

$$\begin{aligned} \widehat{G} &\longrightarrow \widehat{G} \\ (A, x_0) &\longmapsto (J'({}^t A^{-1})J', \det(A)x_0) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

où $J' = ((-1)^{i-1}\delta_{i,n+1-j})_{i,j}$ (voir [BR94] paragraphe 1.8(c)).

Le choix de la base \mathcal{B}_W identifie $(T_{\overline{\mathbb{Q}_p}}, G_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ et $(T_{n, \overline{\mathbb{Q}_p}} \times \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}}, GL_{n, \overline{\mathbb{Q}_p}} \times \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}})$ par (1.1.1). On fixe l'identification $\Psi(\widehat{G}, \widehat{T}) = \Psi(G, T)^\vee$ donnée par $\chi_i \leftrightarrow \mu_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Ceci fournit une identification $\widehat{T} = \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$ telle que $(\text{diag}(x_1, \dots, x_n), x_0) \in \widehat{T}$ correspond à $\mu_i \mapsto x_i$.

1.1.4 Polynôme de Hecke

Soit \mathcal{B} une base orthogonale de $V \otimes \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ le morphisme de \mathbb{R} -groupes algébriques défini sur les \mathbb{R} -points par $z \mapsto \text{diag}(z, \dots, z, \bar{z})$ dans \mathcal{B} . Soit X la $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de h . Le couple (G, X) est une donnée de Shimura (voir [Mil05] définition 5.5). En composant $h_{\mathbb{C}}$ à droite par $\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \prod_{\tau \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ donné par $\tau = \text{id}$, on trouve le cocaractère μ de $G_{\mathbb{C}}$ suivant :

$$\begin{aligned} \mu & : \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}} \simeq GL_{n, \mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \\ z & \mapsto (\text{diag}(z, \dots, z, 1), z) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

On a $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} + \mu_0$. Le caractère \widehat{B} -dominant de \widehat{T} associé est $\widehat{\mu} = \chi_1 + \dots + \chi_{n-1} + \chi_0$.

Cherchons la représentation de $GL_{n, \mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ de plus haut poids $\widehat{\mu}$ pour \widehat{B} . Cette représentation apparaît dans le contexte des conjectures de Langlands. Pour plus de détails, voir [BR94]. Soit ρ la représentation identité $\text{Id} : GL_{n, \mathbb{C}} \rightarrow GL_{n, \mathbb{C}}$. On remarque que $\chi_1 + \dots + \chi_{n-1} = \det - \chi_n$. La représentation $\det \otimes \rho^\vee$ de $GL_{n, \mathbb{C}}$ possède donc le poids $\chi_1 + \dots + \chi_{n-1}$, et c'est le plus haut poids de cette représentation car si $i < j$, alors $\chi_i - \chi_j \geq 0$. Finalement, la représentation cherchée est :

$$\begin{aligned} r & : GL_{n, \mathbb{C}} \times \mathbb{G}_m \longrightarrow GL_{n, \mathbb{C}} \\ (A, x_0) & \longmapsto x_0 \det(A) {}^t A^{-1} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Elle est irréductible, et $\widehat{\mu}$ est le plus haut poids de r . La définition suivante est due à Blasius et Rogawski.

Définition 5. Le polynôme de Hecke associée à la donnée de Shimura (G, X) est :

$$H_p(t) = \det(t - p^{n-1} r(g(\sigma \cdot g))) \quad (1.1.8)$$

Les coefficients de H_p sont des fonctions sur \widehat{G} invariantes par σ -conjugaison $c_x : g \mapsto xg(\sigma \cdot x^{-1})$, $x \in \widehat{G}$.

1.2 Isomorphisme de Satake

1.2.1 L-paramètres non ramifiés, représentations non ramifiées

Le groupe de Weil $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}$ est l'ensemble des \mathbb{Q}_p -automorphismes de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui induisent une puissance du Frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Il agit sur \widehat{G} à travers la projection $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{Gal}(E_p/\mathbb{Q}_p)$. Le L-groupe de G est :

$${}^L G = \widehat{G} \rtimes \mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}.$$

Le morphisme de valuation $\text{val} : \mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Z}$, envoie $\alpha \in \mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}$ sur l'entier n tel que α induit $x \mapsto x^{p^n}$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ (ainsi $\text{val}(\sigma) = 1$). Il induit un morphisme ${}^L G \rightarrow \widehat{G} \rtimes \mathbb{Z}$.

Définition 6. Un L-paramètre non ramifié est un morphisme $\phi : \mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow {}^L G$ vérifiant les propriétés :

1. ϕ induit l'identité de $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}$ par la projection sur $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}$.
2. Pour tout $w \in \mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p}$, $\phi(w)$ est semi-simple.
3. La composée $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow {}^L G \rightarrow \widehat{G} \rtimes \mathbb{Z}$ se factorise par le morphisme val .

La donnée d'un L-paramètre non ramifié équivaut à celle d'un élément semi-simple $\phi(\sigma) = g \rtimes \sigma \in {}^L G$. Deux L-paramètres sont dits équivalents s'ils sont conjugués par \widehat{G} . On note $\Phi_{nr}(G)$ les classes d'équivalence de L-paramètres non ramifiés. L'ensemble $\Phi_{nr}(G)$ est en bijection avec l'ensemble des éléments semi-simples de \widehat{G} modulo σ -conjugaison.

Définition 7. Une représentation non ramifiée de $G(\mathbb{Q}_p)$ est un morphisme $\pi : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow GL(V)$ où V est un espace vectoriel complexe, vérifiant les conditions :

1. π est irréductible.
2. Tout $v \in V$ est fixé par un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$.
3. Pour tout sous-groupe ouvert $U \subset G(\mathbb{Q}_p)$, le sous-espace V_U fixé par U est de dimension finie.
4. Le sous-espace V_{K_p} est non nul.

Deux représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $V_1 \rightarrow V_2$ envoyant π_1 sur π_2 . On note $\Pi_{nr}(G)$ les classes d'équivalence de représentations non ramifiées de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Proposition 8. *Il existe une bijection naturelle entre $\Phi_{nr}(G)$ et $\Pi_{nr}(G)$.*

On peut se ramener au tore en utilisant les isomorphismes canoniques $\Phi_{nr}(G) \simeq \Phi_{nr}(T)/\Omega(T)$ et $\Pi_{nr}(G) \simeq \Pi_{nr}(T)/\Omega(T)$ expliqués dans [BR94]. Montrons les isomorphismes :

$$\Pi_{nr}(T) \simeq \widehat{A} \simeq \Phi_{nr}(T). \quad (1.2.1)$$

1. Une représentation non ramifiée de T est irréductible, donc de dimension 1. La condition $V_{T_c} \neq 0$ implique que T_c est contenu dans le noyau de la représentation. Ainsi, $\Pi_{nr}(T) = \text{Hom}(\frac{T(\mathbb{Q}_p)}{T_c}, \mathbb{C}^\times)$.
2. On a une application $\varphi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})$ envoyant $t \in T(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\alpha \mapsto \text{val}_p(\alpha(t)))$. On a $T_c = \text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi) = \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})^\sigma$ (homomorphismes σ -invariants). Finalement φ induit un isomorphisme :

$$\varphi : \frac{T(\mathbb{Q}_p)}{T_c} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})^\sigma \simeq X_*(T)^\sigma \simeq X_*(A) .$$

Si $\beta \in X_*(A)$, alors $\beta(p) \in A(\mathbb{Q}_p) \subset T(\mathbb{Q}_p)$ est l'inverse de β par φ . On obtient donc $\Pi_{nr}(T) \simeq \text{Hom}(X_*(A), \mathbb{C}^\times) = \widehat{A}$.

3. L'ensemble $\Phi_{nr}(T)$ s'identifie à \widehat{T} modulo le sous-groupe

$$\widehat{T}_0 = \left\{ t(\sigma.t)^{-1}, t \in \widehat{T} \right\} .$$

L'injection naturelle $X_*(A) \hookrightarrow X_*(T)$ induit un morphisme $\widehat{T} \rightarrow \widehat{A}$ dont le noyau est \widehat{T}_0 . Ainsi, on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \widehat{T}_0 \rightarrow \widehat{T} \rightarrow \widehat{A} \rightarrow 1. \quad (1.2.2)$$

D'où $\widehat{A} \simeq \frac{\widehat{T}}{\widehat{T}_0} \simeq \Phi_{nr}(T)$.

Plus concrètement, si $\pi : \frac{T(\mathbb{Q}_p)}{T_c} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est une représentation non ramifiée de T , la fonction $f_\pi \in \widehat{A} = \text{Hom}(X_*(A), \mathbb{C}^\times)$ associé à π par (1.2.1) est :

$$f_\pi(\alpha) = \pi(\alpha(p)), \quad \forall \alpha \in X_*(A). \quad (1.2.3)$$

1.2.2 Isomorphisme de Satake

Définition 9. Soit R une \mathbb{Q} -algèbre. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ de G est l'ensemble des fonctions $f : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow R$ localement constantes, invariantes à droite et à gauche par K_p . L'addition dans $\mathcal{H}_R(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ est définie par l'addition dans R et le produit est le produit de convolution :

$$(f \star g)(y) = \int_G f(x)g(x^{-1}y)dx$$

où la mesure de Haar sur $G(\mathbb{Q}_p)$ est normalisée par $|K_p| = 1$.

Remarque 10. L'injection naturelle de $A(\mathbb{Q}_p)$ dans $G(\mathbb{Q}_p)$ définit une application surjective $A(\mathbb{Q}_p) \rightarrow K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K_p$ (voir [Sat63] paragraphe 9).

On a un morphisme injectif de \mathbb{C} -algèbres :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p) // K_p) &\longrightarrow \{\Pi_{nr}(G) \rightarrow \mathbb{C}\} \\ 1_{K_p g K_p} &\longmapsto (\pi \mapsto \text{Tr}(\pi(1_{K_p g K_p})|V^{K_p})). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

(voir [BR94] paragraphe 1.13). Or $\Pi_{nr}(G) = \frac{\Pi_{nr}(T)}{\Omega(T)}$, donc par ces applications, l'ensemble des fonctions $\Pi_{nr}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à $\{\Pi_{nr}(T) \rightarrow \mathbb{C}\}^{\Omega(T)}$ et aussi à $\{\widehat{A} \rightarrow \mathbb{C}\}^{\Omega(T)}$.

Théorème 11 (Satake 1). *Par cette application, l'algèbre de Hecke de G est isomorphe à $\mathbb{C}[\widehat{A}]^{\Omega(T)}$, l'algèbre des fonctions algébriques sur le tore \widehat{A} invariante par le groupe de Weyl $\Omega(T)$.*

Démonstration. cf. [Sat63] paragraphe 1.13. □

Avec $G = T$, le théorème 11 induit un isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p) // T_c) \simeq \mathbb{C}[\widehat{A}] \simeq \mathbb{C}[X_*(A)]$. L'élément $\lambda \in X_*(A)$ correspond à $1_{\lambda(p)T_c}$. On a un diagramme commutatif ([Wed00], 1.9) :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p) // K_p) & \xrightarrow{|_B} & \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(B(\mathbb{Q}_p) // L) & \xrightarrow{S} & \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p) // T_c) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p) // T_c) . \\ \downarrow \simeq & & & & & & \simeq \downarrow \\ \mathbb{C}[\Pi_{nr}(G)] & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}[\Pi_{nr}(T)]^{\Omega(T)} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{C}[\Pi_{nr}(T)] & & \\ & & & & & & (1.2.5) \end{array}$$

- Le morphisme $|_B : \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p) // K_p) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(B(\mathbb{Q}_p) // L)$ est la restriction des fonctions.

- Le morphisme $\mathcal{S} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(B(\mathbb{Q}_p)//L) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)$ est le passage au quotient modulo le radical unipotent. Pour $g \in T(\mathbb{Q}_p)$, on a

$$\mathcal{S} : 1_{LgL} \mapsto [L : L \cap gLg^{-1}] 1_{gT_c}. \quad (1.2.6)$$

- Le morphisme α est la multiplication par $|\delta|^{1/2}$, où δ est la somme des racines simples positives $\delta = \sum_{i < j} (\chi_i - \chi_j)$ (la normalisation de la valeur absolue est $|p| = \frac{1}{p^2}$).

Lemme 12. *La fonction $f : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C} ; (A, x_0) \mapsto \det(A)x_0^2$ est invariante par σ -conjugaison (f induit un élément de $\mathbb{C}[\Phi_{nr}(G)]$). Elle correspond à $1_{pK_p} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ et $1_{pT_c} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)$.*

Démonstration. L'invariance par σ -conjugaison est facile. L'élément $1_{pT_c} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)$ correspond à $\lambda \in \mathbb{C}[X_*(A)]$ défini par $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow A, x \mapsto x$. Par extension des scalaires, il devient $\mathbb{G}_{m, E_p} \rightarrow G_{E_p} \simeq GL_{n, E_p} \times \mathbb{G}_{m, E_p}, x \mapsto (xI_n, x^2)$. D'où $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i + 2\mu_0$, qui correspond à f . Enfin, 1_{pK_p} est envoyé sur 1_{pT_c} dans le diagramme (1.2.5). \square

1.2.3 Un facteur du polynôme de Hecke

Soit $g = (A, x_0) \in \widehat{T}$, avec $A = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Alors un simple calcul utilisant les formules (1.1.5) et (1.1.7) donne :

$$r(g(\sigma \cdot g)) = \det(A) x_0^2 \text{diag} \left(\frac{x_n}{x_1}, \dots, \frac{x_1}{x_n} \right).$$

Par conséquent, le polynôme de Hecke est

$$\begin{aligned} H_p(t) &= \det(t - p^{n-1}r(g(\sigma \cdot g))) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(t - p^{n-1} \det(A) x_0^2 \frac{x_{n+1-i}}{x_i} \right) \\ &= R(t) \times (t - p^{n-1} \det(A) x_0^2) \end{aligned}$$

en notant $R(t) = \prod_{i \neq \frac{n+1}{2}} \left(t - p^{n-1} \det(A) x_0^2 \frac{x_{n+1-i}}{x_i} \right)$. Le polynôme R est invariant par σ -conjugaison et par le groupe de Weyl $\Omega(T)$. On peut montrer que c'est le polynôme $m_{[\mu]}$ défini dans [Wed00] (2.10). On en déduit :

Théorème 13. *Le polynôme de Hecke H_p se factorise dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ sous la forme :*

$$H_p(t) = R(t) \cdot (t - p^{n-1} 1_{pK_p})$$

avec $R(t) \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)[t]$.

1.3 Le polynôme de Hecke de $GU(2, 1)$ dans l'algèbre de Hecke de G

Dans ce paragraphe, $n = 3$. On calcule le polynôme de Hecke de $GU(2, 1)$ dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$. Dans la base \mathcal{B}_W , on voit $G(\mathbb{Q}_p)$ comme un sous-groupe de $GL_3(E_p)$. On note $g = \text{diag}(p, 1, p^{-1})$.

Lemme 14. *Le polynôme de Hecke de G dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)^{\Omega(T)}$ est*

$$H_p(t) = (t^2 + c_1 t + c_0) \cdot (t - p^2 1_{pT_c})$$

avec $c_1 = -p^2(1_{pgT_c} + 1_{pg^{-1}T_c})$ et $c_0 = p^4 1_{p^2T_c}$.

Démonstration. En développant $R(t)$ (voir plus haut), on trouve

$$\begin{aligned} c_1(x_1, x_2, x_3, x_0) &= -p^2 x_0^2 x_1 x_2 x_3 \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} \right) \\ c_0(x_1, x_2, x_3, x_0) &= p^4 x_0^4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{aligned}$$

en tant que fonctions sur $\widehat{T} \simeq \{(\text{diag}(x_1, x_2, x_3), x_0)\}$. L'élément 1_{gT_c} correspond à la fonction $\frac{x_1}{x_3}$ sur \widehat{T} (preuve analogue à celle du lemme 12), d'où le résultat. \square

Dans la suite, on calcule l'image de $1_{K_p g K_p}$ par l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)^{\Omega(T)}$ donné par le diagramme (1.2.5). On note $\widehat{1_{K_p g K_p}}$ cette image.

1.3.1 Calcul de l'intersection $(K_p g K_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)$

Soit $c_0 \in E_p$ tel que $c_0 + \bar{c}_0 = 0$ et $\text{val}_p(c) = -1$. Pour $(f, c) \in (E_p)^2$ tel que $-f\bar{f} = c + \bar{c}$, on pose :

$$B_{(f,c)} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{f} & c \\ & 1 & f \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

On note $g' = B_{(0,c_0)}$ et $J = (\delta_{i,4-j})_{1 \leq i, j \leq 3}$. Soit U le radical unipotent de B et $L_U = L \cap U(\mathbb{Q}_p)$. On a

$$U(\mathbb{Q}_p) = \{B_{(f,c)}; (f, c) \in (E_p)^2, -f\bar{f} = c + \bar{c}\}.$$

Un calcul facile donne :

$$B_{(f_1, c_1)} B_{(f_2, c_2)} = B_{(f_1+f_2, c_1+c_2+\bar{f}_1 f_2)} \quad (1.3.2)$$

$$B_{(f, c)}^{-1} = B_{(-f, \bar{c})} = B_{(-f, -f\bar{f}-c)}. \quad (1.3.3)$$

Proposition 15. *On a l'égalité ensembliste :*

$$K_p g K_p \cap B(\mathbb{Q}_p) = LgL \sqcup Lg^{-1}L \sqcup Lg'L.$$

Démonstration. On a $g^{-1} = JgJ \in K_p g K_p$. De même, $g' \in K_p g K_p$ par l'identité suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & c_0 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & pc_0 \\ & 1 & \\ -p^{-1}c_0^{-1} & & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \\ & & p^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ c_0^{-1} & & 1 \end{pmatrix}$$

donc cet élément appartient à $K_p g K_p \cap B(\mathbb{Q}_p)$.

Réciproquement, soit $h \in (K_p g K_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)$. Alors $ph \in M_3(\mathcal{O}_{E_p})$ et $\text{val}_p(\det(h)) = 0$. Ainsi, on peut supposer que la diagonale de h est $(p, 1, p^{-1})$ ou $(1, 1, 1)$ (le cas $(p^{-1}, 1, p)$ se ramène au premier en conjuguant par J). Dans le premier cas, $h = gB_{(f, c)}$ avec $f, c \in E_p$ tels que $-f\bar{f} = c + \bar{c}$. Alors $h = B_{(pf, p^2c)}g$. Le rang de ph (mod p) est 1, donc $f \in p^{-1}\mathcal{O}_{E_p}$, d'où $B_{(pf, p^2c)} \in L$ et $h \in LgL$. Dans le second cas, $h = B_{(f, c)}$ avec $f, c \in E_p$ tels que $-f\bar{f} = c + \bar{c}$. Le rang de ph (mod p) est 1, donc $f \in \mathcal{O}_{E_p}$. Soit $c' \in \mathcal{O}_{E_p}$ tel que $c' + \bar{c}' = -f\bar{f}$. Alors $B_{(-f, c')} \in L$, notons $h' = B_{(-f, c')}h$. On a $h' = B_{(0, x)}$ avec $x \in E_p$. Puisque $Lh'L = LhL$, le rang de ph' (mod p) est 1, donc $\text{val}_p(x) = -1$. Pour tout $y \in E_p^\times$, on a

$$B_{(0, x)} = \text{diag}(1, y^{-1}, c_0 x^{-1}) g' \text{diag}(1, y, c_0^{-1} x).$$

Il existe $y \in \mathcal{O}_{E_p}^\times$ tel que $y\bar{y} = c_0^{-1}x$ (car $c_0^{-1}x \in \mathbb{Z}_p^\times$). Alors $\text{diag}(1, y, c_0^{-1}x) \in L$ donc $h' \in Lg'L$, ce qui montre le résultat. \square

1.3.2 Calcul du polynôme H_p

On voit aisément que $gLg^{-1} \subset L$ donc $L \cap g^{-1}Lg = L$. Par la proposition 15, et en utilisant (1.2.6) :

$$(\mathcal{S} \circ |_B)(1_{K_p g K_p}) = [L : gLg^{-1}] 1_{gT_c} + 1_{g^{-1}T_c} + [L : L \cap g'Lg'^{-1}] 1_{T_c}.$$

1.3.2.1 Calcul de $[L : gLg^{-1}]$

L'inclusion $L_U \subset L$ induit un isomorphisme $\frac{L_U}{gL_Ug^{-1}} \simeq \frac{L}{gLg^{-1}}$. On a $gB_{(f,c)}g^{-1} = B_{(pf,p^2c)}$, donc :

$$\begin{aligned} gL_Ug^{-1} &= \{B_{(f,c)} \in L_U, \text{val}_p(c) \geq 2 \text{ et } \text{val}_p(f) \geq 1\} \\ &= \{B_{(f,c)} \in L_U, \text{val}_p(c) \geq 2\}. \end{aligned}$$

Soit $M = \{B_{(f,c)} \in L_U; \text{val}_p(f) \geq 1\}$. D'après les relations (1.3.2) et (1.3.3), on a des morphismes de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \rho : L_U & \longrightarrow & \frac{\mathcal{O}_{E_p}}{p\mathcal{O}_{E_p}} \\ B_{(f,c)} & \longmapsto & f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \theta : M & \longrightarrow & \frac{\mathcal{O}_{E_p}}{p^2\mathcal{O}_{E_p}} \\ B_{(f,c)} & \longmapsto & c \end{array}.$$

Ainsi, $M = \text{Ker}(\rho)$ et $gL_Ug^{-1} = \text{Ker}(\theta)$. Il est clair que ρ est surjectif (pour tout $f \in \mathcal{O}_{E_p}$, on peut trouver $c \in \mathcal{O}_{E_p}$ tel que $-f\bar{f} = c + \bar{c}$). L'image de θ est l'ensemble des $c \in \frac{\mathcal{O}_{E_p}}{p^2\mathcal{O}_{E_p}}$ tels que $c + \bar{c} = 0$. C'est un ensemble à p^2 éléments. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [L : gLg^{-1}] &= [L_U : gL_Ug^{-1}] \\ &= [L_U : M] [M : gL_Ug^{-1}] \\ &= \#\text{Im}(\rho) \times \#\text{Im}(\theta) \\ &= p^4. \end{aligned}$$

1.3.2.2 Calcul de $[L : L \cap g'Lg'^{-1}]$

Soit $l = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f \\ i \end{pmatrix}$ une matrice de L . Alors :

$$g'lg'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & c_0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -c_0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c + c_0(i - a) \\ e & f \\ i \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Ainsi, le sous-groupe $L \cap g'Lg'^{-1}$ est formé des matrices $l \in L$ telles que $p|i - a$, ou encore $\frac{a}{i} \equiv 1 \pmod{p}$. Considérons le morphisme de groupes $\varphi : L \rightarrow (\mathcal{O}_E/p)^\times$ tel que $\varphi(l) = \frac{a}{i}$. Alors $L \cap g'Lg'^{-1} = \text{Ker}(\varphi)$. L'image de φ est l'ensemble des $x \in (\mathcal{O}_E/p)^\times \simeq \mathbb{F}_p^\times$ tels que $x = \bar{x}$. C'est donc \mathbb{F}_p^\times . On en déduit $[L : L \cap g'Lg'^{-1}] = p - 1$.

Corollaire 16. *On a les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} \circ |_B)(1_{K_p g K_p}) &= 1_{gT_c} + p^4 1_{g^{-1}T_c} + (p-1)1_{T_c} \\ \widehat{1_{K_p g K_p}} &= p^2 1_{gT_c} + p^2 1_{g^{-1}T_c} + (p-1)1_{T_c}. \end{aligned}$$

Remarque 17. Les matrices g et g^{-1} sont conjuguées sous le groupe de Weyl donc les deux coefficients correspondants dans $\widehat{1_{K_p g K_p}}$ sont égaux.

Théorème 18. *Le polynôme de Hecke du groupe G dans $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ est*

$$H_p(t) = (t^2 + c_1 t + c_0) \cdot (t - p^2 1_{pK_p})$$

avec $c_1 = -1_{K_p p g K_p} + (p-1)1_{pK_p}$ et $c_0 = p^4 1_{p^2 K_p}$.

Démonstration. Cela résulte du lemme 14 et du calcul de $\widehat{1_{K_p g K_p}}$. □

Chapitre 2

La variété de Shimura Sh_K

2.1 Variété de Shimura sur \mathbb{C}

2.1.1 Formes hermitiennes, formes alternées

Soit $\alpha \in E^\times \cap \mathcal{O}_{E_p}^\times$ totalement imaginaire, de partie imaginaire positive (par le plongement $\vartheta : E \hookrightarrow \mathbb{C}$), et $d = \alpha\bar{\alpha}$. Si un nombre complexe s'écrit $z = a + b\alpha$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le réel b est appelée partie α -imaginaire de z et on note $b = \text{Im}_\alpha(z)$.

Définition 19. Soit $w : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ une forme alternée sur un E -espace vectoriel V . On dit que w est compatible si $\forall e \in E, \forall x, y \in V, w(ex, y) = w(x, \bar{e}y)$.

Proposition 20. Soit (V, w) un E -espace vectoriel muni d'une forme alternée $w : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$, compatible avec E . On définit $\psi : V \times V \rightarrow E$ par la formule :

$$\psi(x, y) = w(\alpha x, y) + \alpha w(x, y). \quad (2.1.1)$$

Alors ψ est une forme hermitienne sur V . Cette construction définit une bijection entre les formes alternées sur V compatibles avec E et les formes hermitiennes sur V . De plus, w_1 et w_2 sont isomorphes (resp. similaires) si et seulement si ψ_1 et ψ_2 sont isomorphes (resp. similaires).

Démonstration. C'est un exercice facile. □

Dans la suite, on notera $\varphi = \text{Im}_\alpha(\psi)$. C'est une forme alternée compatible sur V .

2.1.2 Variétés abéliennes polarisées

Soit W un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et $\Lambda \subset W$ un réseau. Alors le tore complexe $A = \frac{W}{\Lambda}$ est une variété abélienne sur \mathbb{C} si et seulement si il existe une forme de Riemann, c'est-à-dire une forme bilinéaire alternée $w : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $w_{\mathbb{R}} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tous $x, y \in W$, $w_{\mathbb{R}}(ix, iy) = w_{\mathbb{R}}(x, y)$.
2. Pour tout $x \in W - \{0\}$, $w_{\mathbb{R}}(ix, x) > 0$.

La formule (2.1.1) définit une forme \mathbb{R} -bilinéaire hermitienne $\psi_w : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ associée à $w_{\mathbb{R}}$. Soit $W^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C})$ et $\Lambda^* \subset W^*$ le réseau

$$\Lambda^* = \{f \in W^*, \text{Im}_{\alpha}(f(\Lambda)) \in \mathbb{Z}\}.$$

Le quotient $A^{\vee} = \frac{W^*}{\Lambda^*}$ est la variété abélienne duale de A . La polarisation de A associée à la forme de Riemann w est l'isogénie $\lambda_w : A \rightarrow A^{\vee}$ définie par

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W^* \\ x & \longmapsto & \psi_w(x, \cdot) \end{array}.$$

Supposons que A soit munie d'un morphisme $\iota : E \rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ compatible avec λ_w . Cette action induit une structure de E -espace vectoriel sur $H_1(A, \mathbb{Q}) \simeq \Lambda \otimes \mathbb{Q}$. On a donc deux structures complexes sur $H_1(A, \mathbb{R}) \simeq \Lambda \otimes \mathbb{R} = W$. Notons W_+ (resp. W_-) le sous-espace où elles coïncident (resp. sont conjuguées). Alors $W = W_+ \oplus W_-$. La forme $w_{\mathbb{Q}}$ est compatible avec l'action de E et possède une forme hermitienne associée $\psi_{\iota} : \Lambda \otimes \mathbb{Q} \times \Lambda \otimes \mathbb{Q} \rightarrow E$ de signature $(\dim(W_+), \dim(W_-))$.

2.1.3 Problème de modules

On conserve les notations du chapitre 1 pour $V, \psi, G, \Lambda, h, X$. A ces données est associée une variété de Shimura $Sh(G, X)$. Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(\mathbb{A}_f)$, on a une variété $Sh_K(G, X)$ qui est un E -schéma quasi-projectif. Les points complexes sont :

$$Sh_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G(\mathbb{A}_f) / K).$$

Pour $x \in X$ et $g \in G(\mathbb{A}_f)$, on notera $[x \times g] \in Sh_K(G, X)(\mathbb{C})$ l'élément correspondant. Si $K' \subset K$ sont deux sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{A}_f)$, on a un morphisme naturel de E -schémas :

$$\pi_{K'K} : Sh_{K'}(G, X) \longrightarrow Sh_K(G, X)$$

qui induit l'application évidente sur les points complexes. L'ensemble $Sh_K(G, X)(\mathbb{C})$ paramètre les objets suivants :

1. Une variété abélienne A de dimension n sur \mathbb{C} .
2. Un \mathbb{Q} -espace $\bar{\lambda} = \mathbb{Q}\lambda$ de dimension 1 de $\text{Hom}(A, A^\vee) \otimes \mathbb{Q}$ contenant une polarisation $\lambda : A \rightarrow A^\vee$.
3. Une action $\iota : E \rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ compatible avec la polarisation λ .
4. Une K -orbite d'isomorphismes $E \otimes \mathbb{A}_f$ -linéaires $\bar{\eta} : V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{A}_f)$ envoyant φ sur un \mathbb{A}_f^\times -multiple de la forme $w_{\mathbb{Q}}$ associée à λ .

On fait l'hypothèse suivante : Le polynôme caractéristique de $e \in E$ agissant sur $\text{Lie}(A) \simeq H_1(A, \mathbb{R})$ est $(X - e)^{n-1}(X - \bar{e})$. On identifie deux quadruplets $(A_1, \bar{\lambda}_1, \iota_1, \bar{\eta}_1)$ et $(A_2, \bar{\lambda}_2, \iota_2, \bar{\eta}_2)$ s'il existe une isogénie E -linéaire $f \in \text{Hom}(A_1, A_2) \otimes \mathbb{Q}$ envoyant $\bar{\lambda}_1$ sur $\bar{\lambda}_2$ et $\bar{\eta}_1$ sur $\bar{\eta}_2$.

Expliquons brièvement cette bijection. Soit $(A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\eta})$ un tel quadruplet. L'hypothèse faite implique que la signature de ψ_ι est $(n-1, 1)$. Par le corollaire 4, il existe un isomorphisme E -linéaire $a : H_1(A, \mathbb{Q}) \rightarrow V$ envoyant ψ sur un \mathbb{Q}^\times -multiple de ψ_ι . L'action ι fournit un homomorphisme $m_z : H_1(A, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(A, \mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$, compatible avec ψ_ι . Alors $a_{\mathbb{R}} \circ m_z \circ a_{\mathbb{R}}^{-1} \in G(\mathbb{R})$ et l'application $m : z \mapsto a_{\mathbb{R}} \circ m_z \circ a_{\mathbb{R}}^{-1}$ appartient à X . De plus, $g = a_{\mathbb{A}_f} \circ \eta \in G(\mathbb{A}_f)$. Ceci définit un élément $[m \times g] \in Sh_K(G, X)$ correspondant à $(A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\eta})$.

2.2 Modèle entier de $Sh_K(G, X)$

Dans cette section $K = K_p K^p$ avec $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ compact ouvert et $K_p = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda)$.

Définition 21. Soit Sh_K le problème de module classifiant les objets suivants sur un \mathcal{O}_{E_p} -schéma S :

1. Un schéma abélien A de dimension n sur S .
2. Une polarisation homogène $\bar{\lambda} = \mathbb{Q}\lambda \subset \text{Hom}(A, A^\vee) \otimes \mathbb{Q}$ contenant une polarisation p -principale λ .
3. Une action $\iota : \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ compatible avec λ .
4. Une K^p -orbite d'isomorphismes compatibles $\bar{\eta}^p : V(\mathbb{A}_f^p) \xrightarrow{\sim} H_1(A_s, \mathbb{A}_f^p)$ de faisceaux de \mathbb{A}_f^p -modules pour la topologie étale finie.

On impose la condition : Le polynôme caractéristique de $e \in \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ agissant sur $\text{Lie}(A)$ est $(T - e)^{n-1}(T - \bar{e}) \in \mathcal{O}_S[T]$. On identifie deux quadruplets $(A_1, \bar{\lambda}_1, \iota_1, \bar{\eta}_1^p)$ et $(A_2, \bar{\lambda}_2, \iota_2, \bar{\eta}_2^p)$ de $Sh_K(S)$ s'il existe une $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -isogénie $f \in \text{Hom}(A_1, A_2) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ de degré premier à p compatible avec les structures.

Pour K^p assez petit, le problème de module Sh_K est représentable par un schéma lisse quasi-projectif sur \mathcal{O}_{E_p} (voir [Kot92]). C'est un modèle entier de $Sh_K(G, X)$.

Si $S = \mathbb{C}$, on définit une flèche naturelle $Sh_K(\mathbb{C}) \rightarrow Sh_K(G, X)(\mathbb{C})$ de la manière suivante : Soit $(A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\eta}^p) \in Sh_K(\mathbb{C})$. On choisit un isomorphisme $E \otimes \mathbb{Q}_p$ -linéaire quelconque $\eta_p : V(\mathbb{Q}_p) \rightarrow H_1(A, \mathbb{Q}_p)$ compatible avec les formes bilinéaires (c'est possible car la polarisation λ est p -principale). Les réseaux $\Lambda \subset V(\mathbb{Q}_p)$ et $H_1(A, \mathbb{Z}_p) \subset H_1(A, \mathbb{Q}_p)$ sont autoduaux. Puisque deux réseaux autoduaux de $V(\mathbb{Q}_p)$ sont conjugués sous $G(\mathbb{Q}_p)$, on peut supposer que η_p définit un isomorphisme $\eta_p : \Lambda \rightarrow H_1(A, \mathbb{Z}_p)$. Pour $\eta^p \in \bar{\eta}^p$, la K -orbite de $\eta_p \eta^p$ est indépendante du choix de η_p et η^p . On note $\bar{\eta}$ cette K -orbite ; c'est une K -structure de niveau. On note $\iota \otimes \mathbb{Q}$ le morphisme $E \rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ induit par ι . On définit une application :

$$\begin{aligned} Sh_K(\mathbb{C}) &\longrightarrow Sh_K(G, X)(\mathbb{C}) \\ (A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\eta}^p) &\longmapsto (A, \bar{\lambda}, \iota \otimes \mathbb{Q}, \bar{\eta}) \end{aligned}$$

et on montre facilement que c'est une bijection.

Notons $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)} = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell \subset \mathbb{A}_f^p$. Choisissons un $\mathcal{O}_E[p^{-1}]$ -réseau $L \subset V$. On note $\widehat{L}^{(p)} = L \otimes_{\mathbb{Z}[p^{-1}]} \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$, c'est un $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ -réseau de $V(\mathbb{A}_f^p)$. Formons la somme :

$$\sum_{k \in K^p} k(\widehat{L}^{(p)}).$$

Il n'y a qu'un nombre fini de termes dans cette somme. C'est encore un réseau de $V(\mathbb{A}_f^p)$ donc on peut l'écrire $L_1 \otimes_{\mathbb{Z}[p^{-1}]} \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ avec $L_1 \subset V$ un $\mathcal{O}_E[p^{-1}]$ -réseau. De plus, il est stable par K^p . Quitte à multiplier L_1 par un entier, on peut supposer que $\varphi(L_1, L_1) \subset \mathbb{Z}[p^{-1}]$. Finalement, on a trouvé un $\mathcal{O}_E[p^{-1}]$ -réseau $L \subset V$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} K^p &\subset \left\{ g \in G(\mathbb{A}_f^p), g(\widehat{L}^{(p)}) = \widehat{L}^{(p)} \right\} \\ \varphi(L, L) &\subset \mathbb{Z}[p^{-1}] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Le réseau L est en particulier un $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ -module libre de rang $2n$. Dans une base, la forme φ est donnée par une matrice antisymétrique B à coefficients dans $\mathbb{Z}[p^{-1}]$. Son déterminant est donc un carré dans l'anneau $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ et il est bien défini modulo un inversible. On peut supposer que $\det(B) = d^2$ avec $d \in \mathbb{Z}$ premier à p .

Définition 22. Le problème de modules \mathfrak{F} classifie les objets suivants sur un \mathcal{O}_{E_p} -schéma S :

1. Un schéma abélien A de dimension n sur S .
2. Une polarisation $\lambda : A \rightarrow A^\vee$ de degré d^2 .
3. Une action $\iota : \mathcal{O}_E \hookrightarrow \text{End}(A)$ compatible avec la polarisation λ .
4. Une K^p -classe d'isomorphismes $\overline{\eta^p} : \widehat{L}^{(p)} \xrightarrow{\sim} T_f^p(A) = \prod_{\ell \neq p} H_1(A, \mathbb{Z}_\ell)$ compatibles avec l'action de \mathcal{O}_E et faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{L}^{(p)} & \times & \widehat{L}^{(p)} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)} \\
 \eta^p \downarrow & & \eta^p \downarrow & & \downarrow \theta \\
 T_f^p(A) & \times & T_f^p(A) & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}(1)
 \end{array} \tag{2.2.2}$$

avec θ isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)}$ -linéaire. On impose la condition : Le polynôme caractéristique de $e \in \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ agissant sur $\text{Lie}(A)$ est $(T - e)^{n-1}(T - \bar{e}) \in \mathcal{O}_S[T]$. On identifie deux quadruplets $(A_1, \lambda_1, \iota_1, \overline{\eta_1^p})$ et $(A_2, \lambda_2, \iota_2, \overline{\eta_2^p})$ s'il existe un isomorphisme $A_1 \rightarrow A_2$ compatible avec les structures. La proposition suivante est bien connue :

Proposition 23. La flèche naturelle $\mathfrak{F} \rightarrow Sh_K$ définit un isomorphisme de foncteurs.

Remarque 24. Pour K^p assez petit, tout automorphisme d'un quadruplet $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta^p})$ est trivial.

2.3 Réduction modulo p

On note $\overline{Sh_K} = Sh_K \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ où $\kappa(\mathcal{O}_{E_p}) = \frac{\mathcal{O}_{E_p}}{p\mathcal{O}_{E_p}}$. On fixe une clôture algébrique k de $\kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. Soit k' un corps algébriquement clos contenant $\kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. On fixe $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^2}^\times \subset W^\times$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$.

2.3.1 Isocristaux, modules, espaces de Dieudonné unitaires

Dans ce paragraphe, on fait quelques rappels sur la théorie de Dieudonné (covariante). On pose $W = W(k')$ ainsi que $W_{\mathbb{Q}} = \text{Frac}(W)$. Ces anneaux sont munis d'un opérateur σ . Le choix de k' fournit un plongement canonique $\varrho : E_p \hookrightarrow W_{\mathbb{Q}}$. Un module de Dieudonné quasi-unitaire sur k' est un W -module libre de type fini M muni de deux opérateurs F, V , d'une action W -linéaire à gauche de \mathcal{O}_{E_p} et d'une forme W -bilinéaire $\langle, \rangle : M \times M \rightarrow W_{\mathbb{Q}}$ sujets aux conditions suivantes :

1. L'opérateur F est σ -linéaire, l'opérateur V est σ^{-1} -linéaire et ils commutent à l'action de \mathcal{O}_{E_p} .
2. On a la relation $FV = VF = p$.
3. La forme \langle, \rangle est alternée, non-dégénérée.
4. La forme \langle, \rangle vérifie $\forall e \in \mathcal{O}_{E_p}, \forall x, y \in M, \langle ex, y \rangle = \langle x, \bar{e}y \rangle$.
5. La forme \langle, \rangle vérifie $\forall x, y \in M, \langle Fx, y \rangle = \sigma \langle x, Vy \rangle$.

On dira que M est un module de Dieudonné (ou cristal) unitaire si la forme bilinéaire est un accouplement parfait $\langle, \rangle : M \times M \rightarrow W$, c'est-à-dire qu'elle définit un isomorphisme de M avec son dual $M^\vee = \text{Hom}_W(M, W)$. On peut alors identifier M et M^\vee . La catégorie des modules de Dieudonné unitaires sur k' est équivalente à celle des groupes p -divisibles (ou groupes de Barsotti-Tate) sur k' , avec polarisation et \mathcal{O}_{E_p} -action (voir [Gro74] définition 4.2). Si x est un point de $\overline{Sh}_K(k')$, alors le module de Dieudonné de la variété abélienne associée à x est un module de Dieudonné unitaire sur k' . L'action de \mathcal{O}_{E_p} découpe M en la somme directe de deux sous-modules isotropes M_e et $M_{\bar{e}}$ où \mathcal{O}_{E_p} agit respectivement via ϱ et $\bar{\varrho}$. On définit la signature d'un \mathcal{O}_{E_p} -cristal (un cristal muni d'une \mathcal{O}_{E_p} -action compatible) comme le couple :

$$\left(\dim_{k'} \left(\frac{M_e}{VM_{\bar{e}}} \right), \dim_{k'} \left(\frac{M_{\bar{e}}}{VM_e} \right) \right). \quad (2.3.1)$$

Si M est un \mathcal{O}_{E_p} -cristal de signature (r, s) , un élément $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur $\frac{M}{VM}$ avec déterminant $e^r \bar{e}^s$. Si M est un cristal unitaire de rang $2n$, de signature (r, s) , alors $r + s = n$.

Un isocristal unitaire sur k' est un $W_{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel N de dimension finie muni d'un opérateur F bijectif, d'une action de E_p et d'une forme bilinéaire $\langle, \rangle : N \times N \rightarrow W_{\mathbb{Q}}$ vérifiant les conditions 1 à 5 ci-dessus (en posant $V = pF^{-1}$). Si M est un cristal quasi-unitaire, alors $M \otimes_W W_{\mathbb{Q}}$ est naturellement un isocristal unitaire. La catégorie des isocristaux (sans structure) est semi-simple. Si $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $d \wedge h = 1$ et $h \geq 1$, on note $N_\lambda = W_{\mathbb{Q}}^h$, qu'on munit de l'opérateur σ -linéaire

$$F = \begin{pmatrix} & & & p^d \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \sigma.$$

Alors les $(N_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Q}}$ sont les objets simples de cette catégorie. Un isocristal N se décompose sous la forme $N = \bigoplus N_\lambda^{n_\lambda}$ et les λ qui apparaissent sont les pentes de N . L'anneau des endomorphismes de V_λ est D_λ , le corps gauche de centre

\mathbb{Q}_p et d'invariant $\lambda \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si A est une variété abélienne de dimension n sur k' , son isocrystal N est de dimension $2n$ sur $W_{\mathbb{Q}}$ et ses pentes appartiennent à $[0, 1]$. De plus, si λ est une pente de N , alors $1 - \lambda$ aussi.

Un espace de Dieudonné unitaire sur k' est un k' -espace vectoriel \overline{M} muni d'opérateurs F, V , d'une action de \mathcal{O}_{E_p} ainsi que d'une forme bilinéaire $\langle, \rangle : \overline{M} \times \overline{M} \rightarrow k'$ vérifiant les conditions 1 à 5 à l'exception de 2, qui devient $FV = VF = 0$. Il est clair que si M est un module de Dieudonné unitaire, alors $\overline{M} = \frac{M}{pM}$ est un espace de Dieudonné unitaire pour l'action et la polarisation induites. On définit la signature d'un espace de Dieudonné de la même manière que pour les modules (formule (2.3.1)). Si M est un module de Dieudonné, les signatures de M et de \overline{M} coïncident.

Soit \overline{M} un espace de Dieudonné unitaire de dimension $2n$. L'égalité $FV = VF = 0$ impose

$$\begin{aligned} \text{Im}(F) &\subset \text{Ker}(V) \\ \text{Im}(V) &\subset \text{Ker}(F) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

On montre aisément que $\text{Im}(F) = \text{Ker}(V)^\perp$ et $\text{Im}(V) = \text{Ker}(F)^\perp$. On en déduit

$$\text{rg}(F) = \text{rg}(V) \leq n. \quad (2.3.3)$$

De plus, $\overline{M} = \overline{M}_e \oplus \overline{M}_{\bar{e}}$ avec $\dim_k(\overline{M}_e) = \dim_k(\overline{M}_{\bar{e}}) = n$ car la forme bilinéaire est non-dégénérée et \overline{M}_e et $\overline{M}_{\bar{e}}$ sont totalement isotropes. Par ailleurs, si la signature de \overline{M} est (r, s) , alors $r + s = \dim_{k'}\left(\frac{M}{V M}\right) = 2n - \text{rg}(V)$.

Si \overline{M} est la réduction modulo p d'un cristal, alors les inclusions (2.3.2) sont des égalités. La catégorie des espaces de Dieudonné unitaires vérifiant cette condition est équivalente à celle des groupes de Barsotti-Tate sur k tronqués d'échelon 1 (ou BT_1), avec polarisation et \mathcal{O}_{E_p} -action (voir [Gro74] définition 3.2). Remarquer que cette condition peut se reformuler par $\text{rg}(V) = n$ ou encore $r + s = n$.

Nous donnons maintenant deux exemples fondamentaux de cristaux unitaires :

Le cristal unitaire $\mathbb{B}(d)$: Soit $d \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{B}(d)$ le module de Dieudonné ayant pour W -base (e_i, f_i) avec $i \in \{1, \dots, d\}$. On a $e_i \in \mathbb{B}(d)_e$ et

$f_i \in \mathbb{B}(d)_{\bar{e}}$. Les opérateurs F, V sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} F(f_1) &= (-1)^d e_n \\ F(e_i) &= f_{i-1} \text{ pour } i = 2, \dots, d \\ V(f_d) &= e_1 \\ V(e_i) &= f_{i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, d-1. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire \langle, \rangle est définie par $\langle e_i, f_j \rangle = (-1)^{i-1} \delta_{i,j}$. C'est un module de Dieudonné unitaire de signature $(d-1, 1)$. Pour d impair, l'isocrystal de $\mathbb{B}(d)$ a pour unique pente $\frac{1}{2}$. Si d est pair, ses pentes sont $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{d}$ (cf. [BW06] lemme 3.3).

Le cristal unitaire SS : On note SS le cristal unitaire suivant : C'est un W -module libre de base (g, h) où F et V sont définis par $V(g) = -F(g) = h$. On pose $SS_e = Wg$ et $SS_{\bar{e}} = Wh$. La forme bilinéaire est donnée par $\langle g, h \rangle = 1$. Alors SS est un module de Dieudonné unitaire de signature $(1, 0)$, de pente $\frac{1}{2}$.

Remarque 25. Soit M un module (resp. espace) de Dieudonné. On définit le a-nombre de M par

$$a(M) = \dim_{k'} \left(\frac{M}{FM + VM} \right).$$

Un cristal est dit supergénéral si son a-nombre vaut 1. Si M est un cristal, $a(M) = a(\overline{M})$. Si M_1 et M_2 sont deux cristaux, $a(M_1 \times M_2) = a(M_1) + a(M_2)$. On a $a(\overline{\mathbb{B}(r)}) = r - 2$ si $r > 1$ et $a(\overline{SS}) = a(\overline{\mathbb{B}(1)}) = 1$.

Pour terminer ce paragraphe, voici deux résultats de classification des espaces de Dieudonné et des isocristaux unitaires. Pour les preuves, voir [BW06], paragraphe 3.

Théorème 26. Soit \overline{M} un espace de Dieudonné unitaire de signature $(n-1, 1)$. Il existe un entier r , $1 \leq r \leq n$, tel que

$$\overline{M} \simeq \overline{\mathbb{B}(r)} \oplus \overline{SS}^{n-r}.$$

Théorème 27. Soit M un cristal unitaire de signature $(n-1, 1)$ et N son isocrystal. Il existe un entier r , $1 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$, tel que $N \simeq N(r) \times (N_{\frac{1}{2}})^{n-2r}$ où :

$$N(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ N_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}} \oplus N_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}} & \text{si } r > 0 \text{ est pair} \\ N_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}^2 \oplus N_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}}^2 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

2.3.2 Stratifications

On renvoie à [BW06] pour les preuves des résultats énoncés ici. Soit k' un corps algébriquement clos.

Stratification d'Ekedahl-Oort : Deux points de $\overline{Sh}_K(k')$ sont dans la même strate d'Ekedahl-Oort si les espaces de Dieudonné unitaires sur k' associés sont isomorphes. D'après [BW06] (paragraphe 5.4), la stratification d'Ekedahl-Oort s'écrit :

$$\overline{Sh}_K = \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_n$$

où \mathcal{M}_r désigne l'ensemble des points ayant un espace de Dieudonné isomorphe à $\overline{\mathbb{B}(r)} \oplus \overline{SS}^{n-r}$. Chaque \mathcal{M}_i est localement fermé dans \overline{Sh}_K . L'adhérence de toute strate est une réunion de strates.

Stratification de Newton : Deux points de $\overline{Sh}_K(k')$ sont dans la même strate de Newton si les isocristaux unitaires associés sont isomorphes.

Définition 28. L'isocristal $N_0^2 \oplus N_1^2 \oplus N_{\frac{1}{2}}^{n-2}$ (resp. $N_{\frac{1}{2}}^n$) sera dit ordinaire¹ (resp. supersingulier). Ceci correspond à $r = 1$ (resp. $r = 0$) dans le théorème 27. Un cristal est ordinaire (resp. supersingulier) si son isocristal l'est. Un point $x \in \overline{Sh}_K(k')$ est ordinaire (resp. supersingulier) si $\mathbb{D}(x)$ l'est. On note \overline{Sh}_K^{ord} (resp. \overline{Sh}_K^{ss}) le lieu ordinaire (resp. supersingulier).

D'après [BW06], paragraphe 5.4, le lieu supersingulier est $\overline{Sh}_K^{ss} = \bigsqcup_{r \text{ impair}} \mathcal{M}_r$. La stratification de Newton s'écrit de la manière suivante :

$$\overline{Sh}_K = \mathcal{M}_2 \sqcup \mathcal{M}_4 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_{n-1} \sqcup \overline{Sh}_K^{ss}.$$

La strate \mathcal{M}_{2r} peut aussi être décrite comme l'ensemble des points ayant pour isocristal $N(r) \times (N_{\frac{1}{2}})^{n-2r}$. Ainsi, $\overline{Sh}_K^{ord} = \mathcal{M}_2$.

Proposition 29. *La dimension de la variété de Shimura est $n - 1$. Le lieu ordinaire \overline{Sh}_K^{ord} est ouvert, dense dans \overline{Sh}_K . Les dimensions des strates sont comme suit :*

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}_{2r}) &= n - r \\ \dim(\mathcal{M}_{2r+1}) &= r. \end{aligned}$$

1. Dans la terminologie de [Wed99, Moo04], ce lieu est appelé μ -ordinaire.

Pour une preuve, voir [BW06] 5.4.1. Le lieu \mathcal{M}_1 est fini, c'est l'ensemble des points superspéciaux, où la variété abélienne est isomorphe à une puissance d'une courbe elliptique supersingulière. Enfin, on a le résultat suivant ([Vol10, VW11], théorème 5.2) :

Théorème 30. *Pour K^p assez petit, les composantes irréductibles de \overline{Sh}_K^{ss} sont lisses, de dimension $\frac{n-1}{2}$. La strate \mathcal{M}_n constitue le lieu lisse de \overline{Sh}_K^{ss} donc y est dense.*

2.3.3 Cristaux supersinguliers

2.3.3.1 Isocristaux unitaires supersinguliers

Proposition 31. *Soit N un isocristal unitaire supersingulier. Il existe une base de N de la forme $(x_i, Fx_i)_i$ avec $x_i \in N_e$ où \langle, \rangle est donné par l'une des deux matrices $\text{diag}(A, \dots, A)$ ou $\text{diag}(pA, A, \dots, A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Soit $N^\tau = \{x \in N, Fx = Vx\}$. C'est un \mathbb{Q}_{p^2} -espace vectoriel stable par l'action de E_p tel que $N = N^\tau \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} W_{\mathbb{Q}}$ (car N est supersingulier). Pour $x, y \in N$, on pose

$$\{x, y\} = \alpha \langle x, Fy \rangle. \quad (2.3.4)$$

On constate que $\{y, x\} = \sigma(\alpha \langle x, Vy \rangle)$, donc si $x, y \in N^\tau$, alors $\{y, x\} = \sigma \{x, y\}$. Ainsi $\{, \}$ est une forme hermitienne \mathbb{Q}_p -bilinéaire non-dégénérée sur N^τ . La décomposition $N^\tau = N_e^\tau \oplus N_{\bar{e}}^\tau$ est orthogonale pour $\{, \}$. En appliquant le théorème 1 à N_e^τ , on trouve une base (x_1, \dots, x_n) de N_e où la matrice de $\{, \}$ est I_n ou $\text{diag}(p, 1, \dots, 1)$. On en déduit la proposition. \square

Définition 32. Soit N un isocristal unitaire supersingulier. On note $\det(N) \in \frac{\mathbb{Q}_p^\times}{N(E_p^\times)}$ le déterminant de la forme hermitienne $\{x, y\} = \alpha \langle x, Fy \rangle$ sur N_e^τ .

Proposition 33. *Soit M un cristal unitaire supersingulier de signature (r, s) . Alors $\det(M \otimes W_{\mathbb{Q}}) = p^s$.*

Démonstration. On a $pM_e \stackrel{s}{\subset} V(M_{\bar{e}}) \stackrel{r}{\subset} M_e$. Il existe une base (x_1, \dots, x_n) de M_e telle que $(px_1, \dots, px_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ soit une base de $V(M_{\bar{e}})$. Posons

$$(y_1, \dots, y_n) = (Fx_1, \dots, Fx_r, p^{-1}Fx_{r+1}, \dots, p^{-1}Fx_n).$$

C'est une base de $M_{\bar{e}}$. Puisque M est unitaire, le déterminant de la matrice $(\langle x_i, y_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n}$ appartient à W^\times . On en déduit que le déterminant de la forme $\{, \}$ définie par (2.3.4) dans la base (x_1, \dots, x_n) appartient à $p^s W^\times$. \square

2.3.3.2 Cristaux superspéciaux

Définition 34. Un module de Dieudonné M est dit superspécial s'il vérifie

$$FM = VM.$$

Une condition équivalente est $\tau M = M$ où $\tau = p^{-1}F^2$. Un cristal superspécial est supersingulier. L'exemple le plus simple est donné par une W -base (x, Fx) avec la propriété $F^2x = px$ (il est noté $A_{1,1}$). Sans structure, il est isomorphe à SS (et $\mathbb{B}(1)$). Un cristal superspécial (sans structure) est isomorphe à une somme directe de copies de $A_{1,1}$.

Théorème 35. *Soit M un module de Dieudonné superspécial quasi-unitaire. Alors M est isomorphe à une somme directe orthogonale de modules des types suivants :*

1. $Wx \oplus WFx$ avec $\langle x, Fx \rangle = \alpha p^r$, $r \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur x par multiplication par e ou par \bar{e} .
2. $Wx \oplus Wy \oplus WFx \oplus WFy$ avec $\langle x, Fx \rangle = \langle y, Fy \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = p^r$, $r \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur x par multiplication par e , et sur y par multiplication par \bar{e} .

Démonstration. cf. Appendice C. □

Remarque 36. Les classes d'isomorphisme de cristaux superspéciaux avec \mathcal{O}_{E_p} -action sont classifiées par la signature.

Remarque 37. Si M satisfait $M^\vee = p^i M$ avec $i \in \mathbb{Z}$, c'est une somme de cristaux du premier type.

Définition 38. Un espace de Dieudonné unitaire \overline{M} est dit superspécial s'il vérifie $\text{Im}(F) = \text{Ker}(F) = \text{Im}(V) = \text{Ker}(V)$.

Remarque 39. Un cristal unitaire M est superspécial si et seulement si \overline{M} est superspécial. Un espace de Dieudonné unitaire superspécial est une somme directe de facteurs $k'x \oplus k'Fx$ avec $\langle x, Fx \rangle = \alpha$ (où on note encore $\alpha \in k'$ la réduction modulo p de α) et $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur x par multiplication par e ou par \bar{e} .

Proposition 40. *Un cristal unitaire de signature $(n, 0)$ est superspécial.*

Démonstration. Soit M un cristal unitaire de signature $(n, 0)$. Puisque le rang de F dans \overline{M} est n et que $M_{\bar{e}} = FM_e$, on a $FM_e = pM_{\bar{e}}$. On en déduit $F^2M = pM$, donc M est superspécial. □

2.3.3.3 Saut superspécial

Soit M un cristal unitaire supersingulier de signature $(n - 1, 1)$ et N son isocristal. On note $\tau = p^{-1}F^2$ et on définit :

$$\Lambda^+(M) = \sum_{l \geq 0} \tau^l(M) \quad \text{et} \quad \Lambda^-(M) = \bigcap_{l \geq 0} \tau^l(M)$$

$$s(M) = \inf \left\{ d \geq 0; \Lambda^+(M)_e = \sum_{l=0}^d \tau^l(M_e) \right\}.$$

Les cristaux $\Lambda^+(M)$ et $\Lambda^-(M)$ sont superspéciaux. L'entier $s(M)$ est appelé le "saut superspécial". Il est inférieur à $\frac{n-1}{2}$. D'après [Vol10] (lemme 2.2), on a les inclusions suivantes :

$$p\Lambda^+(M) \subset \Lambda^-(M) \subset M \subset \Lambda^+(M) \subset p^{-1}\Lambda^-(M).$$

De plus, l'indice $[M : \Lambda^-(M)]$ vaut $2s(M) + 1$ si $s(M) > 0$. Pour la preuve de proposition suivante, voir [VW11] théorème 2.4.

Proposition 41. *Soit M un cristal unitaire supersingulier de signature $(n - 1, 1)$. Alors :*

$$\overline{M} \simeq \overline{\mathbb{B}(r)} \times \overline{SS}^{n-r}$$

avec $r = 2s(M) + 1$. On dira que M est de type r .

Remarque 42. Si M est de type n , on a $[\Lambda^+(M) : M] = n$ et $\Lambda^+(M)^\vee = \Lambda^-(M)$.

Chapitre 3

Espace de module d'isogénies

3.1 Espace de p -isogénies

On va définir un problème de module qui paramètre les p -isogénies entre deux points de la variété de Shimura Sh_K . Soit S un \mathcal{O}_{E_p} -schéma et $\underline{A}_0 = (A_0, \overline{\lambda}_0, \iota_0, \overline{\eta}_0^p)$ et $\underline{A}_1 = (A_1, \overline{\lambda}_1, \iota_1, \overline{\eta}_1^p)$ deux S -points de Sh_K . Une p -isogénie $f : \underline{A}_0 \rightarrow \underline{A}_1$ est une $\mathcal{O}_{E, (p)}$ -isogénie $f : A_0 \rightarrow A_1$ compatible avec les structures de niveau et telle que $f^* \lambda_0 = p^c \lambda_1$ pour un entier $c \geq 0$ (le multiplicateur). On a alors $\deg(f) = p^{cn}$.

Si K^p est assez petit, il existe un \mathcal{O}_{E_p} -schéma $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$ qui paramètre les p -isogénies (modulo isogénies de degré premier à p). Comme pour la variété de Shimura Sh_K , on peut définir un problème de modules à isomorphisme près : Soit S un \mathcal{O}_{E_p} -schéma. On définit $\mathfrak{I}(S)$ comme l'ensemble des p -isogénies entre deux points de $\mathfrak{F}(S)$ (pour la définition de \mathfrak{F} , voir paragraphe 2.2). On identifie deux diagrammes s'il existe des isomorphismes faisant tout commuter. On a une flèche évidente $\mathfrak{I} \rightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$ et on montre que c'est un isomorphisme de foncteurs. On a une stratification :

$$p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} = \bigsqcup_{c \in \mathbb{N}} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)}$$

selon le multiplicateur. Alors $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)}$ est un sous-schéma fermé ouvert quasi-projectif sur \mathcal{O}_{E_p} .

Il existe deux morphismes $s, t : p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \rightarrow Sh_K$ qui envoient respectivement l'isogénie f sur sa source et son but. Les flèches s et t sont propres sur $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)}$ (voir [Moo04] 4.2.1).

Si $\underline{A} \in Sh_K(S)$, l'isogénie "multiplication par p " est $p_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \langle p \rangle \underline{A}$ (l'opérateur $\langle p \rangle$ multiplie la structure de niveau par p). En envoyant \underline{A} sur

$p_{\underline{A}}$, on définit une section de s . Puisque s est séparé, cette section est une immersion fermée et définit un sous-schéma fermé de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}$, noté $\text{Mult}(p)$ ou $\langle p \rangle$.

Sur la fibre spéciale, le morphisme de Frobenius $\mathcal{F}_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \underline{A}^{(p^2)}$ définit également une section de s et un sous-schéma fermé

$$F \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}).$$

On définit le Verschiebung $\mathcal{V}_{\underline{A}}$ de la manière suivante : C'est l'isogénie $\mathcal{V}_{\underline{A}} : A^{(p^2)} \rightarrow A$ obtenue en dualisant $\mathcal{F}_{A^\vee} : A^\vee \rightarrow A^{\vee, (p^2)} \simeq A^{(p^2), \vee}$. On a $\mathcal{V}_{\underline{A}} \circ \mathcal{F}_{\underline{A}} = p$, donc en prenant en compte les structures de niveau, c'est une p -isogénie $\mathcal{V}_{\underline{A}} : \langle p^{-2} \rangle \underline{A}^{(p^2)} \rightarrow \underline{A}$.

Enfin, on définit les lieux ordinaires et supersinguliers de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ de manière naturelle par :

$$\begin{aligned} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) &= t^{-1} \left(\overline{Sh}_K^{ord} \right) \\ p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ss} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) &= t^{-1} \left(\overline{Sh}_K^{ss} \right). \end{aligned}$$

3.2 L'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L]$

La composition des isogénies fournit un morphisme

$$c : p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times_{t,s} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \longrightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$$

où $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times_{t,s} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$ est l'ensemble des couples d'isogénies (f, g) où le but de f est égal à la source de g , ce qui permet de former $g \circ f$. Le morphisme c est propre (cf. [Moo04], 4.2.1). Soit L un corps et $\mathcal{O}_{E_p} \rightarrow L$ un morphisme d'algèbres. On note $Z_{\mathbb{Q}}(p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel sur les cycles algébriques de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L$. Un élément de $Z_{\mathbb{Q}}(p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L)$ est une somme formelle $\sum r_i Z_i$ finie où $r_i \in \mathbb{Q}$ et Z_i est un fermé irréductible de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L$. Soit Y_1, Y_2 deux fermés irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L$. On définit le produit $Y_1 \cdot Y_2$ par la formule :

$$Y_1 \cdot Y_2 = c_* (Y_1 \times_{t,s} Y_2).$$

En étendant ce produit par linéarité, on obtient une structure de \mathbb{Q} -algèbre sur $Z_{\mathbb{Q}}(p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L)$. On note $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L]$ la sous-algèbre engendrée par les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L$. Elle a été introduite dans [FC90]. Si $\kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \subset L$, on définit de la même manière $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{ord} \times L]$.

Proposition 43. *Si $\text{car}(L) = 0$, l'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L]$ est le sous-espace vectoriel engendré par les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times L$. Si $\text{car}(L) = p$, le même résultat est valable pour $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times L]$.*

Démonstration. cf [Moo04] (lemme 4.2.2) □

3.3 Un diagramme commutatif

On note $\mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) \subset \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ la \mathbb{Q} -sous-algèbre engendrée par les fonctions $1_{K_p g K_p}$ avec $g \in G(\mathbb{Q}_p) \cap \text{End}(\Lambda)$. Cette algèbre contient les coefficients de H_p . En effet, soit T le tore défini au paragraphe 1.1.2. L'isomorphisme de Satake envoie bijectivement $\mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ sur $\mathcal{H}_0(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)$ (définie de la même manière). Vues comme des fonctions sur $\widehat{T} = \{(\text{diag}(x_1, \dots, x_n), x_0)\}$, ce sont les fonctions polynomiales (i.e. de degré ≥ 0) en les x_i .

Dans [Moo04] et [BW06], on définit un morphisme de \mathbb{Q} -algèbres :

$$h : \mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) \longrightarrow \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p].$$

Soit L un corps contenant E_p et $f : \underline{A}_1 \rightarrow \underline{A}_0$ un élément de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p(L)$. On choisit deux identifications $\alpha_i : \Lambda \simeq T_p A_i$, pour $i = 0, 1$. Alors le morphisme $T_p f : T_p A_1 \rightarrow T_p A_0$ induit un endomorphisme de Λ , donc un élément $g \in G(\mathbb{Q}_p) \cap \text{End}(\Lambda)$. La double classe $\tau(f) = K_p g K_p$ ne dépend pas des choix. On montre que τ est constant sur les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p$. Alors $h(1_{K_p g K_p})$ est défini comme la somme des composantes irréductibles C telles que $\tau(C) = K_p g K_p$.

On a un morphisme de spécialisation :

$$\sigma : \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p] \longrightarrow \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$$

défini comme suit : Soit C une composante irréductible de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p$. Notons \mathcal{C} l'image schématique de C par le morphisme $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p \hookrightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$. Alors $\sigma(C)$ est le cycle de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ associé au sous-schéma fermé $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. La spécialisation d'un cycle revient donc à prendre son adhérence dans le modèle entier, puis à l'intersecter avec la fibre spéciale. On construit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}_0(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) & \xrightarrow{h} & \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times E_p] \\
 \downarrow \dot{S}_M^G & & \downarrow \sigma \\
 & & \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] \\
 & & \downarrow \text{ord} \\
 \mathcal{H}_0(M(\mathbb{Q}_p)//L) & \xrightarrow[\bar{h}]{} & \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]
 \end{array} \tag{3.3.1}$$

Le groupe M est le fixateur de la norme du cocaractère minuscule μ , et $L = K_p \cap M(\mathbb{Q}_p)$. Le morphisme ord intersecte un cycle avec le lieu ordinaire. On renvoie à [Moo04] ou [BW06] pour la définition des morphismes \dot{S}_M^G et \bar{h} . Toutes les flèches sont des morphismes de \mathbb{Q} -algèbres. Le grand carré est commutatif. Dans ce contexte, la relation de congruence désigne la conjecture suivante :

Conjecture 44 (RDC). *Considérons le polynôme de Hecke H_p dans l'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})][t]$ à travers $\sigma \circ h$. Alors F est dans le centre de cette algèbre, et on a la relation*

$$H_p(F) = 0.$$

Cette conjecture généralise la relation de congruence d'Eichler-Shimura. Dans [Moo04], l'auteur démontre un résultat plus faible, la relation de congruence sur le lieu ordinaire :

Théorème 45 (RDC ordinaire). *Considérons le polynôme de Hecke H_p dans l'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})][t]$ à travers $\text{ord} \circ \sigma \circ h$. Dans cette algèbre, on a la relation*

$$H_p(F) = 0.$$

O. Bültel a prouvé que le polynôme H_p annule dans $\mathcal{H}_0(M(\mathbb{Q}_p)//L)$ un élément envoyé sur le Frobenius $F \in \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ par \bar{h} . Le résultat provient alors de la commutativité du diagramme (3.3.1). Dans certains cas, le théorème 45 implique la conjecture 44. Par exemple si le lieu ordinaire de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}$ est dense, alors on a clairement $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] = \mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ et la relation de congruence en découle. C'est le cas pour les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires $GU(n-1, 1)$ quand n est pair (cf. [BW06]).

Remarque 46. Dans le cas unitaire impair, $H_p = R(t) \cdot (t - p^{n-1} \langle p \rangle)$ (voir théorème 13). On peut montrer que R annule F dans $\mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{\text{ord}} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ (voir paragraphe 6.4 pour $n = 3$). Plus généralement, T. Wedhorn a calculé le polynôme minimal de F sur le lieu ordinaire dans le cas PEL ([Wed00] 2.10).

Dans le chapitre 7, on prouve la conjecture 44 pour les groupes unitaires en signature $(n - 1, 1)$ avec n impair. Le facteur $(F - p^{n-1} \langle p \rangle)$ joue un rôle crucial car il annule les composantes non-ordinaires de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. Plus généralement, on peut se demander si le polynôme de Hecke se factorise toujours sous la forme $H_p = R.Q$ avec R le polynôme minimal du Frobenius sur le lieu ordinaire, et $Q(F)$ appartenant à l'idéal annulateur du noyau du morphisme ord. Ceci semble être le cas également pour les variétés de Hilbert-Blumenthal.

Enfin, si on remplace les coefficients de H_p (vus comme des cycles) par l'adhérence de leur partie ordinaire, on obtient un nouveau polynôme H'_p qui annule F dans $\mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$. On montrera dans le cas $n = 3$ que $H_p \neq H'_p$ (chapitre 8), ce qui assure que la relation $H_p(F) = 0$ démontrée au chapitre 7 est non-triviale.

Chapitre 4

Immeuble de $GU(3)$

4.1 Définition de l'immeuble

Dans ce chapitre, (V, ψ) est un E_p/\mathbb{Q}_p -espace hermitien de dimension 3. On pose $q = p^2$. On note $G = GU(V, \psi)$ le groupe des similitudes unitaires et $S = U(V, \psi)$ le groupe unitaire de (V, ψ) . On dira qu'une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$ est une base de Witt si e_0 est anisotrope et (e_1, e_{-1}) hyperbolique. Une E_p -norme ultramétrique presque-autoduale sur (V, ψ) est une fonction $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. Pour tout $v \in V$ et $\lambda \in E_p$, on a $\alpha(\lambda v) = |\lambda|\alpha(v)$.
2. Pour tous $x, y \in V$, on a $\alpha(x + y) \leq \max(\alpha(x), \alpha(y))$.
3. Il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\alpha^\vee = r\alpha$ où

$$\forall x \in V, \quad \alpha^\vee(x) = \sup_{y \in V - \{0\}} \frac{|\psi(x, y)|}{\alpha(y)}.$$

De plus, on dit que α est autoduale si $\alpha^\vee = \alpha$.

Définition 47. On note $\mathcal{I}(G)$ l'ensemble des E_p -normes ultramétriques presque-autoduales sur (V, ψ) et on l'appelle l'immeuble de G . On note $\mathcal{I}(S)$ l'ensemble des E_p -normes ultramétriques autoduales sur (V, ψ) et on l'appelle l'immeuble de S .

On a une bijection $\mathcal{I}(S) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}(G)$ définie par $(\alpha, t) \mapsto q^t \alpha$. Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $\alpha \in \mathcal{I}(G)$, on définit $g.\alpha$ par $\forall v \in V, \quad g.\alpha(v) = \alpha(g^{-1}v)$. On a $(g.\alpha)^\vee = |\nu(g)|g.(\alpha^\vee)$ où ν est le rapport de similitude. Ceci définit une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{I}(G)$ et par restriction de $S(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{I}(S)$. On a $G(\mathbb{Q}_p) = S(\mathbb{Q}_p)E_p^\times$ (voir (1.1.4)). Un élément $e \in E_p^\times$ agit sur $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(S) \times \mathbb{R}$ par translation de $\text{val}_p(e)$ sur le deuxième facteur.

Définition 48. Soit $\alpha \in \mathcal{I}(S)$. Une base de décomposition de α est une base de Witt (e_0, e_1, e_{-1}) de V telle que

1. On a $\alpha(e_0) = |\psi(e_0, e_0)|^{\frac{1}{2}}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(e_1) = q^{-\lambda}$ et $\alpha(e_{-1}) = q^\lambda$.
2. Pour $v = a_0e_0 + a_1e_1 + a_{-1}e_{-1}$, avec $a_i \in E_p$, on a $\alpha(v) = \sup_{i \in \{-1, 0, 1\}} (|a_i| \alpha(e_i))$.

Le réel λ est le paramètre de α dans la base de décomposition (e_0, e_{-1}, e_1) . Quitte à multiplier e_0 par un scalaire, on peut supposer $\psi(e_0, e_0) = 1$ ou p (selon le déterminant de ψ).

Proposition 49. *Tout $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ admet une base de décomposition. Soit α et α' deux normes de $\mathcal{I}(S)$. Il existe une base de décomposition commune pour α et α' .*

Démonstration. cf. [BT87], théorème 2.12. □

Définition 50. Soit \mathcal{B} une base de Witt de V . L'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ associé à \mathcal{B} est l'ensemble des $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ telles que \mathcal{B} est une base de décomposition de α .

A chaque norme $\alpha \in \mathcal{I}(S)$, on associe un drapeau de boules $B^*(\alpha) = \{B(\alpha \leq q^\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ avec $B(\alpha \leq q^\theta) = \{v \in V, \alpha(v) \leq q^\theta\}$. La boule $B(\alpha \leq q^\theta)$ est un réseau de V . Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a les relations suivantes :

$$B(\alpha \leq q^{\theta-1}) = pB(\alpha \leq q^\theta) \quad (4.1.1)$$

$$B(\alpha^\vee \leq q^\theta) = B(\alpha < q^{1-\theta})^\vee \quad (4.1.2)$$

où le dual L^\vee d'un réseau L est défini par $L^\vee = \{x \in V, \forall y \in L, \psi(x, y) \in \mathcal{O}_{E_p}\}$.

Définition 51. On dit qu'un réseau $L \subset V$ est autodual si $L^\vee = L$. On dit qu'il est presque autodual si $pL^\vee \subset L \subset L^\vee$. On dit que L est presque autodual strict si $pL^\vee \subsetneq L \subsetneq L^\vee$

Soit $\mathcal{R}(V)$ l'ensemble des \mathcal{O}_{E_p} -réseaux de V . C'est un ensemble ordonné par l'inclusion, telle que toute partie majorée (resp. minorée) possède une borne supérieure (resp. inférieure). Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(V))$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}(V)$. On a une injection

$$\varpi : \mathcal{I}(S) \hookrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(V)) \quad (4.1.3)$$

envoyant la norme α sur la fonction $\theta \mapsto B(\alpha \leq q^\theta)$. Cette injection est $S(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante et son image est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(V))$ vérifiant les conditions suivantes :

1. La fonction f est croissante.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta - 1) = pf(\theta)$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(1 - \theta)^\vee = \sup_{\theta' < \theta} f(\theta')$.

On dira que f est une fonction norme. Une telle fonction est continue à droite (grâce à 3.), au sens où si $(\theta_n)_n$ est une suite de réels qui décroît vers θ , alors $f(\theta_n) = f(\theta)$ pour n assez grand. Si f est la fonction norme de $\alpha \in \mathcal{I}(S)$, on retrouve α par la formule :

$$\forall v \in V, \quad \log_q \alpha(v) = \inf \{ \theta; v \in f(\theta) \}.$$

Si $f, f' \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(V))$ sont des fonctions normes qui coïncident sur $[0, \frac{1}{2}[$, alors $f = f'$. On a donc aussi une injection $S(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$\varpi' : \mathcal{I}(S) \hookrightarrow \mathcal{F}([0, \frac{1}{2}[, \mathcal{R}(V))$$

et l'image de ϖ' est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}([0, \frac{1}{2}[, \mathcal{R}(V))$ vérifiant les conditions :

1. La fonction f est croissante, continue à droite.
2. Le réseau $f(0)$ est presque autodual.
3. Pour tous $\theta, \theta' \in [0, \frac{1}{2}[$, $f(\theta) \subset f(\theta')^\vee$.

Désormais, on fixe un espace hermitien (V, ψ) tel que $\det(\psi) = 1$ dans $\frac{\mathbb{Q}_p^\times}{N(E_p^\times)} = \{1, p\}$. Dans la définition 48, on supposera alors $\psi(e_0, e_0) = 1$.

Si $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$ est une base de Witt et $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on note $(a, b, c)_\mathcal{B}$ le réseau $p^a \mathcal{O}_{E_p} e_0 + p^b \mathcal{O}_{E_p} e_1 + p^c \mathcal{O}_{E_p} e_{-1}$. Si α_λ est la norme de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ dans la base \mathcal{B} , alors la fonction $f_\lambda = \varpi(\alpha_\lambda)$ associée à α_λ par (4.1.3) est :

$$f_\lambda(\theta) = (-[\theta], -[\theta + \lambda], -[\theta - \lambda])_\mathcal{B} \quad (4.1.4)$$

où $[x]$ est la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la proposition 49 affirme en particulier que toute fonction norme $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(V))$ est de cette forme.

Soit \sim la relation d'équivalence définie par $\forall \alpha, \alpha' \in \mathcal{I}(S)$, $\alpha \sim \alpha' \iff B^*(\alpha) = B^*(\alpha')$. On note $\text{cl}(\alpha)$ la classe d'équivalence de $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ pour cette relation.

Définition 52. On dit que $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ est un sommet si $\text{cl}(\alpha) = \{\alpha\}$. On note $|\mathcal{I}(S)|$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{I}(S)$. Les autres classes d'équivalence sont les arêtes. Si X est une arête et $B^*(X)$ est son drapeau de boules, les extrémités de X sont les normes $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ telles que $B^*(\alpha) \subset B^*(X)$. Deux sommets distincts sont voisins s'ils sont extrémités d'une même arête.

Une base $\mathcal{B} = (x_i)_i$ de V est dite adaptée à un ensemble $\Sigma \subset \mathcal{R}(V)$ si pour tout réseau $L \in \Sigma$, il existe $(n_i)_i \in \mathbb{Z}$ tels que $(p^{n_i} x_i)_i$ est une base de L .

Lemme 53. *Soit $\alpha \in \mathcal{I}(S)$. L'ensemble des bases de Witt \mathcal{B} telles que $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ est égal à l'ensemble des bases de Witt adaptées à $B^*(\alpha)$.*

Démonstration. Soit $f = \varpi(\alpha)$ et \mathcal{B} une base de Witt adaptée à $B^*(\alpha)$. On peut donc écrire $f(\theta) = (a(\theta), b(\theta), c(\theta))_{\mathcal{B}}$ avec des fonctions $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$. Puisque f est continue à droite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ minimal tel que $c(\lambda) = 0$. Soit f_{λ} la fonction associée à la norme de paramètre λ dans \mathcal{B} . Il est facile de voir que $f = f_{\lambda}$, d'où le résultat. \square

Par conséquent, deux normes équivalentes appartiennent aux mêmes appartements. Soit \mathcal{B} une base de Witt et α_{λ} la norme de paramètre λ dans \mathcal{B} . L'ensemble $B^*(\alpha)$ est une réunion de classes d'homothéties :

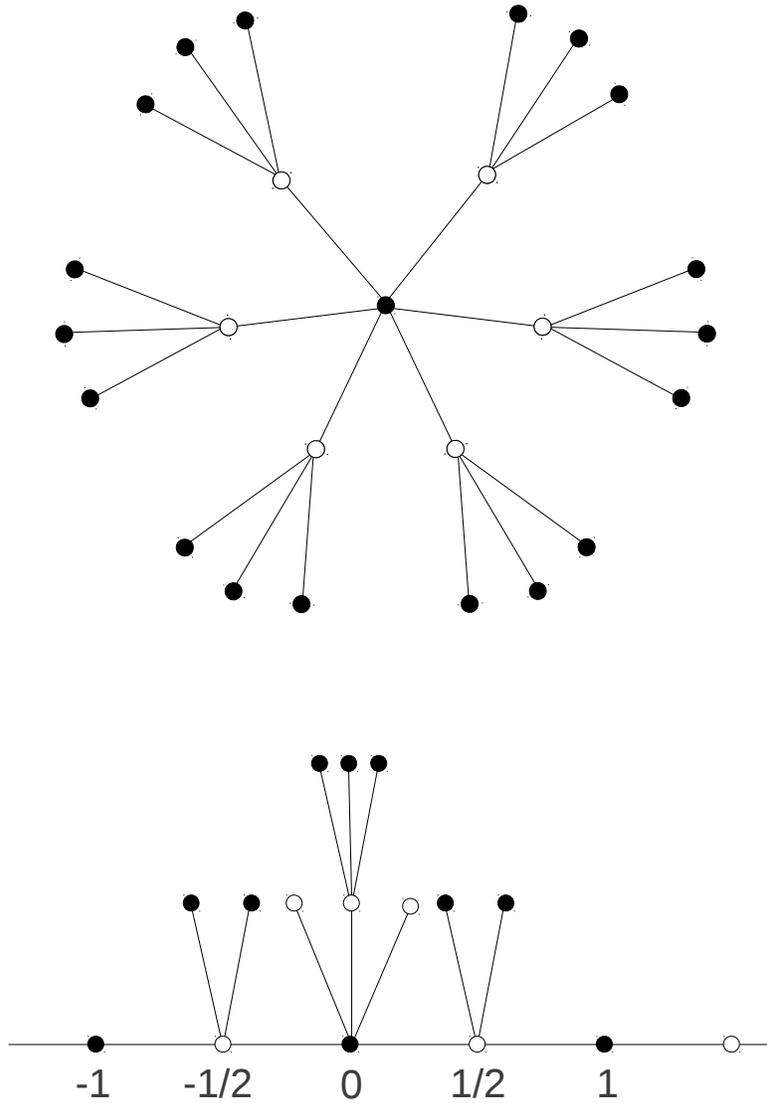
$$\begin{aligned} B^*(\alpha_0) &= p^{\mathbb{Z}}(0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ B^*(\alpha_{\frac{1}{2}}) &= p^{\mathbb{Z}}(0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \sqcup p^{\mathbb{Z}}(0, -1, 0)_{\mathcal{B}} \\ B^*(\alpha_{\lambda}) &= p^{\mathbb{Z}}(0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \sqcup p^{\mathbb{Z}}(0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \sqcup p^{\mathbb{Z}}(0, -1, 0)_{\mathcal{B}} \quad \text{si } \lambda \in]0, \frac{1}{2}[. \end{aligned}$$

Les sommets de $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ sont les $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Les arêtes sont les intervalles $X_{\lambda} =]\lambda, \lambda + \frac{1}{2}[$ avec $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et les extrémités de X_{λ} sont $\{\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\}$. Le groupe $S(\mathbb{Q}_p)$ agit sur l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes. Munie de la relation de voisinage de la définition 52, $|\mathcal{I}(S)|$ est un graphe connexe (car les appartements le sont).

Définition 54. Les sommets $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ tels que $B^*(\alpha)$ soit constitué d'une seule classe d'homothétie sont dits hyperspéciaux. Les autres sommets sont dits spéciaux.

On note Hyp (resp. Sp) l'ensemble des sommets hyperspéciaux (resp. spéciaux). C'est l'ensemble des normes de paramètre $\lambda \in \mathbb{Z}$ (resp. $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$) dans un appartement.

Voici deux représentations de $\mathcal{I}(S)$:



Le nombre de sommets voisins n'est pas respecté sur le dessin, et on a représenté que certains sommets. Dans le deuxième dessin, on a fixé un appartement \mathcal{A} , qu'on identifie à \mathbb{R} .

Proposition 55. *Les sommets hyperspéciaux de $\mathcal{I}(S)$ sont conjugués par l'action du groupe $S(\mathbb{Q}_p)$ sur l'immeuble. Ceci vaut également pour les sommets spéciaux.*

Démonstration. Soit α, α' deux sommets de même type, et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$ (resp. $\mathcal{B}' = (e'_0, e'_1, e'_{-1})$) une base de décomposition de α (resp. α'). On peut supposer que α et α' ont même paramètre dans leurs bases respectives. Alors l'endomorphisme g de V défini par $g(e_i) = e'_i$ est dans $S(\mathbb{Q}_p)$ et $g.\alpha = \alpha'$. \square

Il y a donc deux $S(\mathbb{Q}_p)$ -orbites de sommets (mais une seule orbite d'arêtes). Si α est un sommet de $\mathcal{I}(S)$ et $f = \varpi(\alpha)$, la fonction f est constante sur $[0, \frac{1}{2}]$. On a donc une injection $S(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$\varpi_0 : |\mathcal{I}(S)| \hookrightarrow \mathcal{R}(V) \quad (4.1.5)$$

définie par $\alpha \mapsto \varpi(\alpha)(0) = B(\alpha \leq 1)$.

Proposition 56. *L'image de ϖ_0 est l'ensemble des réseaux presque autoduaux. L'image de Hyp (resp. Sp) est l'ensemble des réseaux autoduaux (resp. presque autoduaux stricts).*

Démonstration. Soit L un réseau presque autodual. Alors la fonction constante $f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathcal{R}(V)$ est une fonction norme telle que $f(0) = L$. Le reste est évident. \square

Soit $\alpha \in \mathcal{I}(S)$ et $g \in S(\mathbb{Q}_p)$. Alors $g.\alpha = \alpha$ si et seulement si $g.\varpi(\alpha) = \varpi(\alpha)$. Si $\alpha \in |\mathcal{I}(S)|$ et $g \in S(\mathbb{Q}_p)$, alors $g.\alpha = \alpha$ si et seulement si $g(L) = L$ où $L = B(\alpha \leq 1)$. On constate que c'est encore vrai pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$. Par conséquent, les stabilisateurs dans $G(\mathbb{Q}_p)$ des sommets hyperspéciaux (resp. spéciaux) de $\mathcal{I}(S)$ sont conjugués et ce sont les stabilisateurs des réseaux autoduaux (resp. presque autoduaux stricts) de V . On les appelle compacts hyperspéciaux (resp. spéciaux).

4.2 Géométrie de l'immeuble

Si $L, L' \in \mathcal{R}(V)$, on définit l'entier $\delta(L, L')$ par

$$\delta(L, L') = \min(k \geq 0, \exists n \in \mathbb{Z}, p^{k+n}L \subset L' \subset p^n L). \quad (4.2.1)$$

Les réseaux L, L' sont homothétiques si et seulement si $\delta(L, L') = 0$. Si $\delta(L, L') = 1$ alors $L \subset L'$ ou $L' \subset L$. On plonge $|\mathcal{I}(S)|$ dans $\mathcal{R}(V)$ par (4.1.5). Alors δ est une distance sur $|\mathcal{I}(S)|$. L'action de $S(\mathbb{Q}_p)$ sur $|\mathcal{I}(S)|$ preserve δ .

Deux sommets $x, y \in |\mathcal{I}(S)|$ sont voisins si et seulement si $\delta(x, y) = 1$. Un chemin de longueur n dans un graphe est une suite de points x_0, \dots, x_n tels que x_i et x_{i+1} sont voisins pour $i = 0, \dots, n-1$. Dans un graphe connexe, on définit la distance géodésique entre deux sommets comme la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets.

Lemme 57. *Soit $x, y \in |\mathcal{I}(S)|$. Alors la distance géodésique dans $|\mathcal{I}(S)|$ de x à y est $\delta(x, y)$. On dit que δ est une distance géodésique.*

Démonstration. Il est clair que la distance δ est inférieure à la distance géodésique. Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$ base de Witt telle que $x, y \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, de paramètre $\lambda, \mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ respectivement. D'après (4.1.4), on a $\varpi_0(x) = (0, -[\lambda], -[-\lambda])_{\mathcal{B}}$ et $\varpi_0(y) = (0, -[\mu], -[-\mu])_{\mathcal{B}}$. On en déduit :

$$\delta(x, y) = |[\lambda] - [\lambda']| + |[-\lambda] - [-\lambda']|.$$

Cette expression est égale à $2|\lambda - \lambda'|$. Or le segment joignant x et y dans l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, est de longueur $2|\lambda - \lambda'| = \delta(x, y)$, d'où le résultat. \square

Lemme 58. *Soit $x, y, z \in |\mathcal{I}(S)|$ tels que $\delta(x, y) + \delta(y, z) = \delta(x, z)$. Tout appartement contenant x et z contient aussi y .*

Démonstration. Notons $d = \delta(x, y)$ et $d' = \delta(y, z)$. Soit \mathcal{B} une base de Witt de V telle que $x, z \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Supposons d'abord que x, y, z sont des sommets hyperspéciaux. Alors d, d' sont pairs et on peut supposer

$$\begin{aligned} \varpi_0(x) &= (0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ \varpi_0(z) &= (0, \frac{d+d'}{2}, -\frac{d+d'}{2})_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

En notant $L = \varpi_0(y)$, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{aligned} p^{k+d}\varpi_0(x) &\subset L \subset p^k\varpi_0(x) \\ p^{k'+d'}\varpi_0(z) &\subset L \subset p^{k'}\varpi_0(z). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

En prenant le dual dans les inclusions ci-dessus, on montre que $k = -\frac{d}{2}$ et $k' = -\frac{d'}{2}$. Les inclusions (4.2.2) deviennent :

$$\begin{aligned} (\frac{d}{2}, \frac{d}{2}, \frac{d}{2})_{\mathcal{B}} &\subset L \subset (-\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2})_{\mathcal{B}} \\ (\frac{d'}{2}, \frac{d+2d'}{2}, -\frac{d}{2})_{\mathcal{B}} &\subset L \subset (-\frac{d'}{2}, \frac{d}{2}, -\frac{d+2d'}{2})_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

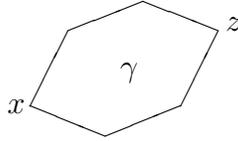
On en déduit que $L = (0, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2})_{\mathcal{B}}$, donc $y \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Le cas où x et z sont hyperspéciaux et y spécial se traite de manière analogue. Enfin, les autres cas s'en déduisent facilement, sans calcul. \square

Corollaire 59. *Soit $x, z \in |\mathcal{I}(S)|$. Il existe une unique géodésique dans $|\mathcal{I}(S)|$ joignant x et z .*

Démonstration. Soit \mathcal{A} un appartement contenant x et z . Alors tout point y d'une géodésique reliant x et z vérifie les hypothèses du lemme 58, ce qui montre le résultat. \square

Corollaire 60. *Le graphe $|\mathcal{I}(S)|$ est un graphe connexe, sans cycle.*

Démonstration. On sait déjà que $|\mathcal{I}(S)|$ est connexe. Par l'absurde, supposons qu'il existe un cycle γ , et prenons-le de longueur minimale. La longueur de γ est nécessairement paire, disons égale à $2d$. Soit x un sommet de γ , et z le sommet qui lui est diamétralement opposé sur le cycle γ (cf. dessin 1 ci-dessous pour le cas $d = 3$). Les deux chemins consistant à parcourir γ dans le sens horaire et le sens trigonométrique sont des géodésiques. D'après le corollaire 59, ces chemins coïncident. Contradiction.



dessin 1

\square

Calculons le nombre de voisins d'un sommet de $|\mathcal{I}(S)|$. Les sommets hyperspéciaux ont tous le même nombre de voisins car ils sont conjugués sous l'action de $S(\mathbb{Q}_p)$, et il en est de même pour les sommets spéciaux.

Lemme 61. *Soit x un sommet hyperspécial et y un sommet spécial. Soit $L_0 = \varpi_0(x)$ et $L_1 = \varpi_0(y)$. Alors x et y sont voisins si et seulement si*

$$\dots \subset pL_0 \subset pL_1^\vee \subset L_1 \subset L_0 \subset L_1^\vee \subset \dots \quad (4.2.3)$$

Démonstration. Si L_0 et L_1 vérifient ces inclusions, on a $\delta(x, y) = 1$ donc x, y sont voisins. Réciproquement, soit x, y respectivement de paramètre $0, \frac{1}{2}$ dans un appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ (\mathcal{B} une base de Witt), alors $L_0 = (0, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ et $L_1 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}}$, avec $L_0 = \varpi_0(x)$ et $L_1 = \varpi_0(y)$. On vérifie facilement les inclusions (4.2.3). De même, si y est de paramètre $-\frac{1}{2}$, alors $L_1 = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ et on fait le même constat. \square

Soit $x \in \mathcal{I}(S)$ et $L = \varpi_0(x)$. C'est un réseau presque autodual. La forme hermitienne ψ définit des accouplements parfaits

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_0 : \frac{L}{pL} \times \frac{L^\vee}{pL^\vee} &\longrightarrow \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \\ \overline{\psi}_1 : \frac{L^\vee}{L} \times \frac{L^\vee}{L} &\longrightarrow \frac{p^{-1}\mathcal{O}_{E_p}}{\mathcal{O}_{E_p}} \simeq \kappa(\mathcal{O}_{E_p}). \end{aligned}$$

- Soit $x \in \text{Hyp}$ et $L_0 = \varpi_0(x)$. Les sommets de $\mathcal{I}(S)$ voisins de x sont en bijection avec les réseaux presque autoduaux stricts L_1 vérifiant les inclusions (4.2.3). Ceux-ci sont en bijection avec les sous-espaces vectoriels totalement isotropes de $\left(\frac{L_0}{pL_0}, \overline{\psi}_0\right)$ de dimension 1.
- Soit $y \in \text{Sp}$ et $L_1 = \varpi_0(y)$. Les sommets de $\mathcal{I}(S)$ voisins de y sont en bijection avec les réseaux autoduaux L_0 vérifiant les inclusions (4.2.3). Ceux-ci sont en bijection avec les sous-espaces vectoriels totalement isotropes de $\left(\frac{L_1^\vee}{L_1}, \overline{\psi}_1\right)$ de dimension 1.

Fait 62. *Soit W un espace hermitien non dégénéré de dimension 2 (resp. 3) sur \mathbb{F}_{p^2} . Le nombre de droites isotropes de W est $p+1$ (resp. p^3+1).*

Corollaire 63. *Un sommet hyperspécial (resp. spécial) de $\mathcal{I}(S)$ possède p^3+1 (resp. $p+1$) voisins.*

4.3 Action de l'algèbre de Hecke

Soit $x_0 \in \text{Hyp}$ et $K_p = \{g \in G(\mathbb{Q}_p), g.x_0 = x_0\}$. Si X est un ensemble, on note $\mathbb{Q}[X]$ l'espace vectoriel sur X . Si X est un groupe, $\mathbb{Q}[X]$ est une \mathbb{Q} -algèbre. $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$ est un $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]$ -module à gauche. Se donner un endomorphisme $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]$ -linéaire φ de $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$ revient à se donner $\varphi(K_p) \in \mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$, invariant par l'action à gauche de K_p sur $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$. Par ailleurs, on a un morphisme de groupes injectif :

$$\mathbb{Q}[K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p)/K_p] \longrightarrow \mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p] \quad (4.3.1)$$

défini ainsi : Si $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $K_p g K_p = \bigsqcup g_i K_p$ avec $g_i \in G(\mathbb{Q}_p)$; alors l'élément $K_p g K_p$ est envoyé sur $\sum g_i K_p$. L'image de (4.3.1) est précisément l'ensemble des éléments K_p -invariants de $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$. Par conséquent, on a des identifications :

$$\text{End}_{\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]) = \mathbb{Q}[K_p \backslash G(\mathbb{Q}_p)/K_p] = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p). \quad (4.3.2)$$

Les identifications (4.3.2) sont compatibles avec l'addition et la multiplication. En effet, soit $g, g' \in G(\mathbb{Q}_p)$ tels que $K_p g K_p = \bigsqcup g_i K_p$ et $K_p g' K_p = \bigsqcup g'_j K_p$ avec $g_i, g'_j \in G(\mathbb{Q}_p)$. Alors on a l'égalité

$$1_{K_p g K_p} \star 1_{K_p g' K_p} = \sum_{i,j} 1_{g_i g'_j K_p} \quad (4.3.3)$$

(voir [Bül02] page 136). Soit φ, φ' les endomorphismes de $\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]$ associés respectivement à $1_{K_p g K_p}$ et $1_{K_p g' K_p}$ par (4.3.2). Alors $\varphi(K_p) = \sum_i g_i K_p$ et

$\varphi'(K_p) = \sum_j g'_j K_p$ On en déduit :

$$\varphi \circ \varphi'(K_p) = \varphi \left(\sum_j g'_j K_p \right) = \sum_j g'_j \cdot \varphi(K_p) = \sum_{i,j} g'_j g_i K_p.$$

Puisque l'algèbre de Hecke est commutative d'après le théorème de Satake, cette expression coïncide avec (4.3.3).

L'ensemble $G(\mathbb{Q}_p)/K_p$ s'identifie avec la $G(\mathbb{Q}_p)$ -orbite de x_0 dans $\mathcal{I}(G) \simeq \mathcal{I}(S) \times \mathbb{R}$, qui est $\text{Hyp} \times \mathbb{Z}$. On obtient une action de $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ sur $\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]$.

4.4 Isomorphisme de Satake et immeubles

Dans la suite, on fixe une base de Witt $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1})$. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, T le tore maximal de G formé par les matrices diagonales dans \mathcal{B} . Soit B le sous-groupe de Borel G formé par les matrices triangulaires supérieures dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_0, e_{-1})$, et U le sous-groupe unipotent de B . Soit x_0 la norme de paramètre 0 dans \mathcal{B} et $K_p = \{g \in G(\mathbb{Q}_p), g.x_0 = x_0\}$, $L = K_p \cap B(\mathbb{Q}_p)$ et $T_c = K_p \cap T(\mathbb{Q}_p)$. On peut constater que $U(\mathbb{Q}_p) = \{g \in S(\mathbb{Q}_p), g.x_k = x_k \text{ pour } k \gg 0\}$ où x_k est le sommet de paramètre k de \mathcal{A} .

Le diagramme (1.2.5) définit des morphismes de \mathbb{Q} -algèbres :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) \xrightarrow{|B} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(B(\mathbb{Q}_p)//L) \xrightarrow{S} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c).$$

On a les identifications suivantes (voir (4.3.2)).

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) = \text{End}_{\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)/K_p]) \quad (4.4.1)$$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(B(\mathbb{Q}_p)//L) = \text{End}_{\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)/L]) \quad (4.4.2)$$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c) = \text{End}_{\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)/T_c]). \quad (4.4.3)$$

Par la décomposition d'Iwasawa, $G(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p)K_p$, donc

$$G(\mathbb{Q}_p)/K_p = B(\mathbb{Q}_p)/L = \text{Hyp} \times \mathbb{Z}.$$

Le morphisme $|_B$ induit l'injection canonique :

$$\text{End}_{\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]).$$

Puisque $G(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p)K_p = U(\mathbb{Q}_p)T(\mathbb{Q}_p)K_p$, chaque $U(\mathbb{Q}_p)$ -orbite de $\text{Hyp} \times \mathbb{Z}$ possède un représentant dans $(\mathcal{A} \cap \text{Hyp}) \times \mathbb{Z} = T(\mathbb{Q}_p).x_0$. Ce représentant est unique. En effet, si $t, t' \in T(\mathbb{Q}_p), u \in U(\mathbb{Q}_p)$ tels que $ut.x_0 = t'.x_0$, alors $t'^{-1}ut \in K_p$; donc les coefficients diagonaux de $t'^{-1}t$ sont dans $\mathcal{O}_{E_p}^{\times}$ d'où $t'^{-1}t \in K_p$ i.e $t.x_0 = t'.x_0$. On a donc :

$$T(\mathbb{Q}_p)/T_c = T(\mathbb{Q}_p).x_0 = U(\mathbb{Q}_p) \backslash (\text{Hyp} \times \mathbb{Z}). \quad (4.4.4)$$

Lemme 64. *Soit B un groupe et $U \triangleleft B$ un sous-groupe distingué. Soit X un ensemble muni d'une action à gauche de B . Alors B agit sur $U \backslash X$, et on a un morphisme d'anneaux*

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathbb{Q}[B]}(\mathbb{Q}[X]) &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}[B]}(\mathbb{Q}[U \backslash X]) \\ f &\longmapsto (Ux \mapsto \Pi(f(x))) \end{aligned}$$

où Π est l'application évidente $\mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[U \backslash X]$.

Démonstration. Puisque $U \triangleleft B$, le groupe B agit sur $U \backslash X$ de manière évidente. L'application ci-dessus est bien définie : Si $u \in U, x \in X$ alors $\Pi(f(u.x)) = \Pi(u.f(x)) = \Pi(f(x))$. On vérifie de manière élémentaire que c'est un morphisme d'anneaux. \square

Remarquer dans le lemme 64 que si $T \subset G$ est un sous-groupe tel que $B = TU$, alors $\text{End}_{\mathbb{Q}[B]}(\mathbb{Q}[U \backslash X]) = \text{End}_{\mathbb{Q}[T]}(\mathbb{Q}[U \backslash X])$. En utilisant (4.4.4), on en déduit un morphisme de \mathbb{Q} -algèbres :

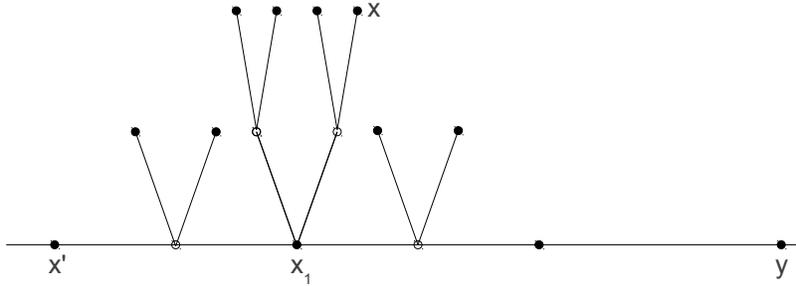
$$\text{End}_{\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)/L]) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)/T_c]). \quad (4.4.5)$$

A travers les identifications (4.4.2) et (4.4.3), c'est le morphisme \mathcal{S} . Justifions brièvement ce fait. Soit $b = tu \in B(\mathbb{Q}_p)$ avec $t \in T(\mathbb{Q}_p)$ et $u \in U(\mathbb{Q}_p)$. Soit $(b_i) \in B(\mathbb{Q}_p)$ tels que $LbL = \bigsqcup_{i=1}^N b_iL$. L'élément $1_{LbL} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(B(\mathbb{Q}_p)//L)$ correspond à l'endomorphisme $\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)]$ -linéaire f de $\mathbb{Q}[B(\mathbb{Q}_p)/L]$ tel que $f(L) = \sum_{i=1}^N b_iL$. Par l'application $B(\mathbb{Q}_p)/L \rightarrow U(\mathbb{Q}_p) \setminus (B(\mathbb{Q}_p)/L) = T(\mathbb{Q}_p)/T_c$, tous les b_i sont envoyés sur t . Par le morphisme (4.4.5), f est envoyé sur l'endomorphisme de $\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)/T_c]$ tel que $T_c \mapsto NtT_c$, qui correspond à $N1_{tT_c} \in \mathcal{H}(T(\mathbb{Q}_p)//T_c)$. Par ailleurs,

$$\mathcal{S}(1_{LbL}) = [L : L \cap bLb^{-1}] 1_{tT_c}.$$

On peut supposer que $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $b_i = l_i b$ avec $l_i \in L$. Les (l_i) forment un système de représentants de $L/L \cap bLb^{-1}$. En effet, soit $l \in L$, il existe i tel que $lbL = b_iL$, c'est-à-dire $b^{-1}l_i^{-1}lb \in L$ d'où $l_i^{-1}l \in L \cap bLb^{-1}$. Enfin, si $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que $l_i^{-1}l_j \in L \cap bLb^{-1}$ alors $b_i^{-1}b_j \in L$ donc $i = j$. D'où $[L : L \cap bLb^{-1}] = N$.

La bijection $(\mathcal{A} \cap \text{Hyp}) \times \mathbb{Z} = U(\mathbb{Q}_p) \setminus (\text{Hyp} \times \mathbb{Z})$ (voir (4.4.4)) induit une rétraction $\text{Hyp} \times \mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{A} \cap \text{Hyp}) \times \mathbb{Z}$. Soit $x \in \text{Hyp}$, il existe $u \in U(\mathbb{Q}_p)$ tel que $u.x = x' \in \mathcal{A}$. Soit x_1 la projection de x sur \mathcal{A} . Le groupe U est le fixateur point par point d'un voisinage de $+\infty$ dans \mathcal{A} . Prenons un point y de \mathcal{A} "très loin", fixé par u . Alors on a $\delta(y, x) = \delta(u.y, u.x) = \delta(y, x')$. Il y a deux points x' de \mathcal{A} vérifiant ceci, mais l'un des deux dépend de y . Ainsi x' est le point de \mathcal{A} tel que $\delta(y, x) = \delta(y, x')$ pour tout $y \in \mathcal{A}$ de paramètre assez grand (voir dessin ci-dessous).



On dira que x "se rabbat" sur x' . Calculons l'isomorphisme de Satake. Soit $g = \text{diag}(1, p, p^{-1}) \in S(\mathbb{Q}_p)$ dans la base \mathcal{B} . L'opérateur $1_{K_p g K_p}$ envoie x_0 sur la somme formelle des points de la K_p -orbite de $g.x$. On montre facilement :

$$1_{K_p g K_p} . x_0 = \sum_{\delta(x, x_0)=2} x.$$

L'endomorphisme $\mathcal{S}(f) \in \text{End}_{\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[T(\mathbb{Q}_p)/T_c])$ se calcule en réduisant modulo U . Notons x' l'unique élément de \mathcal{A} dans la même U -orbite que $x \in \text{Hyp}$. On a donc :

$$\mathcal{S}(f).x_0 = \sum_{\delta(x,x_0)=2} x'. \quad (4.4.6)$$

Notons x_λ le sommet de \mathcal{A} de paramètre $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Dans la somme (4.4.6), apparaissent uniquement les sommets x_{-1}, x_0 et x_1 .

- Le sommet x_1 apparaît avec multiplicité 1.
- Le sommet x_0 apparaît avec multiplicité $p + 1 - 2 = p - 1$. En effet, les sommets rabattus sur x_0 sont les voisins de $x_{\frac{1}{2}}$ autres que x_0 et x_1 .
- Le sommet x_{-1} apparaît avec multiplicité $1 + (p - 1) + p(p^3 - 1) = p^4$. En effet, les sommets rabattus sur x_{-1} sont les suivants : Il y a d'abord x_{-1} lui-même ; puis les voisins de $x_{-\frac{1}{2}}$ autres que x_{-1} et x_0 (il y en a $p - 1$) ; enfin, les sommets à distance 2 de x_0 dont la projection sur \mathcal{A} est x_0 (il y en a $p(p^3 - 1)$).

On en déduit : $\mathcal{S} \circ |_B(1_{K_p g K_p}) = 1_{gT_c} + p^4 1_{g^{-1}T_c} + (p - 1)1_{T_c}$. Il reste à multiplier par $|\delta|^{\frac{1}{2}}$, et on obtient finalement

$$\widehat{1_{K_p g K_p}} = p^2 1_{gT_c} + p^2 1_{g^{-1}T_c} + (p - 1)1_{T_c}.$$

On retrouve donc le corollaire 16.

Chapitre 5

Graphe des cristaux de $GU(2, 1)$

Dans ce chapitre, on se place dans le cas $n = 3$. On conserve les notations de la partie 2.3.1 pour $W = W(k), W_{\mathbb{Q}}, \rho$. On choisit $\alpha \in E^{\times} \cap \mathcal{O}_{E_p}^{\times} \subset W^{\times}$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$. On étudie la structure de l'ensemble des cristaux de signature $(2, 1)$ à l'intérieur d'un isocrystal. On redémontre concrètement les résultats de la partie 2.3. Nous prouvons explicitement les faits suivants :

1. Il y a deux classes d'isomorphisme d'isocristaux unitaires contenant des cristaux unitaires de signature $(2, 1)$: l'isocrystal ordinaire et supersingulier.
2. Il existe une unique classe d'isomorphisme de cristaux unitaires ordinaires de signature $(2, 1)$.
3. Il y a un nombre infini de classes d'isomorphisme de cristaux unitaires supersinguliers de signature $(2, 1)$.

La structure de l'ensemble des cristaux supersinguliers fait apparaître un graphe dont le "squelette" est l'immeuble de $GU(3)$. On donne quelques applications élémentaires de ces résultats.

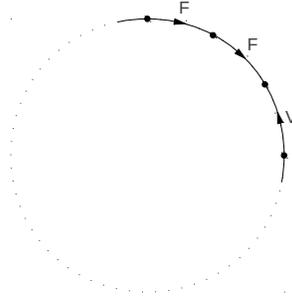
5.1 Quelques rappels

5.1.1 Groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1

Soit $C(1)_k$ la catégorie des schémas en groupes finis commutatifs sur k annulés par p . Par la théorie de Dieudonné, elle est équivalente à celle des espaces de Dieudonné (cf. paragraphe 2.3.1) sur k . La sous-catégorie de $C(1)_k$ des BT_1 est équivalente à celle des espaces de Dieudonné vérifiant

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(V) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(V) = \mathrm{Ker}(F).$$

On rappelle quelques résultats de Kraft (cf. [Kra75]). Les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de cette catégorie sont paramétrés par les diagrammes circulaires de Kraft. On place un ensemble X de sommets régulièrement espacés sur un cercle, et on trace une flèche entre deux sommets consécutifs, notée F si elle est dans le sens horaire et V si elle est dans le sens antihoraire. On impose qu'il n'y ait pas de rotation non triviale qui stabilise le diagramme et on identifie deux diagrammes qui diffèrent par une rotation.



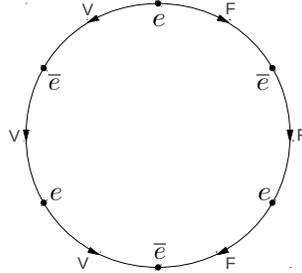
Soit Γ un tel diagramme et $X = X(\Gamma)$ l'ensemble des sommets. L'espace de Dieudonné M_Γ associé possède une k -base $(e_x)_{x \in X}$ indexée par X ; et on définit $F e_x = e_y$ s'il y a une flèche $x \xrightarrow{F} y$ et $F e_x = 0$ sinon. De même $V e_x = e_y$ s'il y a une flèche $x \xrightarrow{V} y$ et $V e_x = 0$ sinon. Ceci définit une bijection entre diagrammes de Kraft circulaires et classes d'isomorphisme de BT_1 indécomposables. Si M_Γ est muni d'une \mathcal{O}_{E_p} -action, on peut supposer $\forall x \in X, e_x \in M_{\Gamma_e}$ ou $M_{\Gamma_{\bar{e}}}$ ce qui décompose $\Gamma = \Gamma_e \sqcup \Gamma_{\bar{e}}$ avec Γ_e et $\Gamma_{\bar{e}}$ changés par F, V . Si M est un espace de Dieudonné, le dual $M^\vee = \text{Hom}_k(M, k)$ est un espace de Dieudonné où F, V sont définis par $\forall f \in M^\vee, \forall y \in M,$

$$\begin{aligned} (Ff)(y) &= \sigma(f(Vy)) \\ (Vf)(y) &= \sigma^{-1}(f(Fy)). \end{aligned}$$

Le dual d'un diagramme de Kraft Γ est le diagramme Γ^\vee obtenu en changeant le sens des flèches. S'il existe une rotation ρ transformant Γ en Γ^\vee , on définit un isomorphisme $M_\Gamma \rightarrow M_\Gamma^\vee$ par $e_x \mapsto e_{\rho(x)}^*$ où $(e_x^*)_{x \in X}$ est la base duale de $(e_x)_{x \in X}$. Ceci fournit un accouplement parfait de M_Γ . Si en outre M_Γ est muni d'une \mathcal{O}_{E_p} -action et qu'on suppose $\Gamma = \Gamma_e \sqcup \Gamma_{\bar{e}}$ comme précédemment, l'accouplement est compatible avec la \mathcal{O}_{E_p} -action si et seulement si ρ échange Γ_e et $\Gamma_{\bar{e}}$.

On dira que Γ est unitaire si $\Gamma = \Gamma_e \sqcup \Gamma_{\bar{e}}$, avec $\Gamma_e, \Gamma_{\bar{e}}$ changés par F, V , et s'il existe une rotation ρ permutant $\Gamma_e, \Gamma_{\bar{e}}$ telle que $\rho(\Gamma) = \Gamma^\vee$. On ne démontre pas, mais c'est sans doute vrai, que les diagrammes de Kraft unitaires

correspondent aux BT_1 unitaires indécomposables. La signature de Γ est le couple (r, s) tel qu'il existe r (resp. s) flèches F partant de Γ_e (resp. $\Gamma_{\bar{e}}$). Le seul diagramme de Kraft unitaire à 6 sommets de signature $(2, 1)$ est :



Le module de Dieudonné unitaire correspondant est isomorphe à $\overline{\mathbb{B}(3)}$ (cf. paragraphe 2.3.1). Les autres classes d'isomorphismes de BT_1 unitaires de signature $(2, 1)$ sont décomposables, ce sont $\overline{\mathbb{B}(2)} \times \overline{SS}$ et $\overline{\mathbb{B}(1)} \times \overline{SS}^2$. On ne démontre pas ces résultats (voir proposition 26). Enfin, rappelons que la classification complète des BT_1 avec structure PEL est faite dans [Moo01].

5.1.2 Cohomologie galoisienne

Soit $K \subset W_{\mathbb{Q}}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p . On note $G = \text{Aut}(W_{\mathbb{Q}}/K)$ l'ensemble des K -automorphismes de $W_{\mathbb{Q}}$. Soit H un groupe muni d'une G -action par automorphismes (un G -groupe). On note H^G le sous-groupe des G -invariants. Un 1-cocycle de H est une application $f : G \rightarrow H$ vérifiant

$$\forall \gamma, \theta \in G, f(\gamma\theta) = f(\gamma) \times (\gamma \cdot f(\theta)).$$

On impose que f soit fini, c'est-à-dire qu'il se factorise à travers une extension finie de K (sans cette hypothèse, on peut utiliser la cohomologie continue). On note $H^{fini} = \bigcup_{K_1} H^{\text{Aut}(W_{\mathbb{Q}}/K_1)}$ où K_1 parcourt les extensions finies de K contenues dans $W_{\mathbb{Q}}$. On dit que deux 1-cocycles f, g sont équivalents s'il existe $h \in H$ tel que $\forall \gamma \in G, f(\gamma) = h^{-1}g(\gamma)(\gamma \cdot h)$. On note $H^1(G, H)$ l'ensemble des 1-cocycles finis modulo équivalence. C'est un ensemble pointé. Soit une suite exacte courte $1 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3 \rightarrow 1$ de G -groupes telle que $H^1(G, H_1) = H^1(G, H_3) = 1$. Si $H_2^{fini} \rightarrow H_3^{fini}$ est surjectif, alors $H^1(G, H_2) = 1$.

Lemme 65. Soit $(H_m, \pi_m)_{m \geq 1}$ un système projectif de G -groupes, où $\pi_m : H_{m+1} \rightarrow H_m$, et $H = \varprojlim_m H_m$. On suppose que pour tout $m \geq 1$, $H^1(G, H_m) = 1$ et que les morphismes $\pi_m : H_{m+1}^G \rightarrow H_m^G$ sont surjectifs. Alors $H^1(G, H) = 1$.

Démonstration. Soit $f : G \rightarrow H$ un 1-cocycle et $f_m : G \rightarrow H_m$ le 1-cocycle induit sur H_m . Il existe $h_m \in H_m$ tel que $\forall \gamma \in G, f_m(\gamma) = h_m^{-1}(\gamma \cdot h_m)$. Pour tout $\gamma \in G, \pi_1(h_2^{-1})(\gamma \cdot \pi_1(h_2)) = \pi_1(f_2(\gamma)) = f_1(\gamma) = h_1^{-1}(\gamma \cdot h_1)$, donc $\pi_1(h_2)h_1^{-1} \in H_1^G$. Par hypothèse, il existe $y \in H_2^G$ qui relève cet élément. On écrit $y = h_2x^{-1}$ avec $x \in H_2$. Alors $\pi_1(x) = h_1$ et $f_2(\gamma) = x^{-1}(\gamma \cdot x)$. On remplace h_2 par x , et on réitère ce procédé pour h_3 , etc. On construit ainsi une nouvelle suite $(h_m)_{m \geq 1}$ qui est compatible avec les flèches $(\pi_m)_{m \geq 1}$, et fournit donc un élément $h \in H$. Il est immédiat de constater que $\forall \gamma \in G, f(\gamma) = h^{-1}(\gamma \cdot h)$. \square

Soit $\bar{A} \in M_n(k)$ et $m \geq 1$. On choisit un relèvement $A \in M_n(W)$ de \bar{A} , et on considère $I_n + p^m A \in GL_n(W)$. En réduisant modulo p^{m+1} , on obtient un élément de $GL_n(\frac{W}{p^{m+1}W})$, indépendant du choix de A . Ceci définit un morphisme de groupes $M_n(k) \rightarrow GL_n(\frac{W}{p^{m+1}W})$, et on a la suite exacte

$$0 \rightarrow M_n(k) \rightarrow GL_n\left(\frac{W}{p^{m+1}W}\right) \rightarrow GL_n\left(\frac{W}{p^m W}\right) \rightarrow 1.$$

On a $H^1(G, k) = 0$ et $H^1(G, GL_n(k)) = 1$, ce qui montre par récurrence sur m que $H^1(G, H_m) = 1$ avec $H_m = GL_n(\frac{W}{p^m W})$, pour tout $m \geq 1$. On a $GL_n(W) = \varprojlim_m H_m$ et les hypothèses du lemme 65 sont satisfaites. Par conséquent,

$$H^1(G, GL_n(W)) = 1.$$

Soit $L \subset W_{\mathbb{Q}}^n$ un W -réseau. Une d -base de L est une base de L formée de vecteurs stables par σ^d . Quitte à multiplier L par une puissance de p , on suppose $p^m W^n \subset L \subset W^n$ avec un entier $m \geq 0$. Alors σ agit sur le quotient $P = \frac{W^n}{p^m W^n}$ et $\bar{L} = \frac{L}{p^m W^n}$ est un sous- W -module de P de type fini. Tout élément de P est stable par une puissance de σ , donc il existe $d \geq 1$ et un système générateur de \bar{L} formé de vecteurs stables par σ^d . Puisque $W^{\sigma^d} \rightarrow \left(\frac{W}{p^m W}\right)^{\sigma^d}$ est surjectif, on peut trouver une d -base de L . En particulier $\sigma^d(L) = L$.

Réciproquement, soit $L \subset W_{\mathbb{Q}}^n$ un réseau tel que $\sigma^d(L) = L$ pour un entier $d \geq 1$. Existe-t-il une d -base de L ? Ecrivons $L = A(W^n)$ avec $A \in GL_n(W_{\mathbb{Q}})$. On peut supposer que les coefficients de A sont dans une extension finie de \mathbb{Q}_p (car L possède une d -base). On a $\sigma^d(A)(W^n) = A(W^n)$ donc $A^{-1}\sigma^d(A) \in GL_n(W)$. Soit $G = \text{Aut}(W_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}_{p^d})$. On obtient un 1-cocycle fini $f : G \rightarrow GL_n(W)$ défini par $\forall \gamma \in G, f(\gamma) = A^{-1}(\gamma(A))$. Puisque $H^1(G, GL_n(W)) = 1$, il existe $B \in GL_n(W)$ tel que $\forall \gamma \in G, f(\gamma) = B^{-1}(\gamma(B))$, donc $C = AB^{-1} \in GL_n(\mathbb{Q}_{p^d})$ et $L = C(W^n)$. Par conséquent L possède une d -base. Voici une reformulation :

Proposition 66. *Soit $d \geq 1$, V_0 un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie et $V = V_0 \otimes W_{\mathbb{Q}}$. Alors l'application $L \mapsto L \otimes_{\mathbb{Z}_p^d} W$ est une bijection entre l'ensemble des \mathbb{Z}_p^d -réseaux de V_0 et l'ensemble des W -réseaux de V stables par σ^d .*

5.2 Cristaux ordinaires

Lemme 67. *Soit N l'isocrystal d'une variété abélienne de dimension 3, munie d'une action de \mathcal{O}_E . Alors les pentes de N sont $0^2 \times \frac{1}{2} \times 1^2$ ou $(\frac{1}{2})^3$.*

Démonstration. Les pentes possibles sont a priori $0^3 \times 1^3$, $0^2 \times \frac{1}{2} \times 1^2$, $0 \times (\frac{1}{2})^2 \times 1$, $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$, $(\frac{1}{2})^3$. L'action de E_p sur N induit une action sur chaque facteur isocline. En notant V_{λ} l'isocrystal simple de pente $\lambda = \frac{d}{h}$, $\text{End}_{W_{\mathbb{Q}}, F}(V_{\lambda}^k) = M_k(D_{\lambda})$ pour $k \geq 1$. C'est un espace vectoriel de dimension $k^2 h^2$ sur \mathbb{Q}_p , donc kh est pair, d'où le résultat. \square

Dans cette partie, N désigne un isocrystal de dimension 3 de pentes $0^2 \times \frac{1}{2} \times 1^2$. On dira que N est ordinaire. On peut écrire : $N = N_0 \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_1$ où N_{λ} désigne la partie isocline de pente λ . Rapellons comment F et \bar{V} agissent sur chaque facteur isocline :

i	0	$\frac{1}{2}$	1
N_i	$W_{\mathbb{Q}}^2$	$W_{\mathbb{Q}}^2$	$W_{\mathbb{Q}}^2$
F	σ	$\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma$	$p\sigma$
V	$p\sigma^{-1}$	$\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$	σ^{-1}

TABLE 5.1 –

Lemme 68. *Il existe une unique E_p -action sur N à isomorphisme près.*

Démonstration. Un endomorphisme $W_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de N commutant à F laisse stable chacun des facteurs isoclines. Une E_p -action sur N est un morphisme de \mathbb{Q}_p -algèbres

$$E_p \longrightarrow \text{End}_{W_{\mathbb{Q}}, F}(N) = \text{End}_{W_{\mathbb{Q}}, F}(N_0) \times \text{End}_{W_{\mathbb{Q}}, F}(N_{\frac{1}{2}}) \times \text{End}_{W_{\mathbb{Q}}, F}(N_1).$$

Pour $i = 0, 1$, on a $\text{End}_{W_{\mathbb{Q}, F}}(N_i) = M_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\text{End}_{W_{\mathbb{Q}, F}}(N_{\frac{1}{2}}) = B$ est une algèbre de quaternions sur \mathbb{Q}_p . Par le théorème de Skolem-Noether, deux tels morphismes sont conjugués par un automorphisme intérieur, d'où le résultat. L'existence découle des exemples ci-dessous. \square

Exemple 69. On a $E_p = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ avec $\alpha^2 = -d \in \mathbb{Z}_p^\times$. On fait agir α sur N_0 et N_1 par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on étend cette action par \mathbb{Q}_p -linéarité à E_p . Avec cette action, le réseau $W \times W$ est stable par \mathcal{O}_{E_p} .

Exemple 70. On fait agir $e \in E_p$ sur $N_{\frac{1}{2}}$ par la matrice $\begin{pmatrix} e & \\ & \bar{e} \end{pmatrix}$.

Si \langle, \rangle est une polarisation de N compatible avec F , alors N_0 est orthogonal à $N_0 \oplus N_{\frac{1}{2}}$ et N_1 est orthogonal à $N_{\frac{1}{2}} \oplus N_1$. Ainsi $N = (N_0 \oplus N_1) \oplus^\perp N_{\frac{1}{2}}$. Sur $N_0 \oplus N_1$, il existe une unique polarisation compatible avec F et E_p à isomorphisme près. En effet, soit $x \in N_{0e}$ et $y \in N_{1\bar{e}}$ non nuls. Alors (x, Fx, y, Fy) est une base de $N_0 \oplus N_1$. Quitte à multiplier y par un scalaire, on peut supposer $\langle x, y \rangle = 1$, et ceci définit entièrement \langle, \rangle sur $(N_0 \oplus N_1)$, d'où l'unicité. Pour l'existence, on montre aisément que \langle, \rangle ainsi défini est une polarisation.

Sur $N_{\frac{1}{2}}$, il y a deux polarisations non isomorphes. Si $x \in N_{\frac{1}{2}, e}$ non nul, alors (x, Fx) est une base de $N_{\frac{1}{2}}$. On peut choisir $\langle x, Fx \rangle = \alpha$ ou $\langle x, Fx \rangle = \alpha p$. Ce sont les seules polarisations à isomorphisme près.

Corollaire 71. *Il existe deux classes d'isomorphisme d'isocristaux unitaires ordinaires.*

Nous allons déterminer l'ensemble des cristaux de N stables par \mathcal{O}_{E_p} .

Lemme 72. *Soit $M \subset N$ un cristal. Alors M se décompose $M = M_0 \oplus M_{\frac{1}{2}} \oplus M_1$ avec $M_\lambda = M \cap N_\lambda$.*

Démonstration. Prenons l'action de F donnée par le tableau 5.1. Soit $(x_i, y_i, z_i)_i \in N_0 \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_1$ une d -base de M (paragraphe 4.1.3). Soit $k \geq 0$. En appliquant $2kd$ -fois l'opérateur F , on obtient $(x_i, p^{kd}y_i, p^{2kd}z_i) \in M$, et à la limite : $(x_i, 0, 0) \in M$. Le même raisonnement avec l'opérateur V montre $(0, 0, z_i) \in M$, et donc M se décompose comme indiqué. \square

Partie étale N_0 On identifie N_0 à $W_{\mathbb{Q}} \times W_{\mathbb{Q}}$ comme dans le tableau 5.1.

a) Stabilité par F, V Cherchons les W -réseaux $M_0 \subset N_0$ stables par F et V . Il existe $k \geq 0$ tel que $M_0 = \sigma^k M_0 = F^k M_0$. Puisque $F^k M_0 \subset FM_0 \subset M_0$, on a donc $M_0 = \sigma M_0 = FM_0$. Les W -réseaux de N_0 stable par F sont exactement les réseaux $A(W^2)$ avec $A \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (proposition 66). Ces réseaux sont également stables par $V = p\sigma^{-1}$.

b) Stabilité par l'action de \mathcal{O}_{E_p} On a une décomposition $N_0 = N_{0e} \oplus N_{0\bar{e}}$. Le sous-espace N_{0e} est stable par $F^2 = \sigma^2$, donc il existe $x \in N_{0e}$ tel que $F^2 x = x$. Alors $N_{0e} = W_{\mathbb{Q}} x$ et $N_{0\bar{e}} = W_{\mathbb{Q}} Fx$. Les W -réseaux \mathcal{O}_{E_p} -stables sont les :

$$L = Wp^a x \oplus Wp^b Fx$$

avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors L est stable par F et V si et seulement si $a = b$. Ainsi, les réseaux stables par F, V et \mathcal{O}_{E_p} sont tous homothétiques. Avec l'action de l'exemple 69, ce sont les $p^n(W \times W)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Partie multiplicative N_1 Les arguments précédents s'appliquent aussi à N_1 par dualité. Les réseaux stables par F, V et \mathcal{O}_{E_p} sont tous homothétiques. Avec l'action de l'exemple 69, ce sont les $p^n(W \times W)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Partie supersingulière $N_{\frac{1}{2}}$ On identifie $N_{\frac{1}{2}}$ à $W_{\mathbb{Q}} \times W_{\mathbb{Q}}$ comme dans le tableau 5.1.

a) Stabilité par F, V Cherchons les réseaux $M \subset N_{\frac{1}{2}}$ stables par F et V . Considérons l'immeuble $\mathcal{I} = \mathcal{I}(PGL)$ du groupe PGL_2 . Les sommets de \mathcal{I} sont les classes d'homothétie $[L]$ de W -réseaux $L \subset W_{\mathbb{Q}}^2$. Le choix d'un appartement revient à choisir une base de $W_{\mathbb{Q}}^2$. Par exemple, l'ensemble des sommets de l'appartement \mathcal{A} associé à la base canonique de $W_{\mathbb{Q}}^2$ est $\{[p^n W \times W], n \in \mathbb{Z}\}$. On définit la distance δ par la formule (4.2.1). Deux sommets sont voisins s'ils sont à distance 1. Le graphe des sommets est un arbre (connexe, sans cycles). On a une action évidente de F sur \mathcal{I} , qui preserve δ . Soit $M \subset N_{\frac{1}{2}}$ un W -réseau stable par F, V . On a $\delta(M, FM) \leq 1$ car $pM \subset FM \subset M$. L'appartement \mathcal{A} est stable par F , le point $[p^n W \times W]$ est envoyé sur $[pW \times p^n W] = [p^{1-n} W \times W]$. Soit $[M_0]$ la projection de $[M]$ sur \mathcal{A} , soit $d = \delta(M, M_0)$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $[M_0] = [p^n W \times W]$. Alors

$$\delta(M, FM) = 2d + |2n - 1|.$$

Les seuls points $[M]$ tels que $\delta(M, FM) \leq 1$ sont $[W \times W]$ et $[pW \times W]$. Les réseaux $M \subset N_{\frac{1}{2}}$ stables par F, V sont les $p^n(W \times W)$ et $p^n(pW \times W)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Stabilité par l'action de \mathcal{O}_{E_p} Avec l'action de l'exemple 70, tous les réseaux $p^n(W \times W)$ et $p^n(pW \times W)$, $n \in \mathbb{Z}$ sont également stables par l'action de \mathcal{O}_{E_p} .

Corollaire 73. *Adoptons les notations du tableau 5.1 et l'action de E_p des exemples 69 et 70. Tout réseau $M \subset N$ stable par F, V et \mathcal{O}_{E_p} se décompose sous la forme $M = M_0 \oplus M_{\frac{1}{2}} \oplus M_1$ avec $M_\lambda = M \cap N_\lambda$ et il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$\begin{aligned} M_0 &= p^a(W \times W) \\ M_{\frac{1}{2}} &= p^b(W \times W) \quad \text{ou } M_{\frac{1}{2}} = p^b(pW \times W) \\ M_1 &= p^c(W \times W). \end{aligned}$$

Signature Parmi les cristaux du corollaire 73, on garde ceux qui ont pour signature $(2, 1)$:

Corollaire 74. *On adopte les notations du corollaire 73. Les réseaux $M \subset N$ stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} et de signature $(2, 1)$ sont les $M = p^a(W \times W) \oplus p^b(W \times W) \oplus p^c(W \times W)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.*

Polarisation D'après le corollaire 71, il y a deux classes d'isomorphisme de polarisations sur N . Si M est unitaire de signature $(2, 1)$, la classe d'isomorphisme de $M \otimes W_{\mathbb{Q}}$ est uniquement déterminée (par exemple par la proposition 33). Fixons un accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times N \rightarrow W_{\mathbb{Q}}$ tel que $(0, 0, 0)$ soit autodual. Alors le dual de $M = (a, b, c)$ est $(-c, -b, -a)$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on a $p^i M^\vee = M \iff a + c = 2b = i$.

Corollaire 75. *On adopte les notations du corollaire 73. Les cristaux $M \subset N$ stables par \mathcal{O}_{E_p} , de signature $(2, 1)$ et vérifiant $p^i M^\vee = M$ avec $i \in \mathbb{Z}$ sont les $(a, b, 2b - a)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Les cristaux unitaires sont les $(a, 0, -a)$ avec $a \in \mathbb{Z}$.*

En particulier, tous les cristaux unitaires ordinaires de signature $(2, 1)$ sont isomorphes.

5.3 Cristaux supersinguliers

Soit M un cristal unitaire supersingulier de signature $(2, 1)$. L'espace de Dieudonné \overline{M} associé est isomorphe à $\mathbb{B}(1) \times \overline{SS}^2$ ou $\mathbb{B}(3)$. Dans le premier cas M est superspécial. Dans le second, M est supergénéral (voir remarque 25). Le tableau suivant donne le a-nombre (cf. remarque 25) et le saut superspécial (cf. paragraphe 2.3.3.3).

M	\overline{M}	$a(M)$	$s(M)$
superspécial	$\overline{\mathbb{B}(1)} \times \overline{SS^2}$	3	0
supergénéral	$\overline{\mathbb{B}(3)}$	1	1

5.3.1 Cristaux superspéciaux

Soit M un cristal superspécial quasi-unitaire de dimension 3, tel que $p^i M^\vee = M$ avec $i \in \mathbb{Z}$. D'après la remarque 37, il existe $(x_j)_{j=1,2,3} \in M_e \cup M_{\bar{e}}$ tels que $(x_j, Fx_j)_j$ soit une base de M et $\langle x_j, Fx_j \rangle = \alpha p^{r_j}$, avec $r_j \in \mathbb{Z}$. Le tableau suivant donne le déterminant de l'isocristal (cf. définition 32) d'un tel cristal superspécial en fonction de sa signature et des entiers r_j :

signature :	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)
$\sum r_j$ pair	1	p	1	p
$\sum r_j$ impair	p	1	p	1

TABLE 5.2 –

Les classes d'isomorphismes de cristaux superspéciaux unitaires sont SS^3 , $\mathbb{B}(1) \times SS^2$, $\mathbb{B}(1)^2 \times SS$, $\mathbb{B}(1)^3$ (cf. paragraphe 2.3.2 pour les notations). Les cristaux SS et $\mathbb{B}(1)$ sont de signature (1, 0) et (0, 1) respectivement.

5.3.2 L'ensemble $\mathcal{C}(M')$

Si M' est un cristal unitaire, on note $\mathcal{C}(M')$ l'ensemble des cristaux M vérifiant :

- (i) $pM' \subset M \subset M'$
- (ii) M est stable par \mathcal{O}_{E_p}
- (iii) $pM^\vee = M$

L'application $M \mapsto \widetilde{M} = \frac{M}{pM'}$ définit une bijection

$$\mathcal{C}(M') \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{M'}) \quad (5.3.1)$$

où $\mathcal{C}(\overline{M'})$ est l'ensemble des sous- k -espaces vectoriels de $\overline{M'}$ stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} totalement isotropes, de dimension 3. On détermine ci-dessous l'ensemble $\mathcal{C}(M')$

pour M' superspécial unitaire de signature $(2, 1)$, $(3, 0)$ et pour M' supergénéral unitaire de signature $(2, 1)$. Les autres cas s'obtiennent par inversion des signatures.

1. M' est superspécial de signature $(2, 1)$ On peut écrire $M' = (Wx_1 \oplus WFx_1) \oplus (Wx_2 \oplus WFx_2) \oplus (Wx_3 \oplus WFx_3)$ où $x_1, x_2 \in M'_e$ et $x_3 \in M'_{\bar{e}}$. On note également x_i, Fx_i les images dans $\overline{M'}$. Soit $\widetilde{M} \in \mathcal{C}(\overline{M'})$ et $\widetilde{M}_e, \widetilde{M}_{\bar{e}}$ les sous-espaces propres pour l'action de \mathcal{O}_{E_p} . Examinons les différents cas, selon $\dim(\widetilde{M}_e)$:

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M} = \overline{M'}_{\bar{e}}$, c'est impossible car il n'est pas stable par F .

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Alors $\dim(\widetilde{M}_{\bar{e}}) = 2$. Si F est nul sur $\widetilde{M}_{\bar{e}}$, alors $\widetilde{M}_{\bar{e}} \subset \text{Ker}(F) \cap \overline{M'}_{\bar{e}} = kFx_1 \oplus kFx_2$, d'où $\widetilde{M}_{\bar{e}} = kFx_1 \oplus kFx_2$. Par isotropie, $\widetilde{M}_e = kFx_3$. Finalement $\widetilde{M} = F(\overline{M'})$. Si F n'est pas nul sur $\widetilde{M}_{\bar{e}}$, alors $\widetilde{M}_e \subset \text{Im}(F) \cap \overline{M'}_e = kFx_3$, donc $\widetilde{M}_e = kFx_3$. Par isotropie, $\widetilde{M}_{\bar{e}} \subset (Fx_3)^\perp \cap \overline{M'}_{\bar{e}} = kFx_1 \oplus kFx_2$, contradiction. Ainsi, l'unique possibilité est $\widetilde{M} = F(\overline{M'})$, qui correspond à $M = FM'$, superspécial de signature $(1, 2)$.

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Dans ce cas, $\widetilde{M}_e \cap \text{Ker}(F) \neq 0$ (F ne peut pas être injectif sur \widetilde{M}_e car $\dim(\widetilde{M}_{\bar{e}}) = 1$). Or $\overline{M'}_e \cap \text{Ker}(F) = kFx_3$, donc $Fx_3 \in \widetilde{M}_e$. Il existe $a, b \in k$, non tous les deux nuls, tels que $ax_1 + bx_2 \in \widetilde{M}_e$. Alors $F(ax_1 + bx_2) = \sigma(a)Fx_1 + \sigma(b)Fx_2 \in \widetilde{M}_{\bar{e}}$. Les vecteurs $Fx_3, ax_1 + bx_2, \sigma(a)Fx_1 + \sigma(b)Fx_2$ forment un sous-espace vectoriel de dimension 3, stable par F et \mathcal{O}_{E_p} . Il est stable par V si et seulement si $[a, b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$. Il est totalement isotrope si et seulement si $a\sigma(a) + b\sigma(b) = 0$. Le nombre de solutions de cette équation dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$ est $p + 1$. Le cristal M correspondant à \widetilde{M} est superspécial, de signature $(3, 0)$.

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 3$ Alors $\widetilde{M} = \overline{M'}_e$, c'est impossible car il n'est pas stable par F .

2. M' est superspécial de signature $(3, 0)$ On peut écrire $M' = (Wx_1 \oplus WFx_1) \oplus (Wx_2 \oplus WFx_2) \oplus (Wx_3 \oplus WFx_3)$ avec $x_1, x_2, x_3 \in M'_e$. Examinons les différents cas, selon $\dim(\widetilde{M}_e)$:

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M} = \overline{M}'_e = \text{Ker}(F)$, et $M = FM'$, superspécial de signature $(0, 3)$.

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Alors \widetilde{M}_e est une droite engendrée par un vecteur non nul $ax_1 + bx_2 + cx_3$ de $\overline{M}'_e = \text{Vect}_k(x_1, x_2, x_3)$. Par isotropie, $\widetilde{M}_e = \{uFx_1 + vFx_2 + wFx_3; au + bv + cw = 0\}$. Puisque $\widetilde{M}_e \subset \text{Ker}(F) = \text{Ker}(V)$, la stabilité par F et V équivaut à l'équation $a\sigma(a) + b\sigma(b) + c\sigma(c) = 0$. La signature de M est $(2, 1)$ (calcul facile). Les solutions sont paramétrées par la courbe de Fermat $C(k) \subset \mathbb{P}^2(k)$ définie par

$$C(k) = \{[a, b, c] \in \mathbb{P}^2(k), a^{p+1} + b^{p+1} + c^{p+1} = 0\}. \quad (5.3.2)$$

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Alors $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$, c'est impossible car F est injectif sur \overline{M}'_e .

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 3$ Alors $\widetilde{M} = \overline{M}'_e$, c'est impossible car il n'est pas stable par F .

Résumons ces calculs par le dessin ci-dessous. On note en indice la signature de chaque cristal et on représente les relations d'inclusion par des segments.

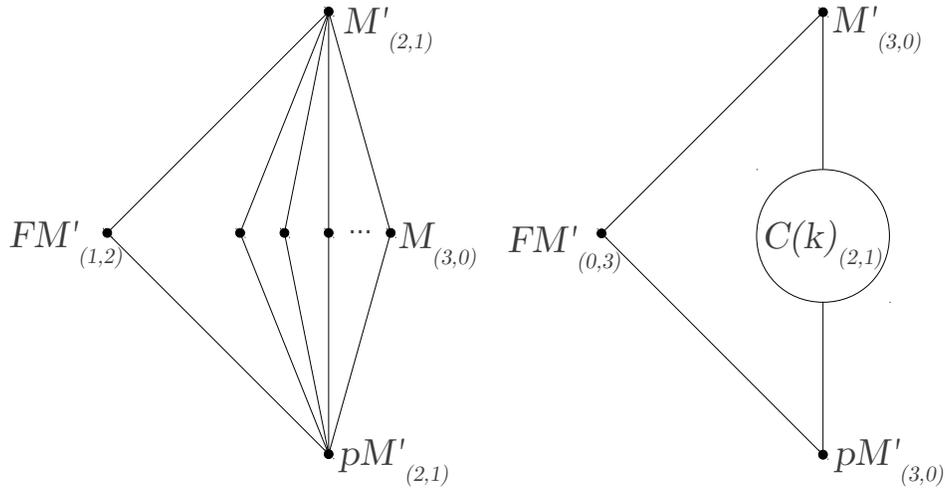


FIGURE 5.3.1 – cas superspécial

- Si M' est de signature $(2, 1)$, l'ensemble $\mathcal{C}(M')$ est formé de FM' , ainsi que de $p + 1$ cristaux superspéciaux de signature $(3, 0)$.
- Si M' est de signature $(3, 0)$, l'ensemble $\mathcal{C}(M')$ est formé de FM' , ainsi que d'un ensemble paramétré par $C(k)$ de cristaux de signature $(2, 1)$.

3. M' est supergénéral de signature $(2, 1)$ D'après le théorème 26, on a $\overline{M'} \simeq \mathbb{B}(3)$. Il existe une base $(e_i, f_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de $\mathbb{B}(3)$ dans laquelle F et V sont définis par :

$$\begin{aligned} Fe_2 &= f_1 & Ve_1 &= f_2 \\ Fe_3 &= f_2 & Ve_2 &= f_3 \\ Ff_1 &= -e_3 & Vf_3 &= e_1. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Les vecteurs omis ci-dessus sont envoyés sur 0. Soit $\widetilde{M} \in \mathcal{C}(M')$.

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M}' = \overline{M'}_{\bar{e}}$, c'est impossible car il n'est pas stable par F .

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Il existe un vecteur non nul $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \widetilde{M}_e$. En appliquant F^2 et V^2 à x , on trouve respectivement : $-\sigma^2(b)e_3 \in \widetilde{M}_e$ et $\sigma^{-2}(b)e_1 \in \widetilde{M}_e$. Donc $b = 0$. Puisque $\widetilde{M}^\perp = \widetilde{M}$, on en déduit $f_2 \in \widetilde{M}$. Il existe $(c, d) \in k^2 - \{(0, 0)\}$ tels que $cf_1 + df_3 \in \widetilde{M}_{\bar{e}}$ en appliquant F et V , on trouve $e_1 \in \widetilde{M}_e$ ou $e_3 \in \widetilde{M}_e$ donc $\widetilde{M}_e = ke_1$ ou $\widetilde{M}_e = ke_3$, qui correspondent respectivement à VM et FM .

Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Comme ci-dessus, on a $\widetilde{M}_e \subset \text{Vect}_k(e_1, e_3)$, donc $\widetilde{M} = \text{Vect}_k(e_1, e_3, f_2)$ qui appartient à $\mathcal{C}(\overline{M'})$.

Finalement, $\mathcal{C}(M')$ a trois éléments, donc $\mathcal{C}(M') = \{FM', VM', \Lambda^-(M')\}$. Remarquer que $\Lambda^-(M')$ est de signature $(3, 0)$ d'après la figure 5.3.1 (par élimination des cas).

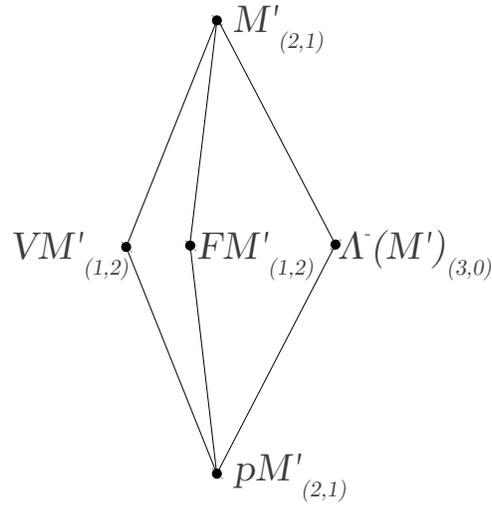


FIGURE 5.3.2 – cas supergénéral

5.3.3 Quelques ensembles de cristaux

On fixe un isocristal unitaire supersingulier N de déterminant 1. L'objectif est de décrire la structure de graphe présente sur certains ensembles de cristaux de N , décrits ci-après. La plupart des résultats figurent dans [Vol10], dans un cadre plus général. Si $r, s \in \mathbb{N}$ avec $r + s = 3$, on pose :

$$X_i(r, s) = \{M \subset N, \mathcal{O}_{E_p}\text{-cristal de signature } (r, s) \text{ tel que } p^i M^\vee = M\}.$$

$$X(r, s) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} X_i(r, s) \quad X_i = \bigsqcup_{r=0}^3 X_i(r, 3-r) \quad X = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} X_i.$$

De même, on définit $\mathbb{X}_i(r, s)$, $\mathbb{X}(r, s)$, \mathbb{X}_i , \mathbb{X} comme les sous-ensembles formés par les cristaux superspéciaux des ensembles ci-dessus. De plus, on pose :

$$\mathcal{I} = X/W_{\mathbb{Q}}^\times.$$

Si $M \in X_i(r, s)$, alors $p^k M \in X_{i+2k}(r, s)$, et la multiplication par p^k définit une bijection $X_i(r, s) \rightarrow X_{i+2k}(r, s)$. On a donc l'identification :

$$\mathcal{I} = X_0 \sqcup X_1. \tag{5.3.4}$$

Les opérateurs F, V définissent des bijections $X_i(r, s) \rightarrow X_{i+1}(s, r)$. D'après la proposition 33, on a $X_0(2, 1) = X_0(0, 3) = \emptyset$ et donc aussi $X_1(3, 0) = X_1(1, 2) = \emptyset$. Par ailleurs, $X_0(3, 0) = \mathbb{X}_0(3, 0)$ et $X_1(0, 3) = \mathbb{X}_1(0, 3)$ (proposition 40). Pour $x, y \in N$, on pose $\{x, y\} = \alpha \langle x, Fy \rangle$. On constate que

$$\{y, x\} = \alpha \langle y, Fx \rangle = \alpha \sigma \langle Vy, x \rangle = \sigma(\alpha \langle x, Vy \rangle).$$

C'est une forme hermitienne non-dégénérée sur le \mathbb{Q}_{p^2} -espace vectoriel $N^\tau = \{x \in N, Fx = Vx\}$. On a $N = N^\tau \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} W_{\mathbb{Q}}$. La décomposition $N^\tau = (N^\tau)_e \oplus (N^\tau)_{\bar{e}}$ est orthogonale pour $\{, \}$. On pose $\mathbb{V} = (N^\tau)_e$, c'est un \mathbb{Q}_{p^2} -espace vectoriel de dimension 3, tel que $\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^2}} W_{\mathbb{Q}} = N_e$.

Soit J le groupe des automorphismes de N . Un élément $f \in J$ stabilise \mathbb{V} et la restriction $f|_{\mathbb{V}}$ est une isométrie de \mathbb{V} pour la forme hermitienne $\psi(x, y) = \{x, y\}$.

Proposition 76. *L'application $f \mapsto f|_{\mathbb{V}}$ induit un isomorphisme de J sur $S = U(\mathbb{V}, \psi)$, le groupe des isométries de (\mathbb{V}, ψ) .*

Démonstration. Soit $g \in S$. On prolonge g sur N_e par $W_{\mathbb{Q}}$ -linéarité. Si $x \in N_e$, on pose $f(x) = g(x)$ et si $x \in N_{\bar{e}}$, $f(x) = F^{-1}g(Fx)$; et on étend f par linéarité à N . Alors $f \in J$ et ceci définit une application réciproque. \square

Si L (resp. L') est un W -réseau de N_e (resp. $N_{\bar{e}}$), on définit :

$$\begin{aligned} L^\vee &= \{x \in N_{\bar{e}}, \langle x, L \rangle \subset W\} & L^\wedge &= \{x \in N_e, \langle x, L' \rangle \subset W\} \\ L^\wedge &= \{x \in N_{\bar{e}}, \{x, L\} \subset W\} & L^\vee &= \{x \in N_e, \{x, L' \} \subset W\}. \end{aligned}$$

Lemme 77. *Soit L un réseau de N_e ou de $N_{\bar{e}}$. On a les relations*

$$\begin{aligned} L^\wedge &= (FL)^\vee \\ L^\vee &= V(L^\wedge) \\ L^{\vee\vee} &= L \\ L^{\wedge\wedge} &= \tau(L) \\ \tau(L)^\wedge &= \tau(L^\wedge). \end{aligned}$$

Démonstration. On suppose $L \subset N_e$ (les mêmes calculs s'appliquent si $L \subset N_{\bar{e}}$). La relation $L^{\vee\vee} = L$ est connue. On a successivement :

$$\begin{aligned} L^\wedge &= \{x \in N_e, \{x, L\} \subset W\} = \{x \in N_e, \langle x, FL \rangle \subset W\} = (FL)^\vee \\ &= \{x \in N_e, \langle Vx, L \rangle \subset W\} = \{x \in N_e, Vx \in L^\vee\} = p^{-1}F(L^\vee). \end{aligned}$$

En appliquant V , on trouve $V(L^\wedge) = L^\vee$. On en déduit $V(L^{\wedge\wedge}) = L^{\vee\vee} = (FL)^{\vee\vee} = FL$, d'où $L^{\wedge\wedge} = \tau(L)$. Enfin, $\tau(L)^\wedge = L^{\wedge\wedge\wedge} = \tau(L^\wedge)$. \square

Remarque 78. Si $M \subset N$ est un W -réseau stable par l'action de \mathcal{O}_{E_p} , alors $(M_e)^\vee = (M^\vee)_{\bar{e}}$ et $(M_{\bar{e}})^\vee = (M^\vee)_e$. De plus, on a les équivalences

$$M = p^i M^\vee \iff M_{\bar{e}} = p^i (M_e)^\vee \iff M_{\bar{e}} = p^i V(M_e^\wedge) \iff F(M_{\bar{e}}) = p^{i+1} M_e^\wedge.$$

On considère les ensembles suivants :

$$Y_i(r, s) = \left\{ L \subset N_e, W\text{-réseau}, p^{i+1} L^\wedge \stackrel{r}{\subset} L \stackrel{s}{\subset} p^i L^\wedge \right\}$$

$$\mathbb{Y}_i(r, s) = \{ L \in Y_i(r, s), \tau(L) = L \}.$$

Proposition 79. *L'application $\varepsilon : M \mapsto M_e$ définit une bijection de $X_i(r, s)$ sur $Y_i(r, s)$, et de $\mathbb{X}_i(r, s)$ sur $\mathbb{Y}_i(r, s)$. Elle est compatible avec l'action de J et de S à travers l'isomorphisme de la proposition 76.*

Démonstration. Si $M \in X_i(r, s)$, on a $F(M_{\bar{e}}) \stackrel{r}{\subset} M_e \stackrel{s}{\subset} p^{-1} F(M_{\bar{e}})$ (signature) et $F(M_{\bar{e}}) = p^{i+1} M_e^\wedge$ d'après la remarque 78. Donc $M_e \in Y_i(r, s)$. Soit $L \in Y_i(r, s)$. Alors on constate que $M = L \oplus p^i V(L^\wedge)$ est stable par F, V , appartient à $X_i(r, s)$ et $M_e = L$. Enfin, $M \in X_i(r, s)$ est stable par τ si et seulement si M_e l'est. En effet, $\tau(M_e) = M_e$ implique $\tau(M_e^\wedge) = \tau(M_e)^\wedge = M_e^\wedge$, donc $\tau(M_{\bar{e}}) = M_{\bar{e}}$ et $\tau(M) = M$. L'autre sens est évident. Ceci conclut la preuve. \square

5.3.4 Classes d'isomorphisme de cristaux unitaires

Soit $\mathfrak{Un}(2, 1)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de cristaux unitaires supersinguliers de signature $(2, 1)$. Soit M' superspécial unitaire de signature $(3, 0)$ et $N' = M' \otimes W_{\mathbb{Q}}$ (isocristal de déterminant 1). Par abus de notation, soit $C(k) \subset \mathcal{C}(M')$ le sous-ensemble des cristaux de signature $(2, 1)$ (cf. figure 5.3.1) et $\overline{C(k)} \subset \mathcal{C}(\overline{M'})$ son image par (5.3.1). On a une action de $\tau = p^{-1} F^2$ sur $C(k)$. On pose $C(\mathbb{F}_{p^2}) = C(k)^\tau$, et $\overline{C(\mathbb{F}_{p^2})}$ l'image de $C(\mathbb{F}_{p^2})$ par (5.3.1). Les éléments de $C(\mathbb{F}_{p^2})$ sont les cristaux superspéciaux de $C(k)$. Soit $\mathcal{U} = \text{Aut}(M') = \text{Stab}_J(M')$ et $\overline{\mathcal{U}} = \text{Aut}(\overline{M'})$. Si $M \in \mathcal{C}(M')$, alors M muni de p^{-1} fois sa polarisation est un cristal unitaire. Ceci définit une application $C(k) \rightarrow \mathfrak{Un}(2, 1)$. Nous allons montrer qu'elle induit une bijection τ -équivariante :

$$\mathcal{U} \backslash C(k) \longrightarrow \mathfrak{Un}(2, 1). \quad (5.3.5)$$

L'application est surjective car si M est supersingulier unitaire de signature $(2, 1)$, il existe toujours M'' quasi-unitaire de signature $(3, 0)$ tel que $M \stackrel{3}{\subset} M''$. Montrons qu'elle est injective. Si $M_1, M_2 \in C(k)$ supergénéraux et $f : M_1 \rightarrow$

M_2 un isomorphisme, alors $f \otimes W_{\mathbb{Q}}$ stabilise $M' = \Lambda^+(M_1) = \Lambda^+(M_2)$, donc induit un élément de \mathcal{U} . On doit aussi prouver que $C(\mathbb{F}_{p^2})$ est une \mathcal{U} -orbite.

Munissons \overline{M}'_e de la forme sesquilinéaire $\overline{\psi}(x, y) = \alpha \langle x, Fy \rangle$ (on note encore α l'image de α dans \mathbb{F}_{p^2}). Soit $Is(\overline{M}'_e)$ l'ensemble des droites isotropes. On a des bijections :

$$\begin{array}{ccccc} C(k) & \longrightarrow & \overline{C(k)} & \longrightarrow & Is(\overline{M}'_e) \\ M & \longmapsto & \widetilde{M} & \longmapsto & \widetilde{M}'_e \end{array} \quad (5.3.6)$$

(on a montré au paragraphe 4.3.2 que $\dim_k(\widetilde{M}'_e) = 1$). Définissons

$$M'^{\tau}_e = \{x \in M'_e, Fx = Vx\}$$

et $U(M'^{\tau}_e, \psi)$ le groupe unitaire du \mathbb{Z}_{p^2} -espace hermitien (M'^{τ}_e, ψ) . Le groupe \mathcal{U} s'identifie à $\text{Stab}_S(\varepsilon(M'))$ (proposition 79) qui est hyperspécial car $\varepsilon(M')$ est autodual. Donc $\mathcal{U} \simeq U(M'^{\tau}_e, \psi)$. Notons

$$\overline{M}'^{\tau}_e = \{x \in \overline{M}'_e, Fx = Vx\}.$$

C'est un \mathbb{F}_{p^2} -espace vectoriel de dimension 3 tel que $\overline{M}'^{\tau}_e \otimes_{\mathbb{F}_{p^2}} k = \overline{M}'_e$. On en déduit une action de τ sur \overline{M}'_e , et la bijection $C(k) \rightarrow Is(\overline{M}'_e)$ est τ -équivariante. Un élément $u \in \mathcal{U}$ stabilise \overline{M}'^{τ}_e et induit un élément de $U(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi)$, le groupe des isométries de $(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi)$. Ceci définit un isomorphisme $\mathcal{U} \rightarrow U(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi)$, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & U(M'^{\tau}_e, \psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{U}} & \longrightarrow & U(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi) \end{array}$$

Le morphisme $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathcal{U}}$ est surjectif car \mathcal{U} est hyperspécial (critère de lissité formelle). Notons $Is(\overline{M}'^{\tau}_e)$ l'ensemble des droites isotropes de $(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi)$, identifié à un sous-ensemble de $Is(\overline{M}'_e)$. Alors (5.3.6) induit des bijections

$$C(\mathbb{F}_{p^2}) \longrightarrow \overline{C(\mathbb{F}_{p^2})} \longrightarrow Is(\overline{M}'^{\tau}_e).$$

Par le théorème de Witt, $Is(\overline{M}'^{\tau}_e)$ est une $\overline{\mathcal{U}}$ -orbite. Puisque π est surjectif, $C(\mathbb{F}_{p^2})$ est une \mathcal{U} -orbite, ce qui clôt la preuve de (5.3.5).

Le groupe \mathcal{U} agit sur $\mathcal{C}(M'), C(k)$ et $C(\mathbb{F}_{p^2})$, et cette action se factorise à travers π . De même, $\overline{\mathcal{U}}$ agit sur $\overline{C(k)}$ et $Is(\overline{M}'^{\tau}_e)$. Les applications (5.3.6) sont compatibles avec les actions à travers les morphismes $\mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathcal{U}} \rightarrow U(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi)$. Puisque π est surjectif, on obtient des bijections :

$$\mathcal{U} \backslash C(k) \longrightarrow \overline{\mathcal{U}} \backslash \overline{C(k)} \longrightarrow U(\overline{M}'^{\tau}_e, \psi) \backslash Is(\overline{M}'_e).$$

Remarque 80. Le groupe $\overline{\mathcal{U}}$ étant fini et $C(k)$ infini, il y a un nombre infini de classes d'isomorphismes de cristaux unitaires de signature $(2, 1)$.

Voici une application. Constatons que l'opérateur $\tau = p^{-1}F^2$ agit sur $\mathcal{U} \setminus C(k)$ et sur $\mathfrak{Un}(2, 1)$ et que la bijection (5.3.5) est τ -équivariante. On a donc des bijections

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \setminus C(\mathbb{F}_{p^6}) &\longrightarrow \mathfrak{Un}(2, 1)^{\tau^3} \\ \mathcal{U} \setminus C(\mathbb{F}_{p^6}) &\longrightarrow U(\overline{M}'_e, \psi) \setminus Is(\overline{M}'_e)^{\tau^3}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Il est facile de voir que $\mathbb{B}(3) \in \mathfrak{Un}(2, 1)^{\tau^3}$. Soit $M \in C(\mathbb{F}_{p^6}) - C(\mathbb{F}_{p^2})$, vu comme une droite dans \overline{M}'_e , et X un vecteur directeur.

Lemme 81. *Soit (V_0, ψ) un $\mathbb{F}_{p^2}/\mathbb{F}_p$ -espace hermitien de dimension 3 et $V = V_0 \otimes_{\mathbb{F}_{p^2}} k$. On note $\tau = Id_{V_0} \otimes \sigma^2$. Soit $X \in V$ isotrope tel que $(X, \tau X)$ soit libre. Alors le système $(X, \tau X, \tau^2 X)$ est une base de V .*

Démonstration. On a $\psi(\tau X, X) = 0$. En effet, après le choix d'une \mathbb{F}_{p^2} -base de V_0 , on peut écrire $\forall X, Y \in k^3$, $\psi(X, Y) = {}^t X B \sigma(Y)$ avec $B \in GL_3(\mathbb{F}_{p^2})$ telle que ${}^t \sigma(B) = B$. Alors $\psi(X, X) = {}^t X B \sigma(X) = 0$, en appliquant σ et en transposant : ${}^t \tau(X) B \sigma(X) = 0$ donc $\psi(\tau X, X) = 0$. En appliquant τ , on a aussi $\psi(\tau^2 X, \tau X) = 0$ et $\psi(\tau X, \tau X) = 0$. Supposons $\tau^2 X \in \text{Vect}_k(X, \tau X) = H$. Le système $(\tau X, \tau^2 X)$ est libre, donc on peut écrire $X = a\tau X + b\tau^2 X$ et on en déduit $\tau(H) = H$ et $\psi(X, \tau X) = 0$. Ainsi H est défini sur \mathbb{F}_{p^2} , totalement isotrope de dimension 2, ce qui est impossible. \square

Par le lemme 81, $(X, \tau X, \tau^2 X)$ est une base de \overline{M}'_e . Soit S_X le stabilisateur de la droite kX dans $U(\overline{M}'_e, \psi)$. Si $f \in S_X$, il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f(X) = \lambda X$. Alors $f(\tau X) = \tau(\lambda)\tau X$ et $f(\tau^2 X) = \tau^2(\lambda)\tau^2 X$, donc on a une injection

$$S_X \hookrightarrow k^\times, \quad f \mapsto \lambda.$$

Puisque $\psi(X, X) = \psi(\tau X, X) = 0$, on a $\psi(\tau^2 X, X) \neq 0$. Par ailleurs $\psi(\tau^2 X, X) = \psi(f(\tau^2 X), f(X)) = \tau^2(\lambda)\sigma(\lambda)\psi(\tau^2 X, X)$, donc $\tau^2(\lambda)\sigma(\lambda) = 1$, i.e $\sigma^3(\lambda)\lambda = 1$. On en déduit $\#S_X \leq p^3 + 1$.

Fait 82. *Soit (V_0, ψ) un $\mathbb{F}_{p^2}/\mathbb{F}_p$ -espace hermitien de dimension n . Alors*

$$\#U(V_0, \psi) = p^{\frac{n^2-n}{2}} \prod_{i=1}^n (p^i - (-1)^i)$$

(voir [Wal63] page 33). On a donc

$$\#U(\overline{M}'_e, \psi) = p^3(p^3 + 1)(p^2 - 1)(p + 1).$$

Soit $Orb(X) \subset C(\mathbb{F}_{p^6})$ la $U(\overline{M}'_e, \psi)$ -orbite de kX . On a $\#Orb(X) \geq p^3(p^2 - 1)(p + 1) = p^6 + p^5 - p^4 - p^3$. Donc

$$\#C(\mathbb{F}_{p^2}) \sqcup Orb(X) \geq p^6 + p^5 - p^4 + 1. \quad (5.3.8)$$

Par ailleurs, C est une courbe projective de genre $g = \frac{p(p-1)}{2}$, donc d'après la "conjecture de Weil pour les courbes" ([Har77], appendice C, exercice 5.7) :

$$|\#C(\mathbb{F}_{p^6}) - p^6 - 1| \leq 2g\sqrt{p^6}$$

$$\#C(\mathbb{F}_{p^6}) \leq p^6 + 1 + p(p-1)p^3 = p^6 + p^5 - p^4 + 1. \quad (5.3.9)$$

En comparant (5.3.9) et (5.3.8), on en déduit $C(\mathbb{F}_{p^6}) = C(\mathbb{F}_{p^2}) \sqcup Orb(X)$ et $S_X = \{\lambda \in k, \sigma^3(\lambda)\lambda = 1\}$. D'après (5.3.7), $\#\mathfrak{Un}(2, 1)^{\tau^3} = 2$ et

$$\mathfrak{Un}(2, 1)^{\tau^3} = \{\mathbb{B}(1) \times SS^2, \mathbb{B}(3)\}.$$

5.4 Graphe des cristaux supersinguliers

5.4.1 Graphe superspécial \mathbb{X}_{Sh}

Si M et M' sont deux W -réseaux de N , on définit :

$$d(M, M') = \min \{n \geq 0 ; \exists k \in \mathbb{Z}, p^{n+k}M \subset M' \subset p^k M\}.$$

Alors $d(M, M')$ dépend uniquement des classes d'homothéties de M et M' et définit une distance sur \mathcal{I} . Deux éléments $x, y \in \mathcal{I}$ sont dits voisins si $d(x, y) = 1$, ceci munit \mathcal{I} d'une structure de graphe.

Remarque 83. Si $M, M' \in X$ tels que $d(M, M') = n$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p^{n+k}M \subset M' \subset p^k M$. Réciproquement, si $M' \subset M$ alors $p^n M \subset M' \subset M$, et donc $d(M, M') \leq n$.

Soit $\mathcal{I}(S)$ l'immeuble de $U(\mathbb{V}, \psi)$ et $|\mathcal{I}(S)|$ l'ensemble des sommets (cf. chapitre 3). On voit $|\mathcal{I}(S)|$ comme un graphe muni de la distance δ (cf. (4.2.1)). La proposition 56 permet d'écrire $|\mathcal{I}(S)| = \mathbb{Y}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{Y}_0(1, 2)$. On sait que δ est une distance géodésique sur $|\mathcal{I}(S)|$ (proposition 57).

Définition 84. On définit l'ensemble \mathbb{X}_{Sh} par

$$\mathbb{X}_{Sh} = \mathbb{X}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{X}_1(2, 1).$$

Par (5.3.4), on a $\mathbb{X}_{Sh} \subset \mathcal{I}$, donc \mathbb{X}_{Sh} est muni de la distance induite par d , et on voit \mathbb{X}_{Sh} comme un sous-graphe de \mathcal{I} . Le groupe J opère sur \mathbb{X}_{Sh} . On considère l'application $\zeta : \mathbb{X}_{Sh} \rightarrow |\mathcal{I}(S)| = \mathbb{Y}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{Y}_0(1, 2)$ définie par $\zeta(M) = M_e$ si $M \in \mathbb{X}_0(3, 0)$ et $\zeta(M) = (p^{-1}FM)_e$ si $M \in \mathbb{X}_1(2, 1)$. Autrement dit, ζ est la composée

$$\mathbb{X}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{X}_1(2, 1) \xrightarrow{\text{id} \sqcup p^{-1}F} \mathbb{X}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{X}_0(1, 2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Y}_0(3, 0) \sqcup \mathbb{Y}_0(1, 2)$$

Théorème 85. *L'application ζ est une isométrie $(\mathbb{X}_{Sh}, d) \rightarrow (|\mathcal{I}(S)|, \delta)$. De plus, ζ commute à l'action des groupes J et S à travers l'isomorphisme $J \simeq S$ de la proposition 76.*

Démonstration. L'application ζ est une bijection $\mathbb{X}_{Sh} \rightarrow |\mathcal{I}(S)|$ et la deuxième partie de l'énoncé est claire. Pour deux éléments $M, M' \in \mathbb{X}_{Sh}$, montrons l'équivalence :

$$d(M, M') = 1 \iff \delta(\zeta(M), \zeta(M')) = 1 \quad (5.4.1)$$

(\implies) : Les cristaux M et M' ne peuvent pas être tous les deux dans $\mathbb{X}_0(3, 0)$ ou $\mathbb{X}_1(2, 1)$. Ainsi, supposons $M \in \mathbb{X}_0(3, 0)$ et $M' \in \mathbb{X}_1(2, 1)$. On a clairement $pM \subset M' \subset M$. De plus, $(FM')_e = F(M'_e) \subset F(M_e) = pM_e$, donc $p\zeta(M) \subset p^{-1}(FM')_e = \zeta(M') \subset \zeta(M)$, c'est-à-dire $\delta(\zeta(M), \zeta(M')) = 1$.

(\impliedby) : Supposons $\delta(\zeta(M), \zeta(M')) = 1$. De nouveau, on peut supposer $M \in \mathbb{X}_0(3, 0)$ et $M' \in \mathbb{X}_1(2, 1)$. On a $p\zeta(M) \subset \zeta(M') \subset \zeta(M)$ (par (4.2.3)). Donc $pM_e \subset p^{-1}F(M')_e \subset M_e$. En appliquant V , on trouve $pM_e \subset M'_e \subset M_e$. D'autre part, $M_e = (M_e)^\vee$ et $M'_e = p(M'_e)^\vee$ (remarque 78), donc en passant au dual \vee , $pM_e \subset M'_e \subset M_e$. Finalement $pM \subset M' \subset M$ et $d(M, M') = 1$.

Montrons que ζ est une isométrie. Si $M, M' \in \mathbb{X}_{Sh}$, on a $d(M, M') \leq \delta(\zeta(M), \zeta(M'))$ par (5.4.1) et le fait que δ soit une distance géodésique. Inversement, supposons $d(M, M') = n$ et vérifions que $\delta(\zeta(M), \zeta(M')) \leq n$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p^{n+k}M \subset M' \subset p^kM. \quad (5.4.2)$$

Si M et M' sont tous les deux dans $\mathbb{X}_0(3, 0)$ (resp. $\mathbb{X}_1(2, 1)$), en appliquant l'opérateur $(\cdot)_e$ (resp. $p^{-1}(F \cdot)_e$) à (5.4.2), on trouve $p^{n+k}\zeta(M) \subset \zeta(M') \subset p^k\zeta(M)$, d'où $\delta(\zeta(M), \zeta(M')) \leq n$. Si $M \in \mathbb{X}_0(3, 0)$ et $M' \in \mathbb{X}_1(2, 1)$, alors $\zeta(M) = M_e$ et $\zeta(M') = p^{-1}(FM')_e$. En appliquant l'opérateur $p^{-1}(F \cdot)_e$ à (5.4.2), on trouve $p^{n+k}M_e \subset p^{-1}F(M'_e) \subset p^kM_e$ et de nouveau $\delta(\zeta(M), \zeta(M')) \leq n$. Finalement, ζ est une isométrie. \square

5.4.2 Applications

Voici une série de lemmes, aboutissant au théorème 91.

Lemme 86. *Soit \widetilde{M} un espace de Dieudonné unitaire. Alors il existe un sous-espace $H \subset \widetilde{M}$ stable par F, V et l'action de \mathcal{O}_{E_p} tel que $H^\perp = H$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $2g = \dim_k(\widetilde{M})$. Supposons $\text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V) \neq 0$. Soit $D \subset \text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V)$ une droite stable par \mathcal{O}_{E_p} . Le quotient $\widetilde{M}' = \frac{D^\perp}{D}$ est un espace de Dieudonné unitaire de dimension $2(g-1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $H \subset \widetilde{M}'$ de dimension $g-1$, totalement isotrope, stable par F, V et \mathcal{O}_{E_p} . En relevant H dans \widetilde{M} , on obtient un sous-espace qui convient. Enfin, si F est injectif sur $\text{Ker}(V)$, alors $\text{Im}(F) = \text{Ker}(V)$ convient. \square

Lemme 87. *Soit $M, M' \in X$ tels que $M' \subsetneq M$. Alors il existe $M'' \in X$ tel que $M' \subset M'' \stackrel{3}{\subset} M$.*

Démonstration. On peut supposer M unitaire (c'est clair si $M \in X_i$ avec i pair, et si i est impair, appliquer F partout). Soit $3n = [M : M']$, c'est-à-dire $p^n M^\vee = M'$. Posons $M_1 = pM + M'$. Alors $M_1^\vee = p^{-1}M \cap M^\vee = p^{-1}M \cap p^{-n}M'$, et on en déduit $pM \subset M_1 \subset pM_1^\vee \subset M$. Si $pM_1^\vee = M_1$, alors on peut prendre $M'' = M_1$. Sinon, le quotient $\widetilde{M} = \frac{pM_1^\vee}{M_1}$ est un espace de Dieudonné unitaire. D'après le lemme 86, il existe un sous-espace $H \subset \widetilde{M}$ stable par F, V, \mathcal{O}_{E_p} tel que $H^\perp = H$. En relevant H , on trouve un cristal M'' vérifiant $pM''^\vee = M''$. \square

Corollaire 88. *Soit $M, M' \in X$ tels que $M' \subsetneq M$, il existe une suite de cristaux $(M_i)_{1 \leq i \leq s}$ de X tels que $M' \subset M_1 \stackrel{3}{\subset} \dots \stackrel{3}{\subset} M_s \stackrel{3}{\subset} M$.*

Lemme 89. *Soit $M' \subsetneq M$ deux cristaux de $X(2, 1)$. Alors $M' \subset \Lambda^+(M') \subset \Lambda^-(M) \subset M$.*

Démonstration. On peut supposer M, M' supergénéraux. D'après le lemme 87, il existe $M'' \in X$ tel que $M' \subset M'' \stackrel{3}{\subset} M$. D'après la figure 5.3.2, on a $M'' \in \{FM, VM, \Lambda^-(M)\}$. Dans le dernier cas, le résultat est démontré. Supposons que $M'' = FM$. De nouveau, le lemme 87 procure un cristal $M''' \in X$ vérifiant $M' \subset M''' \stackrel{3}{\subset} FM$. Le cristal FM est supergénéral de signature $(1, 2)$, donc $M''' \in \{FM'', VM'', \Lambda^-(M'')\}$. Si $M'' = \Lambda^-(M'')$, on a le résultat. Sinon, on a montré $M' \subset F^2M \subset M$ ou $M' \subset pM \subset M$. Dans le cas $M'' = VM$, on trouve en plus la possibilité $M' \subset V^2M \subset M$. Puisque $\Lambda^-(M) = pM + F^2M + V^2M$, dans tous les cas $M' \subset \Lambda^-(M) \subset M$. \square

Lemme 90. *Soit $M' \subset M$ deux cristaux de N tels que $d(M, M') = n$. Soit M_1 un cristal tel que $pM_1 \subset M' \subset M_1$ et $d(M_1, M) = n - 1$. Alors $M_1 \subset M$.*

Démonstration. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p^{k+n-1}M \subset M_1 \subset p^kM$. Supposons $k < 0$. Alors $p^{n-2}M \subset M_1$. D'où $p^{n-1}M \subset pM_1 \subset M' \subset M$; donc $d(M, M') < n$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $k \geq 0$, donc $M_1 \subset M$. \square

Théorème 91. *Soit $M' \subset M$ deux éléments de $X(2, 1)$. Alors il existe des cristaux superspéciaux $(M_i)_{1 \leq i \leq 2k+1}$ tels que $M_{2i} \in \mathbb{X}(2, 1)$, $M_{2i+1} \in \mathbb{X}(3, 0)$ et*

$$M' \overset{3}{\subset} M_1 \overset{3}{\subset} \dots \overset{3}{\subset} M_{2k+1} \overset{3}{\subset} M. \quad (5.4.3)$$

Démonstration. Supposons M et M' superspéciaux. Leurs classes d'homothéties $[M], [M'] \in \mathcal{I}$ appartiennent à \mathbb{X}_{Sh} . D'après le théorème 85, il existe une géodésique dans \mathbb{X}_{Sh} :

$$[M'] \rightarrow [M_1] \rightarrow \dots \rightarrow [M_{2k+1}] \rightarrow [M] \quad (5.4.4)$$

avec $M_{2i} \in \mathbb{X}(2, 1)$ et $M_{2i+1} \in \mathbb{X}(3, 0)$. On peut supposer $pM_1 \subset M' \subset M_1$. Si $n = \delta(M', M)$, alors $d(M_1, M) = n - 1$ car (5.4.4) est une géodésique. D'après le lemme 90, on a $M_1 \subset M$. En réitérant ce raisonnement, on montre qu'on peut prendre les M_i emboîtés comme dans (5.4.3).

Supposons M, M' quelconques. Alors $M' \subset \Lambda^+(M') \subset \Lambda^-(M) \subset M$ (lemme 89). Les cristaux $\Lambda^+(M'), \Lambda^-(M)$ appartiennent à \mathbb{X}_{Sh} , donc on peut trouver une suite d'inclusions (5.4.3) entre $\Lambda^+(M')$ et $\Lambda^-(M)$. On en déduit le résultat. \square

Proposition 92. *Soit $M' \in X(1, 2)$ et $M \in X(2, 1)$ tels que $M' \subset M$. Alors*

$$M' \subset FM \subset M \quad \text{ou} \quad M' \subset VM \subset M.$$

Démonstration. D'après le corollaire 88, il existe une suite de cristaux emboîtés $M' = M_0 \overset{3}{\subset} \dots \overset{3}{\subset} M_s = M$ avec $M_i \in X$. Notons j le plus petit indice tel que la signature de M_j appartient à $\{(2, 1); (3, 0)\}$. Supposons M_j de signature $(2, 1)$. Si M_j est supergénéral, alors $M_{j-1} \in \{FM_j, VM_j, p\Lambda^+(M_j)\}$ (figure 5.3.2). La signature de $p\Lambda^+(M_j)$ est $(3, 0)$, donc $M_{j-1} \in \{FM_j, VM_j\}$. Si M_j est superspécial, la figure 5.3.1 montre que $M_{j-1} = FM_j$. Enfin, si M_j est de signature $(3, 0)$, la figure 5.3.1 montre que $M_{j-1} = FM_j$. Dans tous les cas, $M' \subset M_{j-1} = FM_j \subset FM$ ou $M' \subset M_{j-1} = VM_j \subset VM$. \square

La proposition 92 reste vraie pour $M \in X(r, s)$ et $M' \in X(r', s')$ si les signatures (r, s) et (r', s') ne sont pas toutes les deux dans $\{(1, 2); (0, 3)\}$ ou

dans $\{(2, 1); (3, 0)\}$. En somme, une chaîne de cristaux de X dont les deux extrémités n'ont pas même type de signature doit nécessairement utiliser F ou V quelque part. Ce résultat devient limpide quand on connaît la structure globale du graphe \mathcal{I} .

5.4.3 Graphe de \mathcal{I}

L'objectif est de décrire la structure du graphe $\mathcal{I} = X/W_{\mathbb{Q}}^{\times}$. On a une décomposition $\mathcal{I} = X_{Sh} \sqcup X'_{Sh}$, où $X_{Sh} = \mathbb{X}_0(3, 0) \sqcup X_1(2, 1)$ et $X'_{Sh} = \mathbb{X}_1(0, 3) \sqcup X_0(1, 2)$.

Examinons d'abord le sous-graphe X_{Sh} . Les cristaux de $X_{Sh} - \mathbb{X}_{Sh}$ sont les cristaux supergénéraux de signature $(2, 1)$. Un cristal supergénéral $M \in X_1(2, 1)$ est à distance 1 d'un unique cristal de $\mathbb{X}_0(3, 0)$, et c'est l'unique voisin de M dans X_{Sh} (figure 5.3.2). Réciproquement, si $M' \in \mathbb{X}_0(3, 0)$, les voisins de M' dans X_{Sh} sont tous dans $X_1(2, 1)$ et sont paramétrés par une courbe $C(k)$. Les voisins superspéciaux de M' sont les points de $C(\mathbb{F}_{p^2})$. Voici à quoi ressemble X_{Sh} :

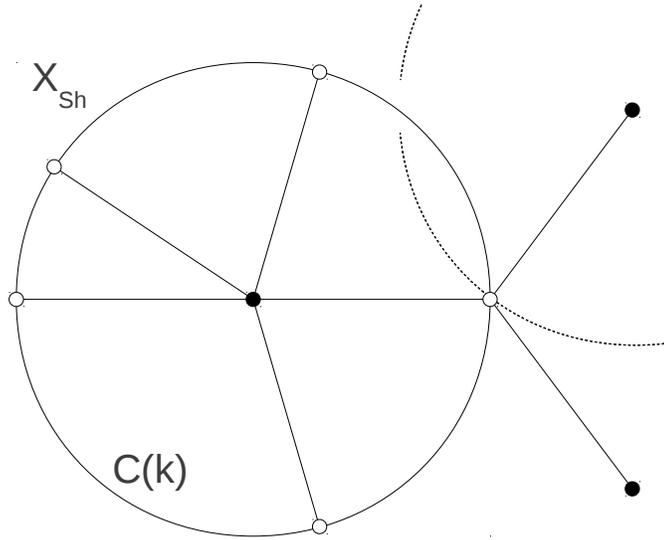


FIGURE 5.4.1 – graphe de X_{Sh}

Les points de $\mathbb{X}_0(3, 0)$ (resp. $\mathbb{X}_1(2, 1)$) sont représentés par le signe \bullet (resp. \circ). Ils correspondent dans $|\mathcal{I}(S)|$ aux sommets hyperspéciaux (resp. spéciaux)

par le théorème 85. Deux courbes $C(k)$ se coupent au plus en un point.

Proposition 93. *La distance d est une distance géodésique sur X_{Sh} .*

Démonstration. Soit $M, M' \in X_{Sh}$ deux cristaux tels que $d(M, M') = n \geq 1$. Si $M, M' \in \mathbb{X}_{Sh}$, il existe une chaîne de longueur n de M à M' car d est une distance géodésique sur \mathbb{X}_{Sh} (théorème 85). Supposons $M' \in X_{Sh} - \mathbb{X}_{Sh}$, et M quelconque. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p^{k+n}M \subset M' \subset p^kM$. D'après le lemme 89,

$$p^{k+n}M \subset \Lambda^-(M') \subset M' \subset \Lambda^+(M') \subset p^kM.$$

On en déduit $p^{k+n-1}M \subset \Lambda^+(M') \subset p^kM$ donc $d(\Lambda^+(M'), M) \leq n - 1$, et puisque $d(M', \Lambda^+(M')) = 1$, on obtient $d(\Lambda^+(M'), M) = n - 1$. Si $M \in \mathbb{X}_{Sh}$, on peut trouver une suite de longueur $n - 1$ de $\Lambda^+(M')$ à M , qu'on prolonge en une suite de longueur n de M' à M . Si $M \in X_{Sh} - \mathbb{X}_{Sh}$, alors $d(\Lambda^+(M'), \Lambda^+(M)) = n - 2$ (appliquer l'étude précédente à $\Lambda^+(M')$ et M). Il existe une suite de longueur $n - 2$ de $\Lambda^+(M')$ à $\Lambda^+(M)$, qu'on prolonge en une suite de longueur n de M' à M . \square

Passons au graphe \mathcal{I} . La proposition suivante est claire.

Proposition 94. *Les applications $F, V : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ sont des isométries de \mathcal{I} permutant X_{Sh} et X'_{Sh} .*

Déterminons les relations de voisinage entre les points de X_{Sh} et de X'_{Sh} dans \mathcal{I} . Ceci est fait dans les figures 5.3.1 et 5.3.2. Un cristal superspécial $M \in X_{Sh}$ est à distance 1 de $FM = VM$ et c'est le seul point de X'_{Sh} voisin de M dans \mathcal{I} . Un cristal supergénéral $M \in X_{Sh}$ est voisin de FM et VM , et ce sont les seuls points de X'_{Sh} voisins de M dans \mathcal{I} .

Voici une représentation du graphe \mathcal{I} :

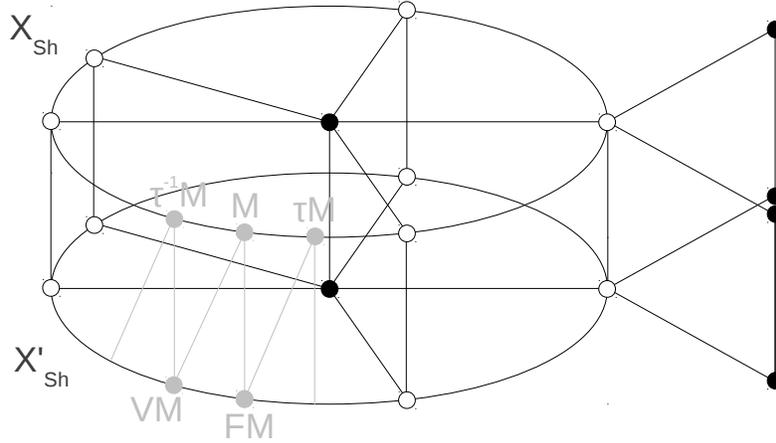


FIGURE 5.4.2 – graphe de \mathcal{I}

La partie supérieure du dessin est X_{Sh} et la partie inférieure est X'_{Sh} ; elles sont permutées par les opérateurs F et V .

Remarque 95. La proposition 92 se lit sur la figure 5.4.2. En effet, pour passer d'un cristal de la partie supérieure (de signature $(2, 1)$ ou $(3, 0)$) à un cristal de la partie inférieure (de signature $(1, 2)$ ou $(0, 3)$), on doit nécessairement utiliser un des opérateurs F ou V .

Proposition 96. *La distance d est une distance géodésique sur \mathcal{I} .*

Démonstration. Soit $M, M' \in X$ tels que $\delta(M, M') = n$. Si $M, M' \in X_{Sh}$ ou X'_{Sh} , le résultat découle des propositions 93 et 94. On peut supposer $M' \in X'_{Sh}$, $M \in X_{Sh}$ et $p^n M \subset M' \subset M$ (remarque 83). D'après la proposition 92, on a $M' \subset FM$ ou $M' \subset VM$. Pour fixer les idées, supposons $M' \subset FM$. Par la remarque 83, on a $d(FM, M') \leq n - 1$, donc $d(FM, M') = n - 1$ (car $d(M, FM) = 1$). Puisque $FM, M' \in X_{Sh}$, on peut trouver une chaîne de longueur $n - 1$ entre FM et M' , qu'on prolonge en une chaîne de longueur n de M' à M . Ainsi, d est une distance géodésique sur \mathcal{I} . \square

Chapitre 6

Relation de congruence ordinaire pour $GU(2, 1)$

6.1 Opérateur de Hecke en caractéristique nulle

On reprend les notations des chapitres 1 et 2 avec $n = 3$. Dans la base \mathcal{B}_W (voir paragraphe 1.1.2), on considère l'élément $g = \text{diag}(p, 1, p^{-1}) \in G(\mathbb{Q}_p)$. On note $gKg^{-1} = (gK_pg^{-1})K^p$. En caractéristique nulle, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & Sh_{K \cap gKg^{-1}} & \\
 u \swarrow & & \searrow v \\
 Sh_K & & Sh_K
 \end{array} \tag{6.1.1}$$

Les flèches sont définies sur \mathbb{C} par $u([a \times h]) = [a \times h]$ et $v([a \times h]) = [ag \times h]$. Si K^p est assez petit, ces morphismes sont finis, étales. On fera cette hypothèse pour simplifier. On obtient un endomorphisme de $\mathbb{Q}[Sh_K(\mathbb{C})]$ par la formule :

$$T_g \cdot x := v_* u^* x, \quad \forall x \in Sh_K(\mathbb{C}).$$

On souhaite définir l'opérateur T_g sur la réduction $\overline{Sh_K}$. La difficulté pour réduire modulo p le diagramme (6.1.1) est de trouver un bon modèle entier de $Sh_{K \cap gKg^{-1}}$. Dans [RZ96] (définition 6.9) et [Hai05] (définition 5.1), on explique la mauvaise réduction des variétés de Shimura de type PEL pour les niveaux parahoriques. Nous allons nous ramener à ce cas en décomposant T_g .

Soit $\mathcal{I}(S)$ l'immeuble de $S(\mathbb{Q}_p)$ (voir chapitre 3) et $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(S) \times \mathbb{R}$ celui de $G(\mathbb{Q}_p)$. On note Hyp (resp. Sp) l'ensemble des sommets hyperspéciaux (resp. spéciaux) de $\mathcal{I}(S)$. Soit $x_0 \in \text{Hyp}$ tel que $K_p = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(x_0)$. Le compact

$K_p \cap gK_pg^{-1}$ est le stabilisateur des points x_0 et $g.x_0$. Soit x_1 le milieu du segment $[x_0; g.x_0]$, K_{1p} le stabilisateur de x_1 , et $K_1 = K_{1p}K^p$.

Soit Δ l'homomorphisme $\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Q}[\text{Sp} \times \mathbb{Z}]$ qui envoie $(x, k) \in \text{Hyp} \times \mathbb{Z}$ sur

$$\sum_{\substack{x' \in \text{Sp} \\ \delta(x, x') = 1}} (x', k).$$

Soit Δ' l'homomorphisme $\mathbb{Q}[\text{Sp} \times \mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]$ qui envoie $(x, k) \in \text{Sp} \times \mathbb{Z}$ sur

$$\sum_{\substack{x' \in \text{Hyp} \\ \delta(x, x') = 1}} (x', k).$$

Avec les notations de la partie 3.4, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ agit sur $\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]$. Notons encore T_g l'élément de $\text{End}_{\mathbb{Q}[G(\mathbb{Q}_p)]}(\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}])$ associé à $1_{K_pgK_p}$. L'opérateur T_g envoie x_0 sur la somme formelle des sommets hyperspéciaux à distance 2 de x_0 dans $\mathcal{I}(S)$. Puisqu'un sommet hyperspécial possède $p^3 + 1$ voisins, on a :

$$T_g = \Delta' \circ \Delta - (p^3 + 1)\text{Id} \quad (6.1.2)$$

en tant qu'endomorphismes de $\mathbb{Q}[\text{Hyp} \times \mathbb{Z}]$.

Soit $y = [a \times h] \in Sh_K(\mathbb{C})$. La fibre $u^{-1}(y) \subset Sh_{K \cap gK_g^{-1}}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des $[ak \times h]$ avec $k \in \frac{K_p}{K_p \cap gK_pg^{-1}}$. Par hypothèse sur K^p , ces points sont distincts et l'opérateur géométrique T_g agit sur $\mathbb{Q}[Sh_K(\mathbb{C})]$ par :

$$T_g.y = \sum_{k \in \frac{K_p}{K_p \cap gK_pg^{-1}}} [akg \times h], \quad \forall y = [a \times h] \in Sh_K(\mathbb{C}).$$

La formule (6.1.2) conduit à introduire les correspondances (notées encore Δ et Δ') associées respectivement aux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & Sh_{K \cap K_1} & \\ w \swarrow & & \searrow w_1 \\ Sh_K & & Sh_{K_1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Sh_{K \cap K_1} & \\ w_1 \swarrow & & \searrow w \\ Sh_{K_1} & & Sh_K \end{array} \quad (6.1.3)$$

où w et w_1 sont les flèches naturelles. Un calcul direct montre que l'opérateur $\Delta' \circ \Delta$ agit sur $\mathbb{Q}[Sh_K(\mathbb{C})]$ par la formule

$$\Delta' \circ \Delta.y = \sum_{k \in \frac{K_p}{K_p \cap K_{1p}}} \sum_{l \in \frac{K_{1p}}{K_p \cap K_{1p}}} [akl \times h], \quad \forall y = [a \times h] \in Sh_K(\mathbb{C}).$$

Notons $\frac{K_p}{K_p \cap K_{1p}} = \{k_i\}$; $\frac{K_p \cap K_{1p}}{K_p \cap gK_p g^{-1}} = \{u_j\}$ et $\frac{K_{1p}}{K_p \cap K_{1p}} = \{l_r\}$. Alors $\frac{K_p}{K_p \cap gK_p g^{-1}} = \{k_i u_j\}$. On a donc

$$\begin{aligned} T_g.y &= \sum_i \sum_j [ak_i u_j g \times h] \\ \Delta' \circ \Delta.y &= \sum_i \sum_r [ak_i l_r \times h]. \end{aligned}$$

Il existe $k \in K_p$ tel que $gk \in K_{1p}$ (car x_1 et $g^{-1}.x_1$ sont voisins de x_0 et K_p agit transitivement sur les voisins de x_0). Les éléments $\{u_j gk\}_j \subset K_{1p}$ envoient x_0 sur les voisins de x_1 différents de x_0 . Ils sont donc des représentants de $\frac{K_{1p}}{K_p \cap K_{1p}} - \{1\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta' \circ \Delta.y &= \sum_i \sum_j [ak_i u_j g \times h] + \sum_i [ak_i \times h] \\ &= T_g.y + (p^3 + 1)y \end{aligned}$$

car $|\frac{K_p}{K_p \cap K_{1p}}| = p^3 + 1$. Ainsi,

$$T_g = \Delta' \circ \Delta - (p^3 + 1)\text{Id}$$

en tant qu'endomorphismes de $\mathbb{Q}[Sh_K(\mathbb{C})]$. On va réduire modulo p les opérateurs Δ et Δ' .

6.2 Réduction modulo p

6.2.1 Problème de module parahorique

Soit L_0, L_1 les \mathcal{O}_{E_p} -réseaux de $V \otimes \mathbb{Q}_p$ associés à x_0 et x_1 par (4.1.5). Le compact $K_p \cap K_{1p}$ est le stabilisateur de la chaîne

$$\dots \subset pL_1^\vee \stackrel{1}{\subset} L_1 \stackrel{1}{\subset} L_0 \stackrel{1}{\subset} L_1^\vee \subset \dots \quad (6.2.1)$$

et K_{1p} est le stabilisateur de la sous-chaîne :

$$\dots \subset pL_1^\vee \stackrel{1}{\subset} L_1 \stackrel{2}{\subset} L_1^\vee \subset \dots \quad (6.2.2)$$

Ce sont des compacts parahoriques. On réfère à [RZ96] (définition 6.9) pour la construction qui suit. Soit \mathcal{L} une chaîne autoduale de réseaux de $V \otimes \mathbb{Q}_p$, par exemple (6.2.1) ou (6.2.2). Soit $K_{\mathcal{L},p} = \text{Aut}(\mathcal{L}) \subset G(\mathbb{Q}_p)$ et $K_{\mathcal{L}} = K_{\mathcal{L},p}K^p$. On considère le problème de module classifiant les objets suivants sur un \mathcal{O}_{E_p} -schéma S :

1. Un \mathcal{L} -ensemble $A = \{A_{\Lambda}\}$, $\Lambda \in \mathcal{L}$, de schémas abéliens sur S de dimension 3.
2. Une action $\iota : \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.
3. Une polarisation principale \mathbb{Q} -homogène $\bar{\lambda}$ du \mathcal{L} -ensemble A , compatible avec ι .
4. Une K^p -classe d'isomorphismes $\eta : V(\mathbb{A}_f^p) \xrightarrow{\sim} H_1(A, \mathbb{A}_f^p)$ compatibles.

On impose la condition de déterminant : Le polynôme caractéristique de $e \in \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ agissant sur $\text{Lie}(A_{\Lambda})$ est $(T - e)^2(T - \bar{e}) \in \mathcal{O}_S[T]$. On identifie deux quadruplets $(A_1, \bar{\lambda}_1, \iota_1, \bar{\eta}_1)$ et $(A_2, \bar{\lambda}_2, \iota_2, \bar{\eta}_2)$ s'il existe des isogénies $\{A_{1,\Lambda} \rightarrow A_{2,\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathcal{L}}$ de degré premier à p , compatibles avec les structures. Ceci définit un modèle entier de $Sh_{K_{\mathcal{L}}}$ sur \mathcal{O}_{E_p} .

Explicitons les problèmes de modules pour K_1 et $K \cap K_1$. Soit S un schéma sur \mathcal{O}_{E_p} . Un point de $Sh_{K \cap K_1}(S)$ est la donnée d'un diagramme (modulo isogénies de degré premier à p) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A_{pL_1^{\vee}} & \longrightarrow & A_{L_1} & \longrightarrow & A_{L_0} & \longrightarrow & A_{L_1^{\vee}} & \longrightarrow & A_{p^{-1}L_1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p^{-1}L_1}^{\vee} & \longrightarrow & A_{L_1^{\vee}}^{\vee} & \longrightarrow & A_{L_0}^{\vee} & \longrightarrow & A_{L_1}^{\vee} & \longrightarrow & A_{pL_1^{\vee}}^{\vee} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des isogénies et les deux lignes sont duales l'une de l'autre. Les flèches verticales sont des isomorphismes à un \mathbb{Q}^{\times} -facteur près, telles que pour chaque Λ de la chaîne (6.2.1), la quasi-isogénie :

$$A_{\Lambda} \rightarrow A_{\Lambda^{\vee}}^{\vee} \rightarrow A_{\Lambda}^{\vee}$$

est un \mathbb{Q}^{\times} -multiple d'une polarisation de A_{Λ} . De plus, il est donné un isomorphisme $\theta_p : A_{\Lambda} \rightarrow A_{p\Lambda}$ tel que l'isogénie $A_{p\Lambda} \rightarrow A_{\Lambda}$ dans le diagramme ci-dessus soit $p \circ \theta_p^{-1}$. Chaque schéma abélien A_{Λ} est muni d'une action de $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ et d'une K^p -structure de niveau compatibles. Si $\Lambda' \subset^k \Lambda$, le degré de l'isogénie $A_{\Lambda'} \rightarrow A_{\Lambda}$ est p^{2k} . De même, un point de $Sh_{K_1}(S)$ est la donnée d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A_{pL_1^\vee} & \longrightarrow & A_{L_1} & \longrightarrow & A_{L_1^\vee} \longrightarrow A_{p^{-1}L_1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p^{-1}L_1}^\vee & \longrightarrow & A_{L_1^\vee}^\vee & \longrightarrow & A_{L_1^\vee}^\vee \longrightarrow A_{pL_1^\vee}^\vee \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

avec des hypothèses analogues. On a des morphismes naturels $w : Sh_{K \cap K_1} \rightarrow Sh_K$ et $w_1 : Sh_{K \cap K_1} \rightarrow Sh_{K_1}$. Ces flèches sont propres par critère valuatif, l'argument principal est qu'on peut relever une polarisation au modèle de Néron (voir [Del85] énoncé 1.1.(c)).

6.2.2 Lieu ordinaire, lieu supersingulier

On note \overline{Sh}_K , \overline{Sh}_{K_1} et $\overline{Sh}_{K \cap K_1}$ les réductions modulo p .

Définition 97. Un cristal quasi-unitaire M vérifiant $pM^\vee \subset M \subset M^\vee$ est dit presque unitaire. Si $x \in \overline{Sh}_{K_1}(k)$, alors $\mathbb{D}(x) = \mathbb{D}(A_{L_1})$ est presque unitaire de signature $(2, 1)$. Si M est presque unitaire, $N = M \otimes W_{\mathbb{Q}}$ est un isocristal unitaire. On dira que M est ordinaire (resp. supersingulier) si N l'est (voir paragraphe 4.2).

On définit le lieu ordinaire $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$ (resp. le lieu supersingulier $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ss}$) comme l'image réciproque du lieu ordinaire (resp. supersingulier) de \overline{Sh}_K par w . Un point $x \in \overline{Sh}_{K_1}$ est dit ordinaire (resp. supersingulier) si pour k' clôture algébrique de $\kappa(x)$, le cristal $\mathbb{D}(x_{k'})$ est ordinaire (resp. supersingulier). On note $\overline{Sh}_{K_1}^{ord}$ (resp. $\overline{Sh}_{K_1}^{ss}$) le lieu ordinaire (resp. supersingulier).

Soit M un cristal presque unitaire ordinaire de signature $(2, 1)$. D'après le corollaire 74, il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $M = (a, b, c)$ (notations du corollaire). On a $M^\vee = (-c, -b, -a)$ donc $M = (a, 0, 1 - a)$. Il y a donc une unique classe d'isomorphisme de cristaux presque unitaires ordinaires de signature $(2, 1)$.

Soit $x_1 \in \overline{Sh}_{K_1}^{ord}(k)$ et $M_1 = \mathbb{D}(x_1)$. La fibre $w_1^{-1}(x_1)$ est en bijection avec les cristaux unitaires M de signature $(2, 1)$ tels que $M_1 \subset M$. Si $M_1 = (1, 0, 0)$, les solutions sont $(0, 0, 0), (1, 0, -1)$. Ainsi, $\sharp w_1^{-1}(x) = 2$.

Soit $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$ et $M = \mathbb{D}(x)$. La fibre $w^{-1}(x)$ est en bijection avec les cristaux unitaires M_1 de signature $(2, 1)$ tels que $M_1 \subset M$. Si $M_1 = (0, 0, 0)$, les solutions sont $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$. Ainsi, $\sharp w^{-1}(x) = 2$.

Proposition 98. *Les morphismes w, w_1 sont surjectifs.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'ils sont surjectifs sur les k' -points, pour $k' \in \{\mathbb{C}, k\}$. Sur \mathbb{C} , le résultat est trivial. Sur k , il est acquis pour le lieu ordinaire. Pour le lieu supersingulier, voir propositions 134 et 137 de l'appendice B. \square

Corollaire 99. *Le lieu supersingulier $\overline{Sh}_{K_1}^{ss}$ est fermé. Le lieu ordinaire $\overline{Sh}_{K_1}^{ord}$ est ouvert.*

Démonstration. La proposition 98 montre que $w : \overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ss} \rightarrow \overline{Sh}_{K_1}^{ss}$ est surjectif. Puisque w est propre, on a le résultat. \square

Proposition 100. *Les ouverts \overline{Sh}_K^{ord} , $\overline{Sh}_{K_1}^{ord}$, $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$ sont lisses. Les flèches w, w_1 sont finies, plates sur $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$.*

Démonstration. L'espace tangent en un point de $\overline{Sh}_K^{ord}(k)$ ou $\overline{Sh}_{K_1}^{ord}(k)$ reflète les déformations de ce points sur $\frac{k[t]}{(t^2)}$. Ceci ne dépend que du module de Dieudonné, par la théorie de Grothendieck-Messing, et celui-ci est invariant sur les lieux ordinaires. On en déduit le résultat car \overline{Sh}_{K_1} est réduit (voir [Gör00] théorème 4.6.1) donc possède un ouvert lisse dense. Sur $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$, il y a deux classes d'isomorphisme de "données de Dieudonné", mais l'argument reste valable. Les flèches w, w_1 sont propres, quasi-finies sur $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$, donc finies. Elles sont finies surjectives entre variétés lisses, donc plates. \square

6.2.3 Espace tangent

On pose $R = k[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$. Soit $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$. Un élément de l'espace tangent en x est un morphisme $\text{Spec}(R) \rightarrow \overline{Sh}_K^{ord}$ d'image x , donc une déformation de x sur R . Soit A la variété abélienne sous-jacente à x , M son module de Dieudonné et $\overline{M} = \frac{M}{pM}$. La filtration de Hodge de \overline{M} est

$$0 \rightarrow V\overline{M} \rightarrow \overline{M} \rightarrow F\overline{M} \rightarrow 0. \quad (6.2.3)$$

On notera $D_R(A)$ le cristal de De Rham de A évalué en R . Il est muni d'une action de \mathcal{O}_{E_p} et d'un pairing R -bilinéaire. Par le théorème 141 (appendice D), on a $D_R(A) \simeq \overline{M} \otimes R$ (avec la structure induite). Par la théorie de Grothendieck-Messing, déformer de A sur R revient à relever la filtration (6.2.3) sur R , c'est-à-dire correspond à la donnée d'une suite exacte

$$0 \rightarrow P \rightarrow D_R(A) \rightarrow P' \rightarrow 0$$

où P, P' sont des R -modules libres de rang 3, qui redonne (6.2.3) à travers $R \xrightarrow{\varepsilon=0} k$. On peut rigidifier ce problème en imposant $P \subset \overline{M} \otimes R$. Déformer A avec sa \mathcal{O}_E -structure et sa polarisation revient à trouver P isotrope et stable par \mathcal{O}_{E_p} . On pose $M = M_0 \oplus M_{\frac{1}{2}} \oplus M_1$ (voir partie 5.2). On choisit des vecteurs $e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ tels que

1. (e_1, e_2) (resp. (f_1, f_2) , resp. (g_1, g_2)) soit une base de M_0 (resp. $M_{\frac{1}{2}}$, resp. M_1).
2. $e_1, f_1, g_1 \in M_e$ et $e_2, f_2, g_2 \in M_{\bar{e}}$.
3. $\langle e_1, g_2 \rangle = \langle e_2, g_1 \rangle = 1$.

On note de la même manière ces vecteurs dans \overline{M} . Le R -module $\overline{M} \otimes R$ est isomorphe à $\overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}$ où ε agit de manière évidente.

Proposition 101. *Soit $P \subset \overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. P est un sous- R -module libre de rang 3, stable par \mathcal{O}_{E_p} et isotrope.
2. P relève la filtration de Hodge.
3. Le quotient $\frac{\overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}}{P}$ est libre de rang 3.

alors il existe $(a, b) \in k^2$ tels que P soit le R -module engendré par les vecteurs $e_1 + \varepsilon(af_1 + bg_1)$, $e_2 + \varepsilon ag_2$, $f_2 + \varepsilon bg_2$. Réciproquement, tout $(a, b) \in k^2$ fournit un module P vérifiant les conditions ci-dessus.

Démonstration. On a $V\overline{M} = \text{Vect}_k(e_1, e_2, f_2)$. Par conséquent, il existe $x_1 \in \overline{M}_e$ et $x_2, y_2 \in \overline{M}_{\bar{e}}$ tel que les vecteurs $e_1 + \varepsilon x_1$, $e_2 + \varepsilon x_2$, $f_2 + \varepsilon y_2$ soient dans P . En appliquant ε , on trouve $\varepsilon e_1, \varepsilon e_2, \varepsilon f_2 \in P$. On peut donc supposer $x_1 = af_1 + bg_1$, $x_2 = cg_2$, $y_2 = dg_2$ avec $a, b, c, d \in k$. Par isotropie, on doit avoir $c = a$ et $d = b$. Soit P_1 le R -module engendré par $e_1 + \varepsilon x_1$, $e_2 + \varepsilon x_2$, $f_2 + \varepsilon y_2$. On vérifie facilement que P_1 vérifie les conditions de l'énoncé, en particulier, $\frac{\overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}}{P_1}$ est libre de rang 3. Or $P_1 \subset P \subset \overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}$, donc $P = P_1$. \square

6.2.4 Degrés des morphismes w, w_1

On définit un morphisme

$$\Delta : Sh_{K \cap K_1} \times_{Sh_{K_1}} Sh_{K \cap K_1} \longrightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \quad (6.2.4)$$

défini comme suit. Soit S un \mathcal{O}_{E_p} -schéma et f, f' deux éléments de $Sh_{K \cap K_1}(S)$. Avec les notations du paragraphe 6.2.1, on a des isogénies $f : A_{L_0} \rightarrow A_{L_1^\vee}$ et $f' : A'_{L_0} \rightarrow A_{L_1^\vee}$. Alors $\Delta(f)$ est l'isogénie $(pf'^{-1}) \circ f : A_{L_0} \rightarrow A'_{L_0}$.

On a défini des sous-schémas fermés $F, V, \langle p \rangle \subset p\text{-}\mathcal{I}so^{(2)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ (cf. paragraphe 3.1). Le lieu $p\text{-}\mathcal{I}so^{(2),ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ est contenu dans $F \cup V \cup \langle p \rangle$, et cette réunion est disjointe sur le lieu ordinaire : Si $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$ et $M = \mathbb{D}(x)$, alors $t^{-1}(x) \cap p\text{-}\mathcal{I}so^{(2),ord} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ est en bijection avec les cristaux $M' \subset M$ de signature $(2, 1)$ tels que $p^2 M'^{\vee} = M'$. On vérifie aisément que les solutions sont $M' \in \{F^2 M, V^2 M, pM\}$.

Si $f \in F$ est un k -point, $x = t(f)$ et $M = \mathbb{D}(x)$, alors $\Delta^{-1}(f)$ est en bijection avec les cristaux presque unitaires M_1 de signature $(2, 1)$ tels que $F^2 M \subset M_1 \subset M$. Si $M = (0, 0, 0)$, $F^2 M = (0, 1, 2)$ et l'unique solution est $M_1 = (0, 0, 1)$, donc la fibre $\Delta^{-1}(f)$ est réduite à un point. C'est vrai aussi pour $f \in V$. Si $f \in \langle p \rangle$, les solutions sont $M_1 = (1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$, donc $\#\Delta^{-1}(f) = 2$.

Soit A_F (resp. A_V) la projection de $\Delta^{-1}(F)$ (resp. $\Delta^{-1}(V)$) sur le premier facteur $\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord}$. Ce sont des ouverts fermés (car $w_1 : \overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord} \rightarrow \overline{Sh}_{K_1}^{ord}$ est finie, plate). Si $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$ et $M = \mathbb{D}(x) = (0, 0, 0)$, on a $w^{-1}(x) = \{f, g\}$ où f (resp. g) correspond à $M_1 = (0, 0, 1)$ (resp. $M_1 = (1, 0, 0)$). Pour f , on a $F^2 M \subset M_1 \subset M$, ce qui montre que $f \in A_F$. De même, $g \in A_V$. Ainsi,

$$\overline{Sh}_{K \cap K_1}^{ord} = A_F \sqcup A_V.$$

Proposition 102. *Les morphismes $w : A_F \rightarrow \overline{Sh}_K^{ord}$ et $w_1 : A_V \rightarrow \overline{Sh}_{K_1}^{ord}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Les variétés A_F et \overline{Sh}_K^{ord} sont lisses et w est bijectif sur les k -points, d'après les constatations faites plus haut. Soit $R = \frac{k[t]}{(t^2)}$, \hat{x} un point de $\overline{Sh}_K^{ord}(R)$, et \mathcal{A} la variété abélienne polarisée sur R sous-jacente à \hat{x} . Soit $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$ la réduction de \hat{x} et $A = \mathcal{A} \times_R k$. Soit $y \in A_F(k)$ l'image réciproque de x par w , qui correspond à un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A'_1 & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & A_1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & A_1^{\vee} & \xrightarrow{f^{\vee}} & A^{\vee} & \xrightarrow{g^{\vee}} & A_1^{\vee} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Puisque $y \in A_F(k)$, il est facile de voir que f (resp. g^{\vee}) est le quotient par la partie multiplicative de $A[p]$ (resp. $A^{\vee}[p]$). On définit donc \mathcal{A}'_1 (resp. $\mathcal{A}'_1{}^{\vee}$) comme le quotient de \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}^{\vee}) par la partie multiplicative de $\mathcal{A}[p]$ (resp. $\mathcal{A}^{\vee}[p]$). Cette construction a aussi un sens sur R . Enfin, soit \mathcal{A}'_1 le dual de $\mathcal{A}'_1{}^{\vee}$. Ceci définit un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A}'_1 & \xrightarrow{g} & \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{A}'_1^V & \xrightarrow{f^V} & \mathcal{A}^V & \xrightarrow{g^V} & \mathcal{A}'_1^V
 \end{array}$$

Pour étendre ce diagramme en un point de $\overline{Sh_{K \cap K_1}}^{ord}(R)$, il suffit de montrer qu'il existe une isogénie $h : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}'_1$ telle que $f \circ g \circ h = p$. Nécessairement, h sera l'unique relèvement de $h : A_1 \rightarrow A'_1$ telle que $f \circ g \circ h = p$. Sans polarisation, on a $\mathbb{D}(A'_1) \simeq \mathbb{D}(A_1) \simeq \mathbb{D}(A) = M$. On reprend les notations du paragraphe 6.2.3. Les flèches f, g, h induisent des endomorphismes de $\overline{M} \otimes R$ tels que f (resp. g , resp. h) est trivial sur $\overline{M}_1 \otimes R$ (resp. $\overline{M}_0 \otimes R$, resp. $\overline{M}_{\frac{1}{2}} \otimes R$) et l'identité sur les autres facteurs. Les variétés abéliennes $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}'_1$ correspondent à des sous- R -modules P, P_1, P'_1 de $\overline{M} \otimes R$, comme dans la proposition 101. Il s'agit de prouver $h(P_1) \subset P'_1$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{M} \otimes R & \xrightarrow{h} & \overline{M} \otimes R & \xrightarrow{g} & \overline{M} \otimes R & \xrightarrow{f} & \overline{M} \otimes R \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 P_1 & \xrightarrow{?} & P'_1 & \xrightarrow{\quad} & P & \xrightarrow{\quad} & P_1
 \end{array}$$

Il existe $(a, b) \in k^2$ tels que P soit engendré par les vecteurs $e_1 + \varepsilon(af_1 + bg_1)$, $e_2 + \varepsilon ag_2$, $f_2 + \varepsilon bg_2$. On constate que $\frac{\overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}}{f(P)}$ est libre de rang 3, donc $P_1 = f(P)$. De même, $g^{-1}(P)$ est engendré par $(e_1, e_2, f_2 + \varepsilon bg_2)$. De nouveau, $\frac{\overline{M} \oplus \varepsilon \overline{M}}{g^{-1}(P)}$ est libre donc $P'_1 = g^{-1}(P)$. Enfin, on constate que $h(P_1) \subset P'_1$, d'où le résultat.

On a montré que $w^{-1}(\hat{x}) \subset \overline{Sh_{K \cap K_1}}^{ord}(R)$ est non vide, donc le morphisme $T_f(A_F) \rightarrow T_x(\overline{Sh_K}^{ord})$ induit par w sur les espaces tangents en f et x est surjectif, donc bijectif. Par conséquent $w : A_F \rightarrow \overline{Sh_K}^{ord}$ est un isomorphisme. Des arguments similaires s'appliquent pour $w_1 : A_V \rightarrow \overline{Sh_{K_1}}^{ord}$. \square

Corollaire 103. *Les morphismes restreints $w : A_V \rightarrow \overline{Sh_K}^{ord}$ et $w_1 : A_F \rightarrow \overline{Sh_{K_1}}^{ord}$ sont de degré p^3 et p respectivement.*

Démonstration. Soit $X = Sh_{K \cap K_1} - \overline{Sh_{K \cap K_1}}^{ss}$, $Y = Sh_K - \overline{Sh_K}^{ss}$, $Z = Sh_{K_1} - \overline{Sh_{K_1}}^{ss}$. On considère les morphismes $w : X \rightarrow Y$ et $w_1 : X \rightarrow Z$ sur \mathcal{O}_{E_p} . Le schéma $Sh_{K \cap K_1}$ est plat sur \mathcal{O}_{E_p} ([Gör00] théorème 4.5.3). Les morphismes w, w_1 sont finis sur X et plats (critère de platitude par fibres ([Gro66] 11.3.10)). Par conséquent, les degrés sur $\overline{Sh_{K \cap K_1}}^{ord}$ et sur $Sh_{K \cap K_1} \times \mathbb{C}$ coïncident, et on en déduit le résultat. \square

6.3 Opérateur de Hecke en caractéristique p

Soit $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}'$ les réductions modulo p des correspondances (6.1.3). Elles sont finies, plates sur le lieu ordinaire. On définit naturellement l'opérateur \bar{T}_g en caractéristique p sur le lieu ordinaire par la formule :

$$\bar{T}_g = \bar{\Delta}' \circ \bar{\Delta} - (p^3 + 1)\text{Id}.$$

Pour tout $x \in \overline{Sh_K}^{ord}(k)$, on a $\bar{T}_g.x = w_*w_1^*w_{1*}w^*x - (p^3 + 1)x$. Soit $x \in \overline{Sh_K}^{ord}(k)$. On note $y \in A_F(k)$ et $y' \in A_V(k)$ les images réciproques de x par w . On pose $x_1 = w_1(y)$ et $x'_1 = w_1(y')$. Ces points possèdent chacun deux images réciproques dans $\overline{Sh_{K \cap K_1}}$ par w_1 . Notons $w_1^{-1}(x_1) = \{y, z\}$ et $w_1^{-1}(x'_1) = \{y', z'\}$. En prenant l'image de ces points par w , on trouve les points $\{x, w(z), w(z')\}$. L'opérateur \bar{T}_g envoie x sur une somme formelle de ces points. Voici une représentation graphique :

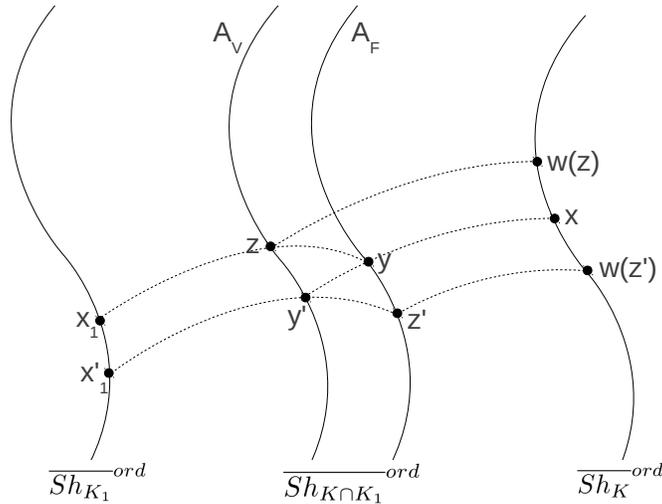


FIGURE 6.3.1 –

Notons $\mathcal{B} = \text{End}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\left[\overline{Sh_K}^{ord}(k)\right]\right)$. L'opérateur \bar{T}_g induit un élément de \mathcal{B} . On note \mathcal{F} l'opérateur Frobenius, agissant sur $\overline{Sh_K}^{ord}(k)$. Alors $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$. On a aussi $\langle p \rangle \in \mathcal{B}$, l'opérateur diamant qui multiplie la structure de niveau par p .

Théorème 104. Soit $R = X^2 + \langle p \rangle (p - 1 - \overline{T}_g)X + p^4 \langle p^2 \rangle \in \mathcal{B}[X]$. Dans l'anneau \mathcal{B} , on a la relation suivante :

$$R(\mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \overline{Sh}_K^{ord}(k)$ et A_{L_0} la variété abélienne sous-jacente. Par définition, $\overline{T}_g.x = w_{1*}w^*w_{1*}w^*x - (p^3 + 1)x$. On adopte les notations de la figure 6.3.1, et on utilise le lemme 103 pour le calcul des multiplicités. On a successivement :

$$\begin{aligned} w^*x &= y + p^3y' \\ w_{1*}w^*x &= x_1 + p^3x'_1 \\ w_1^*w_{1*}w^*x &= (z + py) + p^3(y' + pz') \\ w_*w_1^*w_{1*}w^*x &= w(z) + p^4w(z') + (p^3 + p)x. \end{aligned}$$

Le point $y \in A_F(k)$ correspond à une isogénie $A_{L_0} \xrightarrow{f} A_{L_1^\vee}$ telle qu'il existe $A_{L_0}^{(p^2)} \xrightarrow{g} A_{L_1^\vee}$ avec $(pg^{-1}) \circ f : A_{L_0} \rightarrow A_{L_0}^{(p^2)}$ le morphisme de Frobenius. Ainsi, le point z correspond à l'isogénie g . De plus, le diagramme suivant doit être compatible avec les structures de niveau :

$$A_{L_0} \xrightarrow{f} A_{L_1^\vee} \xleftarrow{g} A_{L_0}^{(p^2)}.$$

On en déduit $w(z) = \langle p^{-1} \rangle \mathcal{F}z$ et de la même manière, $w(z') = \langle p \rangle \mathcal{F}^{-1}z$. Ainsi,

$$\overline{T}_g.x = \langle p^{-1} \rangle \mathcal{F}x + p^4 \langle p \rangle \mathcal{F}^{-1}x + (p - 1)x.$$

En remplaçant x par $\mathcal{F}x$ et en composant par $\langle p \rangle$, on trouve $R(\mathcal{F})x = 0$. \square

6.4 Relation de congruence ordinaire et immobile de G

Dans ce paragraphe, on construit un anneau naturel qui possède un Frobenius et une action de l'algèbre $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$. Soit $n \geq 3$ un entier impair et (V, ψ) un E_p/\mathbb{Q}_p -espace hermitien de dimension n , de déterminant 1 dans $\frac{\mathbb{Q}_p^*}{N(E_p^*)}$. Soit $G = GU(V, \psi)$. Posons

$$N = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}.$$

C'est un $W_{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une action $W_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de E_p . L'action le décompose sous la forme $N = N_e \oplus N_{\bar{e}}$ avec les notations

usuelles. On a un opérateur $\sigma : N \rightarrow N$ défini par $\sigma(v \otimes w) = v \otimes \sigma w$ qui permute N_e et $N_{\bar{e}}$. L'espace N est muni de la forme hermitienne $\psi_{W_{\mathbb{Q}}} : N \times N \rightarrow E_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}$. On fixe $\alpha \in E_p$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$. Pour $x, y \in N$, on définit

$$\langle x, y \rangle = Tr_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\alpha\psi(x, y)).$$

C'est un accouplement $W_{\mathbb{Q}}$ -bilinéaire $N \times N \rightarrow W_{\mathbb{Q}}$ compatible avec l'action de E_p . Les sous-espaces N_e et $N_{\bar{e}}$ sont isotropes pour \langle, \rangle . Fixons une décomposition de Witt :

$$V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_- \quad (6.4.1)$$

où $H = V_+ \oplus V_-$ est un plan hyperbolique et V_0 est orthogonal à H . Il existe $\nu \in E_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}$ tel que $\nu\bar{\nu} = p$. En identifiant $E_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}$ à $W_{\mathbb{Q}} \times W_{\mathbb{Q}}$ par le plongement $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, on peut écrire $\nu = (a, b)$ avec $ab = p$. On choisit $\nu = (1, p)$. On définit un élément $b \in G(W_{\mathbb{Q}})$ en le faisant agir sur $N = (V_+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}) \oplus (V_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}}) \oplus (V_- \otimes_{\mathbb{Q}_p} W_{\mathbb{Q}})$ par multiplication par $1 \oplus \nu \oplus p$. On définit un opérateur σ -linéaire $F : N \rightarrow N$ en posant $F = b \times \sigma$. Alors N devient un isocristal unitaire de pentes $0^2 \times (\frac{1}{2})^{n-2} \times 1^2$ de déterminant 1. On pose :

$$X = \{M \subset N, W\text{-réseau stable par } \mathcal{O}_{E_p}, \exists i \in \mathbb{Z}, p^i M^\vee = M\}$$

$$Y = \{L \subset V, \mathcal{O}_{E_p}\text{-réseau}, \exists i \in \mathbb{Z}, p^i L^\vee = L\}.$$

L'ensemble Y s'identifie à $\text{Hyp} \times \mathbb{Z}$ (voir chapitre 3). On a une application évidente

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ L & \longmapsto & L \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \end{array} \quad (6.4.2)$$

qui identifie Y et $X^\sigma = \{M \in X, \sigma M = M\}$. L'opérateur $\mathcal{F} = F^2$ agit sur X^σ . Adoptons les notations :

- Soit $X_{F,V}$ le sous-ensemble des cristaux de X (i.e stables par F, V).
- Soit $X_{F,V}^\sigma = X_{F,V} \cap X^\sigma$.
- Soit $X_{F,V,\mu}$ le sous-ensemble des cristaux de X de signature $(n-1, 1)$.
- Soit Y_{dec} le sous-ensemble des $L \in Y$ se décomposant $L = L_+ \oplus L_0 \oplus L_-$ selon (6.4.1).

Un cristal $M \in X_{F,V,\mu}$ se décompose $M = M_+ \oplus M_0 \oplus M_-$. Alors M_+ et M_- sont stables par σ . Puisque M_0 est superspécial de signature $(n-2, 0)$, on a $M_{0\bar{e}} = F(M_{0e}) = \sigma(M_{0e})$. Or M_{0e} est stable par σ^2 , donc M_0 est stable par σ . Ainsi $X_{F,V,\mu} \subset X_{F,V}^\sigma$.

Soit $L \in Y_{dec}$. Le W -réseau $M = L \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ est stable par F et V . Puisque M est stable par σ , on a $F(M_{0e}) = \sigma(M_{0e}) = M_{0\bar{e}}$ donc la signature de M_0 est $(n-2, 0)$ et celle de M est $(n-1, 1)$. On en déduit que $X_{F,V,\mu} = X_{F,V}^\sigma$ et que (6.4.2) établit une bijection entre Y_{dec} et $X_{F,V,\mu}$. L'opérateur \mathcal{F} agit sur $X_{F,V,\mu}$.

Soit H le sous-groupe de G , qui stabilise la décomposition (6.4.1). Ainsi H est un sous-groupe de Levi isomorphe à $GU(V_0, \psi) \times \mathbb{G}_m$. L'ensemble X^σ s'identifie par (6.4.2) à $\text{Hyp} \times \mathbb{Z}$. Le sous-ensemble $X_{F,V,\mu}$ est une $H(\mathbb{Q}_p)$ -orbite de $\text{Hyp} \times \mathbb{Z}$. Soit P le sous-groupe parabolique G déterminé par le drapeau :

$$V_+ \subset V_+ \oplus V_0 \subset V.$$

Alors H est un sous-groupe de Levi de P . Soit U le radical unipotent de P . Dans une base adaptée à la décomposition (6.4.1), la matrice de $u \in U(\mathbb{Q}_p)$ est de la forme :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & I_{n-2} & * \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.4.3)$$

On a des morphismes de \mathbb{Q} -algèbres

$$\text{End}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y]) \xrightarrow{|_P} \text{End}_{P(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y]) \xrightarrow{\mathcal{S}} \text{End}_{H(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[U(\mathbb{Q}_p) \backslash Y])$$

où $|_P$ est l'injection canonique et \mathcal{S} défini comme (4.4.5) au chapitre 4. Soit $L \in Y_{dec}$ autodual, et $x_0 \in \text{Hyp}$ le sommet correspondant. Alors $Y_{dec} = H(\mathbb{Q}_p).x_0$. Soit $K = \text{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(x_0)$. Par la décomposition d'Iwasawa, on a $G(\mathbb{Q}_p) = P(\mathbb{Q}_p)K$ donc $Y = P(\mathbb{Q}_p).x_0$.

Lemme 105. *Soit $u \in U(\mathbb{Q}_p)$ et $h \in H(\mathbb{Q}_p)$ tels que $uh \in K$. Alors $h \in K$.*

Démonstration. Ecrivons $L = L_+ \oplus L_0 \oplus L_-$ et soit \mathcal{B} une \mathcal{O}_{E_p} -base de L adaptée à cette décomposition. Alors $G(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $GU(J_{\mathcal{B}})$ où $J_{\mathcal{B}}$ est la matrice de ψ dans \mathcal{B} . Le groupe K s'identifie avec les matrices de $GU(J_{\mathcal{B}})$ à coefficients dans \mathcal{O}_{E_p} et rapport de similitude dans $\mathcal{O}_{E_p}^\times$. En observant les trois blocs diagonaux de u (voir (6.4.3)) et h , on en déduit $h \in K$. \square

Considérons la projection $\pi : Y \rightarrow U(\mathbb{Q}_p) \backslash Y$. On a les égalités $Y = P(\mathbb{Q}_p).x_0 = U(\mathbb{Q}_p)H(\mathbb{Q}_p).x_0 = U(\mathbb{Q}_p)Y_{dec}$, d'où $\pi : Y_{dec} \rightarrow U(\mathbb{Q}_p) \backslash Y$ est surjective. Supposons que $h, h' \in H(\mathbb{Q}_p)$, $u \in U(\mathbb{Q}_p)$ vérifient $uh.x_0 = h'.x_0$.

Alors $h'^{-1}uh \in K$, donc $u'h'^{-1}h \in K$ avec $u' = h'^{-1}uh' \in U(\mathbb{Q}_p)$. D'après le lemme 105, on en déduit $h'^{-1}h \in K$, donc $h.x_0 = h'.x_0$. Finalement, π définit une bijection $Y_{dec} \rightarrow U(\mathbb{Q}_p) \backslash Y$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y]) & \xrightarrow{\mathcal{S} \circ |_P} & \text{End}_{H(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y_{dec}]) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p) // K) & \xrightarrow{\dot{\mathcal{S}}_H^G} & \mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p) // K_H) \end{array}$$

où $K_H = K \cap H(\mathbb{Q}_p)$ et $\dot{\mathcal{S}}_H^G$ est le morphisme de Satake tordu (cf. [Wed00], 1.5). L'opérateur \mathcal{F} agit sur $X_{F,V,\mu}$, donc sur Y_{dec} à travers (6.4.2). On vérifie que $\mathcal{F} \in \text{End}_{H(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y_{dec}])$.

Supposons $n = 3$. Alors $H = T$ est un tore maximal, P un sous-groupe de Borel et $\mathcal{S} \circ |_P$ est le morphisme calculé dans le corollaire 16. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ agissant sur $V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-$ par $p^{-1} \oplus 1 \oplus p$. L'élément $1_{KgK} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p) // K_p)$ agit sur Y_{dec} par :

$$1_{KgK}.x_0 = g.x_0 + (p-1)x_0 + p^4g^{-1}.x_0.$$

Le Frobenius agit par $\mathcal{F}.x_0 = pg.x_0$. On en déduit :

Théorème 106. *Soit $R = X^2 + 1_{pK} \star ((p-1) - 1_{KgK})X + p^4 1_{p^2K}$. Dans l'anneau $\text{End}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{Q}[Y_{dec}]) \simeq \mathcal{H}(T(\mathbb{Q}_p) // T_c)$, on a*

$$R(\mathcal{F}) = 0.$$

Chapitre 7

Relation de congruence

Dans ce chapitre, on démontre la relation de congruence dans l'algèbre $\mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ pour les variétés de Shimura associées au groupe $GU(n-1, 1)$ avec n impair.

7.1 L'espace de module \mathcal{N}'

On énonce ici le théorème 6.30 de [RZ96] d'uniformisation des variétés de Shimura. Soit $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ compact ouvert. On fixe un quadruplet $\underline{A}' = (A', \bar{\lambda}', \iota', \bar{\eta}')$ sur k . Avec les conventions de *ibid*, $\bar{\eta}'$ est une K^p -classe d'isomorphismes $\bar{\eta}' : V(\mathbb{A}_f^p) \rightarrow H^1(A', \mathbb{A}_f^p)$. On suppose A' supersingulière. Soit \underline{X}' son groupe p -divisible sur k . on note $M' = \mathbb{D}(\underline{X}')$ et $N' = M' \otimes W_{\mathbb{Q}}$.

On définit un schéma formel \mathcal{N}' tel que pour tout k -schéma S , l'ensemble $\mathcal{N}'(S)$ paramètre les classes d'isomorphisme de couples (\underline{X}, ρ_X) où \underline{X} est un groupe p -divisible (polarisé, avec action de \mathcal{O}_E , de signature $(n-1, 1)$) sur S et $\rho_X : \underline{X} \rightarrow \underline{X}'_S$ une quasi-isogénie compatible avec les polarisations à un facteur p^c près (le multiplicateur). Alors $\mathcal{N}'(k)$ est en bijection avec l'ensemble des cristaux $M \subset N'$ stables par \mathcal{O}_{E_p} , de signature $(n-1, 1)$, vérifiant $p^c M^\vee = M$ avec $c \in \mathbb{Z}$.

Pour $(X, \rho_X) \in \mathcal{N}'(S)$, on construit naturellement un schéma abélien avec structure \underline{A} avec une quasi-isogénie $f : \underline{A} \rightarrow \underline{A}'$ qui relève ρ_X ([RZ96], 6.14). On note $\underline{A} = \rho_X^* \underline{A}'$. Si $g \in G(\mathbb{A}_f^p)$, et $\underline{A} = (A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{\eta}) \in Sh_K(k)$, on définit $\langle g \rangle \underline{A} = (A, \bar{\lambda}, \iota, \bar{g} \circ \bar{\eta})$. Le morphisme d'uniformisation est défini par

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{N}' \times G(\mathbb{A}_f^p) &\longrightarrow \overline{Sh}_K^{ss} \times \overline{\mathbb{F}} \\ (\underline{X}, \rho_X) \times g &\longmapsto \langle g \rangle \rho_X^* \underline{A}'. \end{aligned}$$

Soit I le \mathbb{Q} -groupe algébrique des quasi-isogénies $\mathcal{O}_{E,(p)}$ -linéaires dans $\text{End}^0(A')$ compatibles avec $\bar{\lambda}'$. On a un homomorphisme naturel $\alpha_p : I(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p)$, où J est le \mathbb{Q}_p -groupe algébrique des automorphismes de N' respectant la polarisation à un facteur près. Un élément $\eta' \in \bar{\eta}'$ définit un homomorphisme $\alpha^p : I(\mathbb{Q}) \rightarrow J(\mathbb{A}_f^p)$ (pour plus de détails, voir [RZ96], 6.15). On a alors (*ibid*, théorème 6.30) :

Théorème 107. *Le morphisme d'uniformisation définit un isomorphisme de k -schémas :*

$$I(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{N}'_{red} \times G(\mathbb{A}_f^p) / K^p \longrightarrow \overline{Sh}_K^{ss}.$$

On a la décomposition suivante :

$$I(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{N}'_{red} \times G(\mathbb{A}_f^p) / K^p = \prod_{j=1}^m \Gamma_j \backslash \mathcal{N}'_{red}$$

avec $\{g_1, \dots, g_m\} = I(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f^p) / K^p$ et $\Gamma_j = I(\mathbb{Q}) \cap g_j K^p g_j^{-1}$.

On rappelle certains résultats de [VW11]¹. Le schéma \mathcal{N}'_{red} a une stratification

$$\mathcal{N}'_{red} = \bigcup_{i \in 2\mathbb{Z}} \mathcal{N}'_{red,i}$$

où $\mathcal{N}'_{red,i}$ est le sous-schéma des isogénies de multiplicateur i . Observer que $\mathcal{N}'_{red,i}$ est vide si i est impair (*ibid*, 1.5.1). Pour i pair, les $\mathcal{N}'_{red,i}$ sont tous isomorphes (*ibid*, proposition 1.1). Soit $\mathbf{N}'_0 = \{x \in N'_e, \tau x = x\}$, où $\tau = p^{-1}F^2$. C'est un \mathbb{Q}_{p^2} -espace hermitien pour la forme $\{x, y\} = \alpha \langle x, Fy \rangle$. On définit

$$\mathcal{L}_i(n) = \{L \subset \mathbf{N}'_0, \mathbb{Z}_{p^2}\text{-réseau}, L = p^{i-1}L^\wedge\} \quad (7.1.1)$$

où L^\wedge est le réseau dual pour $\{, \}$. A $L \in \mathcal{L}_i(n)$ on associe un sous-schéma fermé $\mathcal{N}'_L \subset \mathcal{N}'_{red,i}$. D'après (*ibid*, théorème 4.2), la décomposition en composante irréductibles s'écrit :

$$\mathcal{N}'_{red,i} = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_i(n)} \mathcal{N}'_L.$$

Les \mathcal{N}'_L sont tous isomorphes, lisses, de dimension $\frac{n-1}{2}$. On dit qu'un point $(\underline{X}, \rho_X) \in \mathcal{N}'_{red}$ est de type r si $\mathbb{D}(\underline{X})$ est de type r (cf. proposition 41). Le lieu lisse de \mathcal{N}'_{red} est l'ensemble des points de type n .

1. Attention : Cet article concerne le groupe $GU(1, n-1)$. Il faut donc modifier légèrement certains résultats. Par exemple, on remplace i par $i-1$ dans la définition de $\mathcal{L}_i(n)$.

Il existe une bijection entre les cristaux quasi-unitaires superspéciaux $M \subset N'$ de signature $(n, 0)$ tels que $p^{i-1}M^\vee = M$ et $\mathcal{L}_i(n)$, donnée par $M \mapsto M_e^\tau$. Si $L \in \mathcal{L}_i(n)$, on note L^+ le cristal superspécial de signature $(n, 0)$ ainsi associé. Finalement, les composantes irréductibles de $\mathcal{N}'_{red,i}$ sont paramétrées par les cristaux quasi-unitaires superspéciaux de signature $(n, 0)$ vérifiant $p^{i-1}M^\vee = M$. Si $y \in \mathcal{N}'_{red,i}(k)$ avec $\mathbb{D}(y) = M$, alors $y \in \mathcal{N}'_L(k)$ si et seulement si $M \subset L^+$ (*ibid*, lemme 3.3). Si $y \in \mathcal{N}'_L(k)$ est de type n , alors $L^+ = \Lambda^+(M)$.

7.2 Etude des fibres

Soit c un entier pair non nul fixé et $x \in \overline{Sh}_K^{ss}(k)$ correspondant à $\underline{A}' = (A', \overline{\lambda}', \iota', \overline{\eta}')$. On désigne par $t_c^{-1}(x)$ la fibre de x par le morphisme t dans $p\text{-}\mathcal{S}og^{(c)} \times k$. Soit \mathcal{N}'_{red} l'espace de module associé au point x , comme défini précédemment. On suppose que K^p vérifie la condition de la remarque 24. Munissons $t_c^{-1}(x)$ de sa structure réduite. Il existe alors un morphisme de k -schémas :

$$\epsilon : t_c^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{N}'_{red,c}$$

envoyant l'isogénie $f : \underline{A} \rightarrow \underline{A}'$ sur l'isogénie induite $f : (X, \overline{\lambda}, \iota) \rightarrow (X', \overline{\lambda}', \iota')$ sur les groupes p -divisibles. Les k -points de $t_c^{-1}(x)$ sont en bijection avec l'ensemble des cristaux $M \subset M'$ vérifiant $p^c M^\vee = M$, et le morphisme ϵ induit l'injection naturelle de cet ensemble dans $\mathcal{N}'_{red}(k)$. Si $f : \underline{A} \rightarrow \underline{A}'$ est un élément de $t_c^{-1}(x)(S)$, alors $\rho_X^* \underline{A}' = \underline{A}$. En plongeant \mathcal{N}'_{red} dans $\mathcal{N}'_{red} \times G(\mathbb{A}_f)$ par $\alpha : z \mapsto (z, 1)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{N}'_{red} \times G(\mathbb{A}_f^p) / K^p & \xrightarrow{\Theta} & \overline{Sh}_K^{ss} \times k \\ \alpha \uparrow & & \uparrow s \\ \mathcal{N}'_{red} & \xleftarrow{\epsilon} & t_c^{-1}(x) \end{array}$$

On en déduit que ϵ est propre car s l'est. De plus, ϵ est injectif sur les S -points pour tout k -schéma S , puisque l'on peut reconstruire \underline{A} à partir de $f : (X, \overline{\lambda}, \iota) \rightarrow (X', \overline{\lambda}', \iota')$. Par [Gro66] (proposition 8.11.5), ϵ est une immersion fermée.

Proposition 108. *Le morphisme s restreint à $t_c^{-1}(x)$ est fini.*

Démonstration. Le morphisme α est quasi-fini sur tout sous-schéma fermé quasi-compact, donc sur $t_c^{-1}(x)$. \square

Corollaire 109. *Le morphisme*

$$p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c),ss} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \xrightarrow{(s,t)} \overline{Sh}_K^{ss} \times \overline{Sh}_K^{ss}$$

est fini.

Démonstration. Le morphisme est propre et quasi-fini d'après la proposition précédente. \square

Si $x \in \overline{Sh}_K^{ss}(k)$ et $c \geq 2$, le sous-schéma fermé $\epsilon(t_c^{-1}(x)) \subset \mathcal{N}'_{red}$ est-il une réunion de composantes irréductibles de \mathcal{N}'_{red} ? Soit $M = \mathbb{D}(x)$ et $\mathfrak{A}_c(M)$ l'ensemble des cristaux M_0 superspéciaux de signature $(n, 0)$ tels que $p^{c-1}M_0^\vee = M_0$ et $M_0 \subset M$. Chaque M_0 définit une composante irréductible \mathcal{N}_{M_0} de $\mathcal{N}'_{red,c}$ (cf. section 7.2). Il est clair que $\mathcal{N}_{M_0} \subset \epsilon(t_c^{-1}(x))$. Si $c \geq 2$ est pair, on a $\mathfrak{A}_c(M) \neq \emptyset$. En effet, il existe M_1 superspécial de signature $(n, 0)$ tel que $p^{-1}M_1^\vee = M_1$ et $pM_1 \subset M \subset M_1$ (i.e $M \in \mathcal{N}_{M_1}(k)$). Alors $p^c M_1 \in \mathfrak{A}_c(M)$. On en déduit $\dim(t_c^{-1}(x)) = \frac{n-1}{2}$.

Définition 110. Soit X un schéma de type fini sur k . On note $\Psi(X)$ l'ensemble des composantes irréductibles de X de dimension maximale.

On a défini une application injective $\mathfrak{A}_c(M) \rightarrow \Psi(t_c^{-1}(x))$. Montrons qu'elle est surjective.

Lemme 111. *Soit M_0 un cristal unitaire superspécial de signature $(n, 0)$. Il existe M_1, M_2, M_3 de signature $(n-1, 1)$ tels que $M_i \subset M_0$, $pM_i^\vee = M_i$ et $M_1 + M_2 + M_3 = M_0$.*

Démonstration. On choisit une base de M_0 de la forme $(x_1, Fx_1, \dots, x_n, Fx_n)$ avec $x_i \in M_{0e}$, $\forall i$ (voir théorème 35). Dans la base (x_1, \dots, x_n) de $(\overline{M_0})_e$, considérons le système de $r = \frac{n-1}{2}$ vecteurs donné par les lignes de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,r+1} \\ & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{r,1} & \cdots & a_{r,r+1} \end{pmatrix}.$$

Notons $(u_j)_{j=1, \dots, r}$ les lignes de A , vues comme des vecteurs de $(\overline{M_0})_e$. Posons $H = \text{Vect}((u_j)_{j=1, \dots, r})$, $H' = H^\perp \cap (\overline{M_0})_e$ et $\widetilde{M} = H \oplus H'$. Alors \widetilde{M} est un sous-espace isotrope de dimension n stable par \mathcal{O}_{E_p} , on note M le

réseau $pM_0 \subset M \subset M_0$ correspondant. Il est stable par F, V si et seulement si $A^t \sigma(A) = 0$. On a $\dim(H') = n - r = r + 1$, donc si $FH \subset H'$, alors $H' = FH \oplus ky$ avec $y \in (\overline{M_0})_{\bar{e}}$. Une base de H' est $((Fu_j)_{j=1, \dots, r}, y)$. On relève la base $(u_j)_{j=1, \dots, r} \oplus ((Fu_j)_{j=1, \dots, r}, y)$ dans M_0 , en la notant de la même manière. Donc :

$$\begin{aligned} M_e &= Wu_1 \oplus \dots \oplus Wu_r + pM_{0e} \\ M_{\bar{e}} &= WFu_1 \oplus \dots \oplus WFu_r \oplus Wy + pM_{0\bar{e}}. \end{aligned}$$

La signature de M est le couple $(n - s, s)$ avec

$$s = \dim_k \left(\frac{M_{\bar{e}}}{F(M_e)} \right) = \dim_k \left(\frac{Wy + pM_{0\bar{e}} + F(M_e)}{F(M_e)} \right).$$

Or $pM_{0\bar{e}} = pF(M_{0e}) \subset F(M_e)$ et donc $s \leq 1$. Or $y \notin F(M_e)$ car sinon on peut écrire $y = \sum_i a_i Fu_i + y'$ avec $a_i \in W$ et $y' \in pF(M_{0e}) \subset pM_0$. Dans $\overline{M_0}$, on obtient $y \in \text{Vect}((Fu_i)_i)$ ce qui est faux. La signature de M est donc $(n - 1, 1)$.

Deux cristaux M_1, M_2 ne suffisent jamais pour engendrer M_0 , car on a

$$\dim \left((\widetilde{M}_1)_e + (\widetilde{M}_2)_e \right) \leq n - 1.$$

Soit $\epsilon \in \mathbb{F}_{p^2}$ tel que $\epsilon \bar{\epsilon} + 1 = 0$, et considérons les espaces associés aux matrices $\begin{pmatrix} I_r & \epsilon I_r & 0_{r,1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_r & -\epsilon I_r & 0_{r,1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,1} & \epsilon I_r \end{pmatrix}$. Ces trois espaces conviennent. \square

Soit $\mathcal{N}_L \subset \epsilon(t_c^{-1}(x))$ avec $L \in \mathcal{L}_i(n)$. Il s'agit de montrer que $L^+ \in \mathfrak{A}_c(M)$, c'est-à-dire $L^+ \subset M$. Par hypothèse, on a $\forall M' \in \mathcal{N}_L(k)$, $M' \subset M$. Le lemme ci-dessus montre que $\sum_{M' \in \mathcal{N}_L(k)} M' = L^+$, d'où le résultat. Remarquons que

$\mathfrak{A}_c(M)$ ne dépend que de $\Lambda^-(M)$ (donc du type de M) et de c . On note $a_c = \#\mathfrak{A}_c(M)$ pour M de type n . En particulier $a_2 = 1$ puisque $\mathfrak{A}_2(M) = \{\Lambda^-(M)\}$ pour M de type n .

7.3 Choix du compact K^p

Théorème 112. *Soit $c \geq 0$ pair fixé. Il existe $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ tel que le morphisme*

$$p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \xrightarrow{(s,t)} \overline{Sh}_K \times \overline{Sh}_K$$

soit une immersion fermée.

Démonstration. On renvoie au lemme 23 de la partie 2.2 pour la description du foncteur \mathfrak{F} et à la partie 3.1 pour le foncteur \mathfrak{J} . On choisit un $\mathcal{O}_E \left[\frac{1}{p} \right]$ -réseau $L \subset V$ vérifiant les conditions (2.2.1). Soit $x_i = (A_i, \lambda_i, \iota_i, \overline{\eta_i^p}) \in \mathfrak{F}(k)$ avec $i \in \{0, 1\}$. On suppose qu'il existe une isogénie $h : (A_0, \lambda_0, \iota_0) \rightarrow (A_1, \lambda_1, \iota_1)$. Soit $R = \text{Hom}(A_0, A_1)$ le groupe des homomorphismes (sans structure). Si $f, g \in R$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \text{Tr} (d^2 \lambda_0^{-1} \circ f^\vee \circ \lambda_1 \circ g).$$

Puisque λ_0 est de degré d^2 , la quasi-isogénie $d^2 \lambda_0^{-1}$ est une isogénie, donc $\langle f, g \rangle \in \mathbb{Z}$. La forme \langle, \rangle est bilinéaire symétrique, définie positive (le résultat est connu si $(A_0, \lambda_0) = (A_1, \lambda_1)$, on se ramène à ce cas par $h : (A_0, \lambda_0) \rightarrow (A_1, \lambda_1)$). Posons $q(f) = \langle f, f \rangle$ pour $f \in R$. Si $f \in \mathfrak{J}(k)$, alors

$$q(f) = d^2 p^c \tag{7.3.1}$$

où c est le multiplicateur de f .

Soit N un entier tel que $N^2 > 4d^2 p^c$. On définit

$$K'^p = \left\{ g \in K^p, (g-1)(\widehat{L}^{(p)}) \subset N\widehat{L}^{(p)} \right\}.$$

On note $\mathfrak{F}_{K'^p}$ et $\mathfrak{J}_{K'^p}$ les problèmes de modules pour le niveau K'^p . Soient x_0, x_1 deux points de $\mathfrak{F}_{K'^p}(\overline{\mathbb{F}})$ et $f, g \in \mathfrak{J}_{K'^p}(k)$ deux p -isogénies $x_0 \rightarrow x_1$ de multiplicateur c . On note (R, q) l'espace quadratique associé à x_0, x_1 . La définition de K'^p implique que $f = g$ sur $A_0[N]$, donc il existe $h \in R$ telle que $f - g = Nh$. On en déduit $N^2 q(h) \leq 4q(f) = 4d^2 p^c$ car q est définie positive. Ceci implique $h = 0$ et $f = g$. Ainsi, le morphisme

$$p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \xrightarrow{(s,t)} \overline{Sh_{K'}} \times \overline{Sh_{K'}}$$

est fini, injectif sur les k -points. Montrons qu'il est injectif sur les $R = k[\epsilon]$ -points. Soit $f, g \in p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c),ss}(R)$ tels que $s(f) = s(g)$ et $t(f) = t(g)$. Alors $(s, t)(f_k) = (s, t)(g_k)$, d'où $f_k = g_k$, et on en déduit $f = g$ par rigidité (théorème 121). Finalement, (s, t) est une immersion fermée. \square

7.4 Composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$

Proposition 113. *Les composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ sont de dimension $n - 1$. Soit C une composante irréductible de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$. Il y a deux possibilités :*

1. Soit C contient un point ordinaire.
2. Soit tous les points de C sont supersinguliers.

Démonstration. Soit C une composante irréductible de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$. D'après [BW06] (Proposition 6.15), $\dim(C) \geq n - 1$. Supposons que C intersecte le lieu ordinaire. Celui-ci est ouvert, donc C est contenue dans son adhérence et $\dim(C) = n - 1$. Supposons que C ne contienne aucun point ordinaire et possède un point $z \in C$ non supersingulier. Il existe un ouvert $U \subset \overline{Sh}_K$ contenant $t(z)$ tel que $U \cap \overline{Sh}_K^{ss} = \emptyset$. Alors $z \in t^{-1}(U) \cap C$ donc $t^{-1}(U) \cap C$ est un ouvert de C non vide, donc dense. La flèche t est finie sur $t^{-1}(U)$ (*ibid* corollaire 7.3), d'où :

$$\dim(t^{-1}(U) \cap C) = \dim(t(t^{-1}(U) \cap C)) \leq \dim(t(C)) < n - 1$$

car $t(C)$ n'intersecte pas le lieu ordinaire de \overline{Sh}_K . Ceci contredit $\dim(C) \geq n - 1$. On en déduit que si C n'intersecte pas le lieu ordinaire, tous ses points sont supersinguliers. Enfin, supposons C totalement supersingulière. On a $\dim(\overline{Sh}_K^{ss}) = \frac{n-1}{2} = \dim(t_c^{-1}(x))$ pour tout $x \in \overline{Sh}_K^{ss}(k)$, donc $\dim(C) = n - 1$. \square

Lemme 114. *Soit $C \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ une composante irréductible supersingulière. Alors $C_s := s(C)$ et $C_t := t(C)$ sont des composantes irréductibles de \overline{Sh}_K^{ss} .*

Démonstration. Ce sont des fermés irréductibles de dimension $\geq \frac{n-1}{2}$ car les fibres sont de dimension $\leq \frac{n-1}{2}$. Or \overline{Sh}_K^{ss} est équidimensionnel de dimension $\frac{n-1}{2}$ ([VW11] théorème 5.2), d'où le résultat. \square

Proposition 115. *On suppose que $(s, t) : p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c),ss} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p}) \rightarrow \overline{Sh}_K^{ss} \times \overline{Sh}_K^{ss}$ est une immersion fermée. Soit C_1, C_2 deux composantes irréductibles supersingulières de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ telles que $C_{1,s} = C_{2,s}$ et $C_{1,t} = C_{2,t}$. Alors $C_1 = C_2$.*

Démonstration. Le morphisme (s, t) induit une immersion fermée $C_1 \hookrightarrow C_{1,s} \times C_{1,t}$. Le produit $C_{1,s} \times C_{1,t}$ est irréductible, de dimension $n - 1$. En effet, quitte à passer à un revêtement étale, on peut supposer K^p assez petit pour que $C_{1,s}$ et $C_{2,s}$ soient lisses, donc le produit est irréductible. Ainsi (s, t) induit un isomorphisme $C_1 \xrightarrow{\sim} C_{1,s} \times C_{1,t}$. En faisant de même pour C_2 , on a le résultat. \square

On note \mathcal{F} le Frobenius de \overline{Sh}_K et de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$. Si C est un cycle, on note $|C|$ son support.

Proposition 116. *Soit \tilde{C} une composante irréductible de $\overline{Sh}_K^{ss} \times k$. On a l'égalité :*

$$\mathcal{F}(\tilde{C}) = \langle p \rangle \tilde{C}.$$

Démonstration. Soit $K'^p \subset K^p$ tel que pour le niveau K'^p , tout point $x \in \overline{Sh}_K^{ss}(k)$ de type n (i.e tel que $\mathbb{D}(x)$ est de type n), appartienne à une unique composante irréductible (voir théorème (30)). Le revêtement étale : $\overline{Sh}_{K'} \rightarrow \overline{Sh}_K$ commute aux opérateurs \mathcal{F} et $\langle p \rangle$, donc finalement on peut supposer que \overline{Sh}_K vérifie cette condition. Soit $x \in \tilde{C}(k)$ tel que $M = \mathbb{D}(x)$ soit de type n . Alors $t_2^{-1}(x)$ possède une unique composante irréductible C de dimension $\frac{n-1}{2}$, car $a_2 = 1$ (voir paragraphe 7.2), associée à $L^+ = \Lambda^-(M)$. Un k -point $f \in t_2^{-1}(x)$ induit une inclusion $M' \subset M$ de modules de Dieudonné. Alors $f \in C(k)$ si et seulement si $M' \subset \Lambda^-(M)$. Les isogenies $p : \langle p^{-1} \rangle x \rightarrow x$ et $\mathcal{V} : \langle p^{-2} \rangle \mathcal{F}x \rightarrow x$ appartiennent à C car $pM \subset \Lambda^-(M)$ et $V^2M \subset \Lambda^-(M)$ (car $\Lambda^-(M)$ est stable par $\tau^{-1} = p^{-1}V^2$). Donc $\langle p^{-2} \rangle \mathcal{F}x$ et $\langle p^{-1} \rangle x$ appartiennent à $s(C)$, composante irréductible de $\overline{Sh}_K^{ss} \times k$. Or $\langle p^{-2} \rangle \mathcal{F}x \in \langle p^{-2} \rangle \mathcal{F}(\tilde{C})$ et $\langle p^{-1} \rangle x \in \langle p^{-1} \rangle \tilde{C}$ d'où $\langle p^{-2} \rangle \mathcal{F}(\tilde{C}) = s(C) = \langle p^{-1} \rangle \tilde{C}$ car un point de type n appartient à une unique composante irréductible de $\overline{Sh}_K^{ss} \times k$. \square

Le pull-back par $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k \hookrightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$ définit un homomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres :

$$\mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})] \hookrightarrow \mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k]. \quad (7.4.1)$$

7.5 Revêtements étales

Soit K^p et K'^p deux sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{A}_f^p)$, tels que $K'^p \subset K^p$. On note $K = K_p K^p$ et $K' = K_p K'^p$. Alors on a des revêtements étales :

$$\begin{aligned} \pi : Sh_{K'} &\longrightarrow Sh_K \\ \Pi : p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'} &\longrightarrow p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K. \end{aligned}$$

Lemme 117. *Le push-forward par Π définit un morphisme d'anneaux*

$$\Pi_* : \mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c)} \times k] \longrightarrow \mathbb{Q} [p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(c)} \times k].$$

De plus, $\Pi_*(F) = \text{deg}(\pi)F$ et $\Pi_*(\langle p \rangle) = \text{deg}(\pi) \langle p \rangle$.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c)} \times p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c)} & \xrightarrow{c} & p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c)} \\ \downarrow \Pi \times \Pi & & \downarrow \Pi \\ p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(c)} \times_{s,t} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(c)} & \xrightarrow{c} & p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(c)} \end{array}$$

Si C_1, C_2 sont deux cycles,

$$\begin{aligned} \Pi_*(C_1 \cdot C_2) &= \Pi_* c_*(C_1 \times_{t,s} C_2) \\ &= c_*(\Pi \times \Pi)_*(C_1 \times_{t,s} C_2) \\ &= c_*(\Pi_*(C_1) \times_{t,s} \Pi_*(C_2)) \\ &= \Pi_*(C_1) \cdot \Pi_*(C_2). \end{aligned}$$

On en déduit que Π_* est un morphisme d'anneaux. On a un autre diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(2)} \times k & \xrightarrow{\Pi} & p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_K^{(2)} \times k \\ \uparrow F & & \uparrow F \\ \overline{Sh}_{K'} \times k & \xrightarrow{\pi} & \overline{Sh}_K \times k \end{array}$$

donc $\Pi_*(F) = \deg(\pi)F$ et de même $\Pi_*(\langle p \rangle) = \deg(\pi) \langle p \rangle$. \square

7.6 Théorème principal

Lemme 118. *Soit $C \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ une composante irréductible supersingulière. On suppose que (s, t) est une immersion fermée sur $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c+2)} \times k$. Dans $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times k]$, on a la relation :*

$$C \cdot (F - p^{n-1} \langle p \rangle) = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que les cycles $C \cdot F$ et $C \cdot \langle p \rangle$ ont même support. Les fermés $|C \cdot F|$ et $|C \cdot \langle p \rangle|$ sont des composantes irréductibles de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c+2)} \times k$. En effet, ce sont les images directes par c des fermés $C \times_{t,s} F$ et $C \times_{t,s} \langle p \rangle$, qui sont isomorphes à C . On voit facilement que $s(C \cdot F) = s(C \cdot \langle p \rangle)$. D'après la proposition 116, on a :

$$t(C \cdot F) = \mathcal{F}(C_t) = \langle p \rangle C_t = t(C \cdot \langle p \rangle).$$

D'après la proposition 115, on a $|C \cdot F| = |C \cdot \langle p \rangle|$, qu'on note X .

La projection sur C définit des isomorphismes $a_F : C \times_{t,s} F \rightarrow C$ et $a_p : C \times_{t,s} \langle p \rangle \rightarrow C$. Notons $c_F = c \circ a_F^{-1}$ et $c_p = c \circ a_p^{-1}$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 C \times_{t,s} F & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{(s,t)} & C_s \times \mathcal{F}(C_t) \\
 \uparrow \simeq & \nearrow c_F & & \nearrow \text{id} \times \mathcal{F} & \\
 C & \xrightarrow{(s,t)} & C_s \times C_t & & \\
 \downarrow \simeq & \searrow c_p & & \searrow \text{id} \times \langle p \rangle & \\
 C \times_{t,s} \langle p \rangle & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{(s,t)} & C_s \times \langle p \rangle (C_t)
 \end{array}$$

On rappelle que $\mathcal{F}(C_t) = \langle p \rangle C_t$. Par définition, $C \cdot F = \deg(c_F)X$ et $C \cdot \langle p \rangle = \deg(c_p)X$. Le diagramme montre que

$$\frac{\deg(c_F)}{\deg(c_p)} = \frac{\deg(\text{id} \times \mathcal{F})}{\deg(\text{id} \times \langle p \rangle)}.$$

Or $\langle p \rangle : C_t \rightarrow \langle p \rangle C_t$ est de degré 1 et $\mathcal{F} : C_t \rightarrow \mathcal{F}(C_t)$ est de degré $p^{2\frac{n-1}{2}} = p^{n-1}$ puisque C_t est de dimension $\frac{n-1}{2}$. Finalement, $\deg(c_F) = p^{n-1}\deg(c_p)$, d'où $C \cdot F = p^{n-1}C \cdot \langle p \rangle$. \square

Théorème 119. Soit $C \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ une composante irréductible supersingulière. Dans $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times k]$, on a la relation :

$$C \cdot (F - p^{n-1} \langle p \rangle) = 0.$$

Démonstration. Soit $K'^p \subset K^p$ tel que (s, t) est une immersion fermée sur $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}_{K'}^{(c+2)} \times k$ (proposition 112), et C' une composante irréductible supersingulière de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(c)} \times k$ telle que $\Pi(C') = C$. On a $C' \cdot (F - p^{n-1} \langle p \rangle) = 0$ (lemme 118), et en prenant l'image par Π_* , on trouve $C \cdot (F - p^{n-1} \langle p \rangle) = 0$ (lemme 117). \square

Théorème 120. Soit H_p le polynôme de Hecke (définition 5). On considère les coefficients de H_p dans l'algèbre $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ à travers le morphisme $\sigma \circ h$ défini par (3.3.1). On a la relation :

$$H_p(F) = 0.$$

Démonstration. On a $H_p(t) = R(t) \cdot (t - p^{n-1} \langle p \rangle)$ où $R(t)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}[p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog} \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})]$ (théorème 13). On sait que $R(F) =$

Chapitre 8

Relèvements

Dans ce chapitre, on montre dans le cas $n = 3$ que H_p n'est pas "ordinaire". On adopte les notations du chapitre 6. Vus les coefficients de H_p (théorème 18), il suffit de montrer que l'image de $1_{K_p}pgK_p$ par le morphisme $\sigma \circ h$ (voir diagramme (3.3.1)) est un cycle dont le support contient des composantes supersingulières de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \times E_p$.

Si $C \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \times E_p$ est une composante irréductible, il est facile de voir que $\tau(C) \in \{pK_p, K_ppgK_p\}$ (voir section 3.3). De plus, si $\tau(C) = pK_p$, alors C est une composante de $\text{Mult}(p) \times E_p \subset p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \times E_p$.

La spécialisation de $\text{Mult}(p) \times E_p$ est $\text{Mult}(p) \times \kappa(\mathcal{O}_{E_p})$, donc est contenue dans l'adhérence du lieu ordinaire. Ainsi, $\sigma \circ h(1_{K_p}pgK_p)$ possède les mêmes composantes supersingulières que la réduction de l'adhérence schématique S de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)} \times E_p$ dans $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}$.

Il est clair que tout point $\bar{x} \in p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}(k)$ qui se relève en un point x sur W est dans $S(k)$. Dans ce chapitre, on montre qu'il existe des points de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}(k)$ n'appartenant pas à l'adhérence du lieu ordinaire qui se relèvent sur W . Ceci montrera le résultat.

Il est mentionné sans démonstration dans [BW06] (fin de la page 2) que S possède des composantes irréductibles supersingulières. Sans doute peut-on le montrer plus simplement qu'en étudiant les relèvement sur W . Nous choisissons cette méthode pour illustrer la théorie des déformations.

8.1 Quelques résultats

Nous donnons ici sans preuve des résultats généraux, commentés plus amplement dans [Con04]. Soit S un schéma sur lequel p est localement nilpotent

(par exemple $\text{Spec}(\frac{W}{p^n W})$) et $S_0 \hookrightarrow S$ une immersion fermée telle que le faisceau idéal correspondant \mathcal{I} vérifie $\mathcal{I}^N = 0$ pour un certain entier N . Soit A, A' deux schémas abéliens sur S . On note A_0 et A'_0 les réductions sur S_0 .

Théorème 121 (Serre-Tate). *Le carré suivant possède des flèches injectives et il est cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_S(A, A') & \longrightarrow & \text{Hom}_{S_0}(A[p^\infty], A'[p^\infty]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{S_0}(A_0, A'_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S_0}(A_0[p^\infty], A'_0[p^\infty]) \end{array}$$

De plus, si $S_0 \hookrightarrow S$ est une immersion fermée comme plus haut, A_0 une variété abélienne sur S_0 , Γ un groupe p -divisible sur S muni d'un isomorphisme $f_0 : \Gamma_0 \simeq A_0[p^\infty]$; alors il existe un schéma abélien A sur S et un isomorphisme $f : \Gamma \simeq A[p^\infty]$ liftant f_0 . Le couple (A, f) est unique à unique isomorphisme près.

Théorème 122 (Grothendieck). *Soit R un anneau noethérien séparé complet pour la topologie I -adique, où I est un idéal. Soit X, Y deux R -schémas propres et X_n, Y_n leur réduction à $R_n = \frac{R}{I^{n+1}}$. Alors l'application naturelle : $\text{Hom}_R(X, Y) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}_{R_n}(X_n, Y_n)$ est bijective. De plus, soit $\{X_n\}$ un système compatible de schémas propres sur les R_n , et \mathcal{L}_0 un faisceau inversible ample sur X_0 qui peut être relevé de manière compatible à un faisceau inversible ample \mathcal{L}_n sur R_n . Alors il existe un schéma X sur R et un faisceau inversible ample \mathcal{L} sur R qui relève de manière compatible les (X_n, \mathcal{L}_n) . De plus, le couple (X, \mathcal{L}) est unique à unique isomorphisme près.*

Corollaire 123. *Soit (R, \mathfrak{m}) un anneau local noethérien complet de corps résiduel $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$ de caractéristique $p > 0$. Soit A, A' deux schémas abéliens sur R et A_n, A'_n les réductions modulo \mathfrak{m}^n . Alors à l'intérieur de $\text{Hom}_k(A_0[p^\infty], A'_0[p^\infty])$, on a l'égalité :*

$$\text{Hom}_R(A, A') = \text{Hom}_k(A_0, A'_0) \cap \bigcap_n \text{Hom}_{R_n}(A_n[p^\infty], A'_n[p^\infty]).$$

Remarque 124. La flèche de réduction $\text{Hom}_R(A, A') \rightarrow \text{Hom}_k(A_0, A'_0)$ est injective.

8.2 Cohomologie cristalline et déformations

La cohomologie cristalline permet de linéariser le problème de déformation d'une variété abélienne. On utilise la théorie exposée dans [Mes72].

Soit \mathcal{X} un schéma sur \mathcal{O}_{E_p} , et \overline{X} sa fibre spéciale. Soit (R, \mathfrak{m}) une \mathcal{O}_{E_p} -algèbre locale de corps résiduel k . On dit qu'un point $x \in \overline{X}(k)$ se relève (ou se déforme) sur R s'il existe $\text{Spec}(R) \rightarrow \mathcal{X}$ dont la réduction modulo \mathfrak{m} est x . On s'intéressera au relèvement sur l'anneau $W = W(k)$.

Soit A_0 une variété abélienne sur k munie d'une polarisation $\lambda_0 : A_0 \rightarrow A_0^\vee$ et d'une action $\iota_0 : \mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow \text{End}(A_0) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Soit M le module de Dieudonné quasi-unitaire de A_0 . Notons $M_0 = \frac{M}{pM}$ le module de Dieudonné de $A[p]$. On a un diagramme commutatif exact, appelé filtration de Hodge :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (H^1(A_0, \mathcal{O}_{A_0}))^\vee & \longrightarrow & (H_{DR}^1(A_0))^\vee & \longrightarrow & (H^0(A_0, \Omega_{A_0/k}^1))^\vee \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & VM_0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & \frac{M_0}{VM_0} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Soit R un anneau de valuation discrète complet (on notera la valuation v), de corps résiduel k . On fait l'hypothèse $v(p) \leq p - 1$. Soit $(\mathcal{A}, \lambda, \iota)$ un schéma abélien sur R qui relève $(A_0, \lambda_0, \iota_0)$. Alors on a

$$\begin{aligned} H_{cris}^1(A_0) &= H_{DR}^1(\mathcal{A}/R) \\ (H_{cris}^1(A_0))^\vee &= M \otimes R. \end{aligned}$$

De plus, la forme bilinéaire sur M coïncide avec celle induite par λ sur $(H_{DR}^1(\mathcal{A}/R))^\vee$. Notons $\mathcal{V} = (H^1(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}}))^\vee$. Alors la suite exacte qui suit est un relèvement de la filtration de Hodge :

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow (H_{DR}^1(\mathcal{A}))^\vee \longrightarrow (H^0(\mathcal{A}, \Omega_{\mathcal{A}/R}^1))^\vee \longrightarrow 0$$

Théorème 125. *Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k , tel que $v(p) < p - 1$. Soit $(A_0, \lambda_0, \iota_0)$ une variété abélienne sur k de type local-local (e.g supersingulière) de dimension g , polarisée, avec \mathcal{O}_E -structure. Soit (M, \langle, \rangle) le module de Dieudonné quasi-unitaire associé, et $\mathcal{V} \subset M \otimes R$ un R -sous-module vérifiant :*

- (LIFT1) *Le sous-module \mathcal{V} est libre de rang g sur R .*
- (LIFT2) *On a $\frac{\mathcal{V}}{p\mathcal{V}} = V(M \otimes \frac{R}{pR})$.*
- (LIFT3) *Le sous-module \mathcal{V} est totalement isotrope pour \langle, \rangle .*

(LIFT4) *Le sous-module \mathcal{V} est stable par l'action de \mathcal{O}_E .*

Alors il existe un unique relèvement $(\mathcal{A}, \lambda, \iota)$ sur R associé à $\mathcal{V} \subset M \otimes R$ comme ci-dessus.

Démonstration. On renvoie à [Oor87] pour le même résultat sans l'action de \mathcal{O}_E . L'hypothèse 4 ci-dessus permet de définir l'action de \mathcal{O}_E sur la variété abélienne \mathcal{A} . La compatibilité des différentes structures est automatique, par fidélité du foncteur de réduction (Remarque 124). \square

Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés abéliennes sur R relevant $(A_0, \lambda_0, \iota_0)$ et celle des relèvements de la filtration de Hodge sur R . Ainsi, si $(A_1, \lambda_1, \iota_1) \xrightarrow{f} (A_0, \lambda_0, \iota_0)$ est une isogénie, relever f sur R revient à trouver deux sous-modules $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{D}(A_1) \otimes R$ et $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{D}(A_0) \otimes R$ tels que $\mathbb{D}(A_1) \otimes R \xrightarrow{f} \mathbb{D}(A_0) \otimes R$ vérifie $f(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_0$.

Lemme 126. *Quand $R = W$, les conditions 1 à 4 ci-dessus sont équivalentes à :*

(LIFT1') *Le sous-module \mathcal{V} est un facteur direct de M de rang g .*

(LIFT2') *On a $\mathcal{V} + pM = VM$.*

(LIFT3') *Le sous-module \mathcal{V} est totalement isotrope pour \langle, \rangle .*

(LIFT4') *Le sous-module \mathcal{V} est stable par l'action de \mathcal{O}_E .*

Démonstration. En effet, la condition (LIFT2) devient :

$$\frac{\mathcal{V}}{p\mathcal{V}} = \frac{VM}{pM}.$$

Donc $\mathcal{V} + pM = VM$ et $\mathcal{V} \cap pM = p\mathcal{V}$. Pour que \mathcal{V} soit facteur direct de M , il faut et il suffit que le quotient $\frac{M}{\mathcal{V}}$ soit sans torsion. Soit $x \in M$ tel que $p^n x \in \mathcal{V}$ avec $n \geq 1$. Alors $p^n x \in \mathcal{V} \cap pM$, donc $p^n x \in p\mathcal{V}$, d'où $p^{n-1}x \in \mathcal{V}$, et on en déduit par récurrence $x \in \mathcal{V}$. Ainsi, les conditions du théorème 125 implique celles du lemme 126. réciproquement, si \mathcal{V} est facteur direct, alors les considérations précédentes montrent que $\mathcal{V} \cap pM = p\mathcal{V}$, ce qui achève la preuve. \square

Définition 127. Un module liftant sur R est sous- R -module $\mathcal{V} \subset M \otimes R$ vérifiant (LIFT1) à (LIFT4).

8.3 Déformation des points de $\overline{Sh}_K(k)$ et $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}(k)$ sur W

On applique les résultats généraux précédents. On appellera “droite” un W -module de rang 1.

Proposition 128. *Soit M un cristal unitaire de signature $(2, 1)$. L’application $\mathcal{V} \mapsto D = \mathcal{V}_e$ établit une bijection entre les modules $\mathcal{V} \subset M$ liftant sur W et les droites $D \subset (VM)_e$ non contenues dans pM .*

Démonstration. Soit \mathcal{V} un sous-module liftant sur W . L’action de $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ sur \mathcal{V} a pour déterminant $e\bar{e}^2$ car $\frac{\mathcal{V}}{p\mathcal{V}} = \frac{VM}{pM}$. Donc $\mathcal{V} = \mathcal{V}_e \oplus \mathcal{V}_{\bar{e}}$ avec $\text{rg}_W(\mathcal{V}_e) = 1$ et $\text{rg}_W(\mathcal{V}_{\bar{e}}) = 2$. Puisque \mathcal{V} est facteur direct de M totalement isotrope, il est égal à son orthogonal dans M . Ainsi $\mathcal{V}_{\bar{e}} = \{x \in M_{\bar{e}}, \langle x, \mathcal{V}_e \rangle = 0\} = \mathcal{V}_{\bar{e}}^\perp \cap M_{\bar{e}}$. Soit $D \subset (VM)_e$ une droite non contenue dans pM_e . Soit \mathcal{V} le W -module totalement isotrope de rang 3 tel que $\mathcal{V}_e = D$ et $\mathcal{V}_{\bar{e}} = D^\perp \cap M_{\bar{e}}$. Alors D est un facteur direct de M_e puisque $\frac{M_e}{D}$ est sans torsion, vue la condition sur D . De même, $\mathcal{V}_{\bar{e}}$ est facteur direct de $M_{\bar{e}}$ car le quotient $\frac{M_{\bar{e}}}{D^\perp \cap M_{\bar{e}}}$ est sans torsion : Soit $x \in M_{\bar{e}}$ tel que $p^n x \in D^\perp$. Alors $\langle p^n x, D \rangle = 0$, donc $\langle x, D \rangle = 0$ d’où $x \in D^\perp$. Ainsi, la condition (LIFT1’) est satisfaite. Le sous-module \mathcal{V} est clairement stable par l’action de \mathcal{O}_{E_p} , et il est isotrope. Enfin, dans $\frac{M}{pM}$, considérons les sous-espaces $\frac{\mathcal{V}+pM}{pM}$ et $\frac{VM}{pM}$. Ils sont totalement isotropes de dimension 3 et ont la même e -partie, donc sont égaux. D’où $\mathcal{V} + pM = VM$. \square

Soit $(A_1, \lambda_1, \iota_1) \xrightarrow{f} (A_0, \lambda_0, \iota_0)$ est une p -isogénie de multiplicateur 2, qui induit $\mathbb{D}(A_1) \xrightarrow{f} \mathbb{D}(A_0)$. On note $M_0 = \mathbb{D}(A_0)$ et $M_1 = f(\mathbb{D}(A_1))$. Alors M_0 est unitaire et $p^2 M_1^\vee = M_1$. Ainsi $\mathbb{D}(A_1)$ est isomorphe à M_1 muni de la polarisation $p^{-2} \langle, \rangle_{M_0}$.

Théorème 129. *Soit $M_1 \subset M_0$ des modules de Dieudonné quasi-unitaires supergénéraux de signature $(2, 1)$. On suppose M_0 unitaire et $p^2 M_1^\vee = M_1$. De plus, on suppose $M_1 \notin \{F^2 M_0, V^2 M_0\}$. Alors il existe des W -sous-modules liftants $\mathcal{V}_1 \subset M_1$ et $\mathcal{V}_0 \subset M_0$ tels que $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$.*

Démonstration. On utilise les diagrammes d’indices de l’appendice A. Nous supposons pour commencer que M_1 est différent de pM_0 . On note $M = F^2 M_0 + V^2 M_0 + pM_0 = \Lambda^+(M_1) = \Lambda^-(M_0)$.

Montrons que $\mathcal{V}_1 = M_1 \cap \mathcal{V}_0$. On a l’inclusion $\frac{\mathcal{V}_0}{M_1 \cap \mathcal{V}_0} \hookrightarrow \frac{M_0}{M_1}$, donc $\frac{M_1 \cap \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_1}$ est de torsion, d’où $M_1 \cap \mathcal{V}_0$ est de rang 3. On a l’inclusion $\frac{M_1 \cap \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_1} \hookrightarrow \frac{M_1}{\mathcal{V}_1}$ et $\frac{M_1}{\mathcal{V}_1}$ est

sans torsion, d'où $\mathcal{V}_1 = M_1 \cap \mathcal{V}_0$. D'après la proposition 128, il suffit de trouver une droite $D \subset (VM_0)_e$ telle que :

$$\begin{aligned} D &\not\subset pM_0 \\ D \cap M_1 &\subset VM_1 \\ D \cap M_1 &\not\subset pM_1. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Soit $D \subset (VM_0)_e$ non contenue dans pM_0 . Montrons dans que D n'est pas contenue dans M_1 . Sinon, D serait contenue dans $VM_0 \cap M_1$. Or le déterminant de $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agissant sur $\frac{VM_0 \cap M_1}{pM}$ est \bar{e}^2 d'après le Diagramme 3 de l'appendice A. Par conséquent, $D \subset pM \subset pM_0$, ce qui est faux. Ainsi, $D \not\subset M_1$.

Montrons que $pD \subset M_1$. Il suffit de montrer $p(VM_0)_e \subset M_1$. D'après le Diagramme 2, le déterminant de $\frac{pVM_0 + M_1}{M_1}$ est \bar{e} , ce qui montre le résultat. On en déduit $D \cap M_1 = pD$. On sait déjà que $pD \not\subset pM_1$, donc il reste à voir si $pD \subset VM_1$.

D'après l'étude menée ci-dessus, l'énoncé du théorème est équivalent à l'existence d'une droite D vérifiant :

$$\begin{aligned} D &\subset (VM_0 \cap p^{-1}VM_1)_e \\ D &\not\subset pM_0. \end{aligned}$$

Une telle droite existe si et seulement si $(VM_0 \cap p^{-1}VM_1)_e \not\subset pM_0$, ce qui équivaut à $(pM_0 \cap M_1)_{\bar{e}} \not\subset pFM_0$. D'après le diagramme 6, le déterminant du quotient

$$\frac{(pM_0 \cap M_1) + pFM_0}{pFM_0 + pM}$$

est \bar{e} . Ainsi, $(pM_0 \cap M_1)_{\bar{e}} \not\subset pFM_0 + pM$, ce qui conclut la preuve du théorème quand $M_1 \neq pM_0$.

Si $M_1 = pM_0$, alors n'importe quelle droite $D \subset (VM_0)_e$ non contenue dans pM_0 convient. Son intersection avec M_1 est pD , qui est contenue dans VM_1 mais pas dans pM_1 . Ceci achève la preuve du théorème. \square

Ainsi, la "plupart" des points de $p\text{-}\mathcal{I} \text{ sog}^{(2)}(k)$ dont la source et le but sont supergénéraux se relèvent sur W . Achéons l'étude en traitant le cas $M_1 \in \{F^2M_0, V^2M_0\}$, qui correspond à un point de l'adhérence du lieu ordinaire.

Proposition 130. *Soit M_0 un cristal unitaire supergénéral de signature $(2, 1)$ et $M_1 = F^2M_0$ ou V^2M_0 . Il n'existe pas de modules liftants $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_0$ sur W pour M_1 et M_0 respectivement tels que $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$.*

Démonstration. Nous supposons $M_1 = F^2M_0$. L'autre cas est similaire. D'après la preuve du théorème 129, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de droite $D \subset (VM_0)_e$ vérifiant les conditions (8.3.1) ci-dessus. Soit $D \subset (VM_0)_e$ une droite non contenue dans pM_0 . Déterminons l'intersection $D \cap M_1$.

Premièrement, on a $D \not\subset M_1 = F^2M_0$. Supposons par l'absurde $D \subset F^2M_0$. Alors $D \subset (VM_0)_e \cap F^2M_0$, et par le Diagramme 4, on en déduit que $D \subset pM$ (où $M = p\Lambda^+(M_0)$). A fortiori, $D \subset pM_0$, contradiction. Par conséquent, $D \not\subset M_1$.

Deuxièmement, $pD \subset M_1$. Il suffit de montrer $p(VM_0)_e \subset F^2M_0$. Ceci équivaut à $pV^2((VM_0)_e) \subset \underline{p^2M_0}$, ou encore à $(V^3M_0)_e \subset pM_0$. Comme M_0 est supergénéral, on a $\overline{M_0} \simeq \mathbb{B}(3)$. La matrice de V^3 dans la base $(e_i, f_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ est donnée au début de l'appendice A. On constate que $(V^3\overline{M_0})_e = 0$, d'où $(V^3M_0)_e \subset pM_0$. Ainsi $pD \subset M_1$ et $D \cap M_1 = pD$.

On sait que $pD \not\subset pM_1$, donc les conditions (8.3.1) se resument à $pD \subset VM_1 = pFM_0$ donc $D \subset FM_0$. Si ceci était vrai, D serait contenue dans $FM_0 \cap (VM_0)_e$. Par le diagramme 5, ceci implique $D \subset pM_0$, contradiction. \square

Remarque 131. Il est possible que ces points se déforment sur un anneau avec suffisamment de ramification.

Appendices

A. Diagrammes des indices

Soit $M_1 \subset M_0$ deux cristaux quasi-unitaires supersinguliers supergénéraux de signature $(2, 1)$. On suppose M_0 unitaire, $p^2 M_1^\vee = M_1$ et $M_1 \notin \{V^2 M_0, F^2 M_0, pM_0\}$. On note $M = \Lambda^-(M_0)$, cristal superspécial de signature $(3, 0)$ tel que $pM^\vee = M$.

En particulier, $\overline{M}_0 \simeq \overline{M}_1 \simeq \overline{\mathbb{B}(3)}$. On considère la base $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$, avec les notations du paragraphe 2.3.2.a. On a $F^4 = V^4 = 0$ et dans cette base, on a :

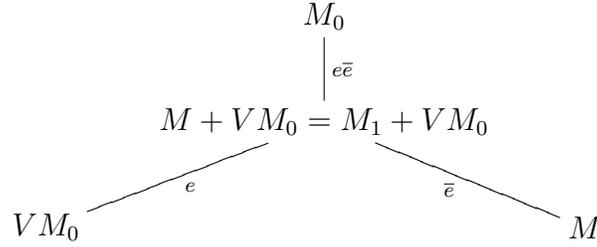
$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \sigma \quad V = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array} \right) \sigma^{-1}$$

$$F^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sigma^2 \quad V^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sigma^{-2}$$

$$F^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \sigma^3 \quad V^3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \sigma^{-3}$$

On représente une inclusion $A \subset B$ par un segment descendant de B vers A . Le déterminant de l'action de $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ sur $\frac{B}{A}$ est noté à côté du segment. La signature de M_0, M_1 est $(2, 1)$, donc le déterminant du quotient $\frac{M_0}{VM_0}$ est $e^2\bar{e}$. C'est aussi le déterminant de $\frac{M_0}{FM_0}$.

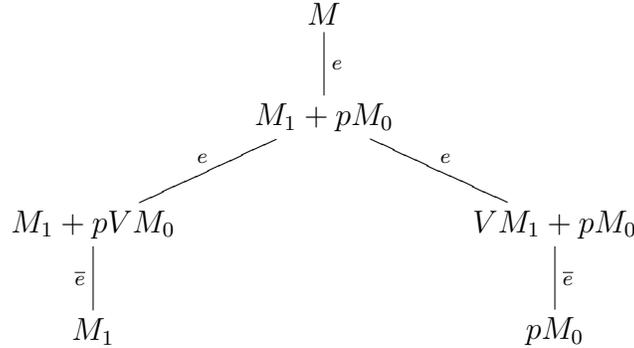
Diagramme 1



Démonstration. Le cristal $M + VM_0 = F^2M_0 + VM_0$ est d'indice 2 dans M_0 (observer les matrices de F^2 et V ci-dessus), et le quotient a pour déterminant $e\bar{e}$. De même, le déterminant de $\frac{M_0}{M}$ est $e\bar{e}^2$ (observer les matrices de F^2 et V^2). On a $VM_0 \subset M_1 + VM_0 \subset M + VM_0$. Or $M_1 \not\subset VM_0$ d'après la figure 5.3.2 et l'hypothèse $M_1 \notin \{V^2M_0, F^2M_0, pM_0\}$. Donc $M_1 + VM_0 = M + VM_0$. \square

Remarque 132. En reprenant la preuve, le diagramme 1 reste valable en remplaçant VM_0 par FM_0 . Les déterminants restent identiques.

Diagramme 2



Démonstration. D'après la remarque 132, $[M_1 + FM_0 : FM_0] = 1$ avec déterminant e , donc $[VM_1 + pM_0 : pM_0] = 1$ avec déterminant \bar{e} . Les cristaux M_1 et pM_0 jouent des rôles symétriques, donc $[pVM_0 + M_1 : M_1] = 1$ avec déterminant \bar{e} . Le sous-espace $\left(\frac{M_1}{pM}\right)_e \subset \frac{M}{pM}$ est de dimension 1, engendré

par un $x \in \left(\frac{M_1}{pM}\right)_e$ (voir 5.3.2.2). Par isotropie, on a $\left(\frac{M_1}{pM}\right)_{\bar{e}} = (x^\perp)_{\bar{e}}$. De même $\left(\frac{pM_0}{pM}\right)_e = \text{Vect}(y)$ pour $y \in \frac{M}{pM}$, et $\left(\frac{pM_0}{pM}\right)_{\bar{e}} = (y^\perp)_{\bar{e}}$. On a $M_1 \neq pM_0$ donc $kx \neq ky$ et également $(x^\perp)_{\bar{e}} \neq (y^\perp)_{\bar{e}}$. D'où $(x^\perp)_{\bar{e}} + (y^\perp)_{\bar{e}} = \left(\frac{M}{pM}\right)_{\bar{e}}$ et $kx + ky \stackrel{1}{\subset} \left(\frac{M}{pM}\right)_e$, donc $M_1 + pM_0 \stackrel{1}{\subset} M$. Enfin, le déterminant de $\frac{M}{pM_0}$ est $e^2\bar{e}$ car celui de $\frac{M_0}{M}$ est $e\bar{e}^2$ (diagramme 1). \square

Diagramme 3

$$\begin{array}{c} M_1 \\ | \\ e \\ M_1 \cap VM_0 \\ | \\ \bar{e} \\ M_1 \cap pM_0 \\ | \\ \bar{e} \\ pM \end{array}$$

Démonstration. Le quotient $\frac{M_1}{M_1 \cap VM_0} \simeq \frac{M_1 + VM_0}{VM_0}$ est de rang 1 avec déterminant e , par le diagramme 1. Le déterminant du quotient $\frac{M_1}{pM}$ est $e\bar{e}^2$. On a un isomorphisme $\frac{M_1}{M_1 \cap pM_0} \simeq \frac{M_1 + pM_0}{pM_0}$, et on conclut avec le diagramme 2. \square

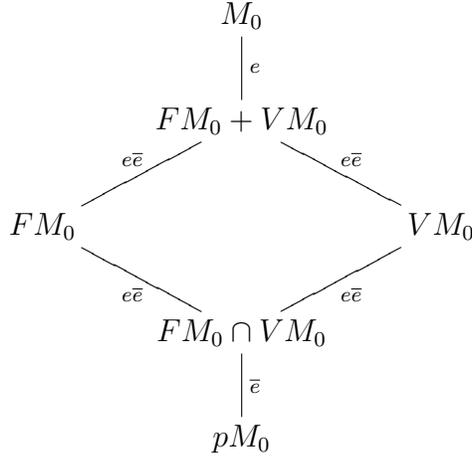
Diagramme 4

$$\begin{array}{c} F^2M_0 \\ | \\ e \\ F^2M_0 \cap VM_0 \\ | \\ \bar{e} \\ F^2M_0 \cap pM_0 \\ | \\ \bar{e} \\ pM \end{array}$$

Démonstration. L'inclusion $pM \stackrel{3}{\subset} F^2M_0$ déterminant $e\bar{e}^2$ par le diagramme 1, appliqué à F^2M_0 à la place de M_0 . On a deux isomorphismes $\frac{F^2M_0}{F^2M_0 \cap pM_0} \simeq \frac{F^2M_0 + pM_0}{pM_0}$ et $\frac{F^2M_0}{F^2M_0 \cap VM_0} \simeq \frac{F^2M_0 + VM_0}{VM_0}$. En observant la matrice de F^2 , on voit

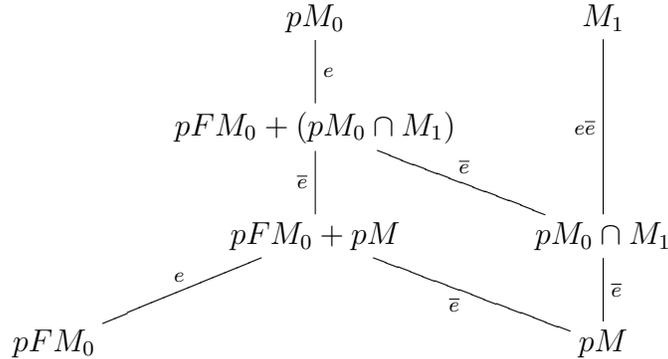
que $pM_0 \stackrel{2}{\subset} F^2M_0 + pM_0$ avec déterminant $e\bar{e}$. De même $pM_0 \stackrel{1}{\subset} F^3M_0 + pM_0$ avec déterminant \bar{e} . En appliquant $p^{-1}V$, on a $VM_0 \stackrel{1}{\subset} F^2M_0 + VM_0$, avec déterminant e . \square

Diagramme 5



Démonstration. Le déterminant de $\frac{M_0}{VM_0}$ et $\frac{M_0}{FM_0}$ est $e^2\bar{e}$. Puisque M_0 est surpérogénéral, son a-nombre vaut 1, donc $FM_0 + VM_0 \stackrel{1}{\subset} M_0$. Son déterminant est e , en observant les matrices de F et V . On a les isomorphismes : $\frac{FM_0}{FM_0 \cap VM_0} \simeq \frac{FM_0 + VM_0}{VM_0}$ et $\frac{VM_0}{FM_0 \cap VM_0} \simeq \frac{FM_0 + VM_0}{FM_0}$, ce qui permet de compléter le diagramme. Enfin, le déterminant de l'inclusion $pM_0 \subset FM_0 \cap VM_0$ est \bar{e} car celui de l'inclusion $pM_0 \subset M_0$ est $e^3\bar{e}^3$. \square

Diagramme 6



Démonstration. Commençons en bas à droite. D'après le diagramme 3, $pM \stackrel{1}{\subset} M_1 \cap pM_0$ avec déterminant \bar{e} , et $M_1 \cap pM_0$ est d'indice 2 dans M_1 et pM_0

avec déterminant $e\bar{e}$. Par la remarque 132, FM_0 et M sont d'indice 1 dans $FM_0 + M$ avec déterminants respectifs e et \bar{e} , ce qui donne la partie inférieure et la partie droite du diagramme.

Les cristaux $pFM_0 + pM$ et $pM_0 \cap M_1$ sont différents. Sinon on aurait l'inclusion $pFM_0 \stackrel{3}{\subset} M_1$, et la figure 5.3.1 impliquerait que $pFM_0 \in \{FM_1, VM_1\}$, donc $M_1 \in \{F^2M_0, pM_0\}$ ce qui est exclu.

Par conséquent, $pFM_0 + pM$ et $pM_0 \cap M_1$ sont différents et dans l'espace $\frac{M}{pM}$, ils correspondent à deux droites distinctes contenues dans la \bar{e} -partie. La somme de ces deux droites est donc un sous-espace de dimension 2, également contenu dans la \bar{e} -partie. On en déduit le résultat. \square

B. Cristaux presque unitaires supersinguliers

Si M' est un cristal unitaire supersingulier, on note $\mathcal{C}_1(M')$ l'ensemble des cristaux M vérifiant :

- (i) $pM' \stackrel{2}{\subset} pM^\vee \stackrel{2}{\subset} M \stackrel{2}{\subset} M'$
- (ii) M est stable par \mathcal{O}_{E_p}

L'application $M \mapsto \widetilde{M} = \frac{pM^\vee}{pM'}$ définit une bijection

$$\mathcal{C}_1(M') \longrightarrow \mathcal{C}_1(\overline{M'}) \quad (8.3.2)$$

où $\mathcal{C}_1(\overline{M'})$ est l'ensemble des sous- k -espaces vectoriels de $\overline{M'} = \frac{M'}{pM'}$ stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} isotropes, de dimension 2. On détermine ci-dessous l'ensemble $\mathcal{C}_1(M')$ pour M' superspécial unitaire de signature $(2, 1)$, $(3, 0)$ et pour M' supergénéral unitaire de signature $(2, 1)$. Les autres cas s'obtiennent par inversion des signatures. Attention : Avec nos notations, quand on relève \widetilde{M} , on trouve pM^\vee et non M . Remarquer que ces deux cristaux ont même signature.

1. M' est superspécial de signature $(2, 1)$ A isomorphisme près, on peut supposer $M' = (Wx \oplus WFx) \oplus (Wy \oplus WFy) \oplus (Wz \oplus WFz)$ où $x, y \in M'_e$ et $z \in M'_\bar{e}$ (comme au paragraphe 5.3.1). On note pareillement leurs images dans $\overline{M'}$. Soit $\widetilde{M} \in \mathcal{C}_1(\overline{M'})$ et $\widetilde{M}_e, \widetilde{M}_\bar{e}$ les sous-espaces propres pour l'action de \mathcal{O}_{E_p} . Examinons les différents cas, selon la dimension de \widetilde{M}_e :

1.a. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M} \subset \text{Ker}(F) \cap \overline{M'}_\bar{e} = \text{Vect}(Fx, Fy)$, donc $\widetilde{M} = \text{Vect}(Fx, Fy)$, qui convient. Le cristal M correspondant est superspécial de signature $(0, 3)$.

1.b. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Il existe $a, b, c \in k$ non tous nuls tels que $ax + by + cFz \in \widetilde{M}_e$. Alors $\sigma(a)Fx + \sigma(b)Fy \in \widetilde{M}_e$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, ces deux vecteurs engendrent \widetilde{M} et on doit avoir $a\sigma(a) + b\sigma(b) = 0$. Donc a, b sont non nuls et on peut supposer $a = 1$. Pour chaque $b \in k$ tel que $1 + b\sigma(b) = 0$ et $c \in k$, le sous-espace $\widetilde{M}(c) = \text{Vect}(x + by + cFz, Fx + \sigma(b)Fy)$ appartient à $\mathcal{C}_1(\overline{M}')$. enfin, il reste le cas $a = b = 0$. Alors $\widetilde{M} = \text{Vect}(Fz, D)$ où D est une droite de $\text{Vect}(Fx, Fy)$. La signature de tous les cristaux obtenus est $(2, 1)$.

1.c. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Alors $\widetilde{M} \subset \text{Ker}(F) \cap \overline{M}'_e = \text{Vect}(Fz)$, ce qui est impossible.

Remarque 133. Ainsi, $\mathcal{C}_1(M')$ contient un cristal de signature $(0, 3)$, $p^2 + 1$ copies de $\mathbb{A}^1(k)$ et une copie de $\mathbb{P}^1(k)$, avec signature $(2, 1)$. Le lecteur intéressé par la géométrie sous-jacente pourra se convaincre que ces ensembles se recollent comme dans la figure ci-dessous.

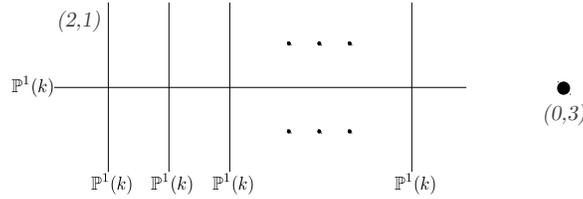


FIGURE 8.3.1 – l'ensemble $\mathcal{C}_1(M')$ pour M' unitaire de signature $(2, 1)$

2. M' est superspécial de signature $(3, 0)$ On peut supposer $M' = (Wx \oplus WFx) \oplus (Wy \oplus WFy) \oplus (Wz \oplus WFz)$ avec $x, y, z \in M'_e$ (comme au paragraphe 5.3.1). Examinons les différents cas, selon la dimension de \widetilde{M}_e :

2.a. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M} \subset \text{Vect}(Fx, Fy, Fz)$ est un plan quelconque. Le cristal correspondant est de signature $(1, 2)$.

2.b. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Il existe $a, b, c \in k$ non tous nuls tels que $ax + by + cz \in \widetilde{M}_e$. Alors $\sigma(a)Fx + \sigma(b)Fy + \sigma(c)Fz \in \widetilde{M}_e$ et on a $a\sigma(a) + b\sigma(b) + c\sigma(c) = 0$. De plus, $\sigma^{-1}(a)Fx + \sigma^{-1}(b)Fy + \sigma^{-1}(c)Fz \in \widetilde{M}_e$, donc $[a, b, c] \in C(\mathbb{F}_{p^2})$ où C est la courbe définie par (5.3.2). Les cristaux correspondants sont superspéciaux, de signature $(3, 0)$.

2.c. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Alors $\widetilde{M} \subset \text{Ker}(F) \cap \overline{M}'_e = 0$, ce qui est impossible.

Résumons ces calculs par le dessin ci-dessous. On note en indice la signature de chaque cristal, et $Gr(2,3)$ désigne l'ensemble des plans dans un k -espace vectoriel de dimension 3.

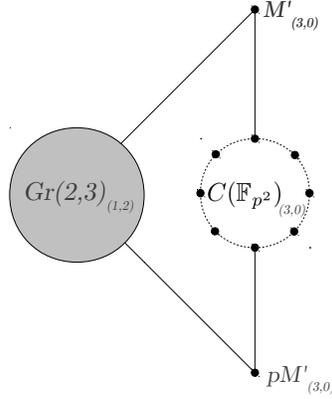


FIGURE 8.3.2 – l'ensemble $\mathcal{C}_1(M')$ pour M' unitaire de signature $(3,0)$

3. M' est supergénéral de signature $(2,1)$ D'après 26, on sait que $\overline{M}' \simeq \overline{\mathbb{B}(3)}$. Soit $(e_i, f_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ la base de $\overline{\mathbb{B}(3)}$ dans laquelle F et V sont définis par (5.3.3). Soit $\widetilde{M} \in \mathcal{C}_1(\overline{M}')$.

3.a. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 0$ Alors $\widetilde{M}' \subset \text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V) \cap \overline{M}'_e = \text{Vect}(f_2)$, ce qui est impossible.

3.b. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 1$ Il existe un vecteur non nul $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \widetilde{M}_e$. Alors $Fx = \sigma(b)f_1 + \sigma(c)f_2 \in \widetilde{M}_e$ et $Vx = \sigma^{-1}(a)f_2 + \sigma^{-1}(b)f_3 \in \widetilde{M}_e$. Donc $b = 0$ et $f_2 \in \widetilde{M}_e$. On trouve comme paramètre $[a, c] \in \mathbb{P}^1(k)$. Les cristaux correspondants ont signature $(2,1)$.

3.c. Si $\dim(\widetilde{M}_e) = 2$ Alors $\widetilde{M}' \subset \text{Ker}(F) \cap \overline{M}'_e = \text{Vect}(e_1)$, ce qui est impossible.

Proposition 134. Soit M' un cristal unitaire supersingulier de signature $(2,1)$. Il existe M presque unitaire de signature $(2,1)$ tel que $M \stackrel{2}{\subset} M' \stackrel{2}{\subset} M^\vee$.

Démonstration. Cela découle de l'étude ci-dessus. □

Lemme 135. *Soit K un espace de Dieudonné unitaire superspécial (cf. définition 38) de dimension 4.*

1. *Si la signature de K est $(1, 1)$, il existe un unique plan $P \subset K$ isotrope stable par F, V, \mathcal{O}_{E_p} . De plus, le déterminant de P est $e\bar{e}$.*
2. *Si la signature de K est différente de $(1, 1)$, il existe au moins deux plans $P \subset K$ isotropes stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} .*

Démonstration. Si K est de signature $(1, 1)$, on choisit une base $K = (kx \oplus kFx) \oplus (ky \oplus kFy)$ (comme dans la remarque 39), avec $x \in M_e$ et $y \in M_{\bar{e}}$. Soit $P \subset K$ un plan isotrope stable par F, V, \mathcal{O}_{E_p} . Si $ax + bFy \in P$, avec $a, b \in k$, alors $\sigma(a)Fx \in P$, donc $a = 0$ par isotropie. De même, $cy + dFx \in P$ avec $c, d \in k$ implique $c = 0$. Donc $P = \text{Vect}(Fx, Fy)$ est l'unique solution et son déterminant est $e\bar{e}$. Si K est de signature $(2, 0)$, alors $K = (kx \oplus kFx) \oplus (ky \oplus kFy)$ avec $x, y \in M_e$. Pour tout $u = ax + by$, $a, b \in k$ tels que $a\sigma(a) + b\sigma(b) = 0$, le sous-espace $P = \text{Vect}(u, Fu)$ convient (il y a $p^2 + 1$ solutions). De même si la signature de K est $(0, 2)$. \square

Lemme 136. *Soit K un espace de Dieudonné unitaire de dimension 4, alors il existe au moins deux plans isotropes stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} sauf si K est superspécial de signature $(1, 1)$.*

Démonstration. Si $F = 0$, alors $V = 0$ (cf. paragraphe 2.3.3) et $P_e \neq P_{\bar{e}}$ conviennent. Si $\text{rg}(F) = \text{rg}(V) = 1$, alors tout plan $P \subset \text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V)$ stable par \mathcal{O}_{E_p} convient, donc on peut supposer que $\text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V)$ est un plan. Si $x \in K_e \cup K_{\bar{e}}$ vérifie $Fx \neq 0$ et $\langle x, Fx \rangle = 0$, alors $\text{Vect}(x, Fx)$ convient (il est stable par V car $Vx \in x^\perp = Fx \oplus K_e$ donc Fx et Vx sont colinéaires) et il diffère de $\text{Ker}(F) \cap \text{Ker}(V)$. De même, si $x \in K_e \cup K_{\bar{e}}$ vérifie $Vx \neq 0$ et $\langle x, Vx \rangle = 0$, alors $\text{Vect}(x, Vx)$ convient. L'un des deux sous-espace K_e ou $K_{\bar{e}}$ n'est pas contenu dans $\text{Ker}(F)$. Pour fixer les idées, supposons $K_e \not\subseteq \text{Ker}(F)$, donc $K_{\bar{e}} = \text{Ker}(F)_{\bar{e}}$. Par l'absurde, supposons que pour tout $x \in K_e - \text{Ker}(F)$, on a $\langle x, Fx \rangle \neq 0$ et que pour tout $x \in K_e - \text{Ker}(V)$, on a $\langle x, Vx \rangle \neq 0$. En particulier, $\text{Ker}(F)_e = \text{Ker}(V)_e$, donc $\text{Ker}(V)_{\bar{e}} = \text{Ker}(F)_{\bar{e}} = K_{\bar{e}}$, et finalement $\text{Ker}(F) = \text{Ker}(V)$, contradiction. Enfin, si $\text{rg}(F) = \text{rg}(V) = 2$, les sous-espaces $\text{Im}(F)$ et $\text{Im}(V)$ conviennent. Si $\text{Im}(F) = \text{Im}(V)$, alors K est superspécial et on en déduit le résultat par le lemme précédent. \square

Proposition 137. *Soit M un cristal presque unitaire supersingulier de signature $(2, 1)$. Il existe M' unitaire de signature $(2, 1)$ tel que $M \stackrel{2}{\subset} M' \stackrel{2}{\subset} M^\vee$.*

Démonstration. D'après le lemme 86 appliqué à $\frac{M^\vee}{M}$, il existe M' unitaire tel que $M \stackrel{2}{\subset} M' \stackrel{2}{\subset} M^\vee$. Donc $M \in \mathcal{C}_1(M')$. D'après l'étude faite plus haut (en

inversant les signatures!), la signature de M' est $(0, 3)$ ou $(2, 1)$. Si c'est $(2, 1)$, on a le résultat. Supposons que c'est $(0, 3)$. Le plan $\widetilde{M} = \frac{pM^\vee}{pM'}$ est contenu dans $\frac{FM'}{pM'}$ (cf. 2.a ci-dessus) et le quotient $\frac{FM'}{pM^\vee}$ a pour déterminant e . Donc $pM' \stackrel{2}{\subset} pM^\vee \stackrel{1}{\subset} FM' \stackrel{1}{\subset} M \stackrel{2}{\subset} M'$ et $\frac{FM'}{pM^\vee} = \left(\frac{M}{pM^\vee}\right)_e$. On en déduit que si M'' est un cristal unitaire de signature $(0, 3)$ tel que $M \in \mathcal{C}_1(M'')$, alors $\frac{FM''}{pM^\vee} = \frac{FM'}{pM^\vee}$, d'où $M'' = M'$. Autrement dit, si M'' est un cristal unitaire différent de M' tel que $M \in \mathcal{C}_1(M'')$, alors sa signature est $(2, 1)$. Il reste donc à montrer qu'il existe au moins deux plans isotropes stables par F, V, \mathcal{O}_{E_p} dans $K = \frac{M^\vee}{M}$. C'est un espace de Dieudonné unitaire de dimension 4, donc d'après le lemme 136, il suffit de montrer que K n'est pas superspécial de signature $(1, 1)$. Or $FM' \stackrel{1}{\subset} M \stackrel{2}{\subset} M' \stackrel{2}{\subset} M^\vee$ et le déterminant du quotient $\frac{M'}{M}$ est \bar{e}^2 (car celui de $\frac{M'}{FM'}$ est \bar{e}^3). Ainsi $P = \frac{M'}{M}$ est un plan isotrope stable par F, V, \mathcal{O}_{E_p} de déterminant \bar{e}^2 . On déduit que K n'est pas superspécial de signature $(1, 1)$. \square

C. Cristaux superspéciaux

Théorème 138. *Soit M un module de Dieudonné superspécial quasi-unitaire. Alors M est isomorphe à une somme directe orthogonale de modules des types suivants :*

1. $Wx \oplus WFx$ avec $\langle x, Fx \rangle = \alpha p^r$, $r \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur x par multiplication par e ou par \bar{e} .
2. $Wx \oplus Wy \oplus WFx \oplus WFy$ avec $\langle x, Fx \rangle = \langle y, Fy \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = p^r$, $r \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{O}_{E_p}$ agit sur x par multiplication par e , et sur y par multiplication par \bar{e} .

Démonstration. On a $M = M^\tau \otimes W$ avec $M^\tau = \{x \in M, \tau x = x\}$ le squelette de M (où $\tau = p^{-1}F^2$). Par la proposition 66, il existe une base de M formée de vecteurs τ -invariants. De plus, la polarisation envoie le squelette de M sur celui de son dual. On peut donc remplacer W par $\mathbb{Z}_{p^2} = W(\mathbb{F}_{p^2})$ et supposer que M est un \mathbb{Z}_{p^2} -module. Soit $r \in \mathbb{Z}$ l'entier maximal tel que $\langle M, M \rangle \subset p^r \mathbb{Z}_{p^2}$, et posons $M' = \{x \in M, \langle x, M \rangle \subset p^{r+1} \mathbb{Z}_{p^2}\}$.

Le quotient $\widetilde{M} = M/M'$ est un espace de Dieudonné unitaire (sur \mathbb{F}_{p^2}). Les sous-espaces \widetilde{M}_e et $\widetilde{M}_{\bar{e}}$ sont totalement isotropes. On a $F^2 = 0$ sur \widetilde{M} , notons $K = \text{Ker}(F)$. On a $F\widetilde{M} \subset K$, et K est l'orthogonal de $F\widetilde{M}$. On distingue deux cas :

Premier cas : $K \neq \widetilde{M}$. On peut trouver $\tilde{x} \in \widetilde{M}_e$ ou $\tilde{x} \in \widetilde{M}_{\bar{e}}$ tel que $F\tilde{x} \neq 0$. Supposons pour fixer les idées que $\tilde{x} \in \widetilde{M}_e$. Il existe $\tilde{y} \in \widetilde{M}_e$ tel que $\langle F\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \neq 0$.

Pour $\lambda \in \mathbb{F}_{p^2}$, considérons :

$$\langle \tilde{x} + \lambda \tilde{y}, F(\tilde{x} + \lambda \tilde{y}) \rangle = \langle \tilde{x}, F\tilde{x} \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle \tilde{y}, F\tilde{y} \rangle + \bar{\lambda} \langle \tilde{x}, F\tilde{y} \rangle + \lambda \langle \tilde{y}, F\tilde{x} \rangle.$$

Si $\langle \tilde{x}, F\tilde{x} \rangle = 0$ et $\langle \tilde{y}, F\tilde{y} \rangle = 0$, alors on choisit $\lambda \in \mathbb{F}_{p^2}$ tel que $\bar{\lambda} \langle \tilde{x}, F\tilde{y} \rangle \notin \mathbb{F}_p$, ce qui implique $\langle \tilde{x} + \lambda \tilde{y}, F(\tilde{x} + \lambda \tilde{y}) \rangle \neq 0$. Dans tous les cas, il existe $\tilde{x} \in \widetilde{M}_e$ tel que $\langle \tilde{x}, F\tilde{x} \rangle \neq 0$. En relevant \tilde{x} dans M_e , on obtient $x \in M_e$ tel que $\langle x, Fx \rangle \notin p^{r+1}\mathbb{Z}_{p^2}$. Alors $\langle x, Fx \rangle = \alpha' p^r$ avec $\alpha' \in \mathbb{Z}_{p^2}^\times$ tel que $\bar{\alpha}' = -\alpha'$. On peut écrire $\alpha' = c\alpha$ avec $c \in \mathbb{Z}_p^\times$. Il existe $\mu \in \mathbb{Z}_{p^2}^\times$ tel que $\mu\bar{\mu} = c$, et donc $\langle \mu x, F(\mu x) \rangle = \alpha p^r$. Posons $M_1 = \mathbb{Z}_{p^2}x + \mathbb{Z}_{p^2}Fx$. Alors M_1 est stable par F et \mathcal{O}_{E_p} et on a $M = M_1 \oplus M_1^\perp$.

Deuxième cas : $K = \widetilde{M}$, i.e. $\langle M, FM \rangle \subset p^{r+1}\mathbb{Z}_{p^2}$. Soit $\tilde{x} \in \widetilde{M}_e$ et $\tilde{y} \in \widetilde{M}_{\bar{e}}$ tels que $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \neq 0$. On peut trouver $x \in M_e$ et $y \in M_{\bar{e}}$ relevant \tilde{x} et \tilde{y} . Soit M_1 le W -module engendré par (x, Fy, y, Fx) . Alors M_1 est stable par F et \mathcal{O}_{E_p} . Le système (x, Fy, y, Fx) est une base de M_1 . En effet, supposons que $ax + bFy + cy + dFx = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{p^2}$. Puisque $x, Fy \in M_e$ et $y, Fx \in M_{\bar{e}}$, on en déduit $ax + bFy = 0$ et $cy + dFx = 0$. Puisque $x \notin M'$, a n'est pas inversible. Si $a \neq 0$, on peut supposer $b \in \mathbb{Z}_{p^2}^*$. Alors $Fy = -ab^{-1}x$ et $py = -\bar{a}\bar{b}^{-1}Fx$. Puisque p divise a , on a $y \in M'$, contradiction. D'où $a = b = 0$, et de même $c = d = 0$.

Le sous-espace $M_1 \otimes \mathbb{Q}_{p^2}$ est non-dégénéré : On peut supposer $\langle x, y \rangle = p^r$, $\langle x, Fx \rangle = p^r a$ et $\langle y, Fy \rangle = p^r b$ avec $a, b \in p\mathbb{Z}_{p^2}$. La matrice de la forme $p^{-r} \langle, \rangle$ dans (x, Fy, y, Fx) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -b & -p \\ -1 & b & 0 & 0 \\ -a & p & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{Q}_{p^2}).$$

Enfin, on a $M = M_1 \oplus M_1^\perp$: Si $z \in M$, considérer $z_0 = \frac{\langle z, y \rangle}{\langle x, y \rangle}x + \frac{\langle z, x \rangle}{\langle y, x \rangle}y + \frac{\langle z, Fy \rangle}{\langle Fx, Fy \rangle}Fx + \frac{\langle z, Fx \rangle}{\langle Fy, Fx \rangle}Fy$. Alors $z_0 \in M_1$ et $z - z_0 \in M_1^\perp$. Le lemme 139 ci-dessous fournit une base de M_1 vérifiant les conditions de l'énoncé. Le théorème résulte alors d'une récurrence facile. \square

Lemme 139. *Soit M un module de Dieudonné superspécial quasi-unitaire sur \mathbb{Z}_{p^2} . On suppose qu'il existe $x \in M_e$ et $y \in M_{\bar{e}}$ tels que (x, Fy, y, Fx) soit une base de M telle que $\langle x, y \rangle = 1, \langle x, Fx \rangle = a, \langle y, Fy \rangle = b$, où $a, b \in p\mathbb{Z}_{p^2}$. Alors il existe $x' \in M_e$ et $y' \in M_{\bar{e}}$ tels que la famille (x', Fy', y', Fx') soit une base de M et $\langle x', y' \rangle = 1, \langle x', Fx' \rangle = \langle y', Fy' \rangle = 0$.*

Démonstration. Cherchons x' sous la forme $x' = x + uFy$. On a

$$\langle x', Fx' \rangle = a + p(\bar{u} - u - bu\bar{u}).$$

Quitte à multiplier u par $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^2}^\times$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$, on se retrouve dans la situation du lemme 140 ci-dessous, qui fournit $u \in \mathbb{Z}_{p^2}$ tel que $\langle x', Fx' \rangle = 0$. De même, on peut trouver $y' \in M_{\bar{e}}$ tel que $\langle y', Fy' \rangle = 0$, avec $y' = y + vFx$. Puisque $\langle x, Fx \rangle$, $\langle y, Fy \rangle$ et $\langle Fy, Fx \rangle$ sont tous divisibles par p , on a $\langle x', y' \rangle = 1 + pc$ avec $c \in \mathbb{Z}_{p^2}$ donc $\langle x', y' \rangle$ est inversible. Quitte à multiplier x' par $\langle x', y' \rangle^{-1}$, on peut supposer $\langle x', y' \rangle = 1$. Enfin, la famille (x', Fy', y', Fx') est une base de M car sa matrice dans la base (x, Fy, y, Fy) est inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & p\bar{v} & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p\bar{u} \\ 0 & 0 & v & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Lemme 140. *Soit $b \in pW$. Alors la fonction $f : W \rightarrow W$ définie par $u \mapsto u + \sigma(u) + bu\sigma(u)$ est surjective. Si $b \in p\mathbb{Z}_p$, alors f envoie \mathbb{Z}_{p^2} sur \mathbb{Z}_p , et cette restriction est surjective.*

Démonstration. Soit $x \in W$. Il existe $u_1 \in W$ tel que $x \equiv f(u_1) [p]$. En effet, ceci équivaut à résoudre en r l'équation $x = r + r^p$ dans $W/pW \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$, ce qui est possible. Notons $x - f(u_1) = p\Delta_1$ avec $\Delta_1 \in W$. Par récurrence, supposons qu'on ait trouvé $u_n \in W$ tel que $x \equiv f(u_n) [p^n]$. Notons $p^n\Delta_n = x - f(u_n)$ et posons $u_{n+1} = u_n + p^n r$ avec $r \in W$. Alors $x \equiv f(u_{n+1}) [p^{n+1}]$ équivaut à $\Delta_n \equiv r + \sigma(r) [p]$ et cette équation possède une solution en r . On forme ainsi une suite $(u_n) \in W$ convergente vers un élément u tel que $x = f(u)$.

Soit $b \in p\mathbb{Z}_p$. Si $b = 0$, l'application $f : \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ est surjective. Supposons $b \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{Z}_p$ et $u \in W$ tel que $f(u) = x$. On a donc $(bu + 1)(b\sigma(u) + 1) = bx + 1$. En posant $y = bu + 1$, on a $y\sigma(y) = bx + 1 \in \mathbb{Z}_p^*$. Par suite $\frac{\sigma^2(y)}{\sigma(y)} = 1$, donc $y \in \mathbb{Z}_{p^2}$. Enfin, $u \in W \cap \mathbb{Q}_{p^2} = \mathbb{Z}_{p^2}$. □

D. Les $k[\varepsilon]$ -modules

Soit R une k -algèbre commutative. Tout R -module sera implicitement de dimension finie sur k .

- Pour une catégorie \mathcal{C} , on note $\frac{\mathcal{C}}{\simeq}$ l'"ensemble" des classes d'isomorphismes d'objets de \mathcal{C} .

- On note $R\text{-Mod}$ la catégorie des R -modules.
- On note $\mathcal{D}_0(R)$ la sous-catégorie pleine de $R\text{-Mod}$ des R -modules libres.
- On note $\mathcal{D}_1(R)$ la catégorie des R -modules libres munis d'un morphisme d'anneaux $\mathbb{F}_q \rightarrow \text{End}_R(M)$. Les morphismes entre deux objets (M_1, \cdot) et (M_2, \cdot) sont les morphismes de R -modules $g : M_1 \rightarrow M_2$ tels que $\forall \alpha \in \mathbb{F}_q, \forall x \in M_1, g(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot g(x)$.
- On note $\mathcal{D}_2(R)$ la catégorie des R -modules libres M munis d'un accouplement R -bilinéaire alterné parfait $\langle, \rangle : M \times M \rightarrow R$. Ceci signifie que l'application induite $M \rightarrow \text{Hom}_R(M, R)$ est un isomorphisme de R -modules. Les morphismes entre deux objets $(M_1, \langle, \rangle_1)$ et $(M_2, \langle, \rangle_2)$ sont les morphismes de R -modules $g : M_1 \rightarrow M_2$ tels $\forall x, y \in M_1, \langle g(x), g(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$.
- On note $\mathcal{D}_3(R)$ la catégorie des R -modules libres M munis d'un morphisme d'anneaux $\mathbb{F}_q \rightarrow \text{End}_R(M)$ et d'un accouplement R -bilinéaire alterné parfait $\langle, \rangle : M \times M \rightarrow R$. On impose la condition de compatibilité suivante : $\forall \alpha \in \mathbb{F}_q, \forall x, y \in M$, on a $\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} \cdot y \rangle$. Les morphismes entre deux objets $(M_1, \cdot, \langle, \rangle_1)$ et $(M_2, \cdot, \langle, \rangle_2)$ sont les morphismes de R -modules $g : M_1 \rightarrow M_2$ vérifiant $\forall \alpha \in \mathbb{F}_q, \forall x \in M_1, g(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot g(x)$ et $\forall x, y \in M_1, \langle g(x), g(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$.

Soit $\varphi : R \rightarrow S$ un morphisme de k -algèbres. On a un foncteur $\varphi : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ défini par $M \mapsto M \otimes_R S$. Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient également un foncteur

$$\varphi : \mathcal{D}_i(R) \longrightarrow \mathcal{D}_i(S).$$

Dorénavant, $R = \frac{k[X]}{(X^2)} = k[\varepsilon]$ avec $\varepsilon = X \bmod X^2$. On a un morphisme de k -algèbres évident $k \rightarrow R$ et un morphisme $R \rightarrow k$ envoyant ε sur 0. Ceci induit des foncteurs $F : \mathcal{D}_i(k) \rightarrow \mathcal{D}_i(R)$ et $G : \mathcal{D}_i(R) \rightarrow \mathcal{D}_i(k)$. Pour tout k -module N , on a un isomorphisme canonique $N \simeq (N \otimes_k R) \otimes_R k$. Ceci montre que $G \circ F = \text{id}$. Ces foncteurs induisent des applications :

$$F : \frac{\mathcal{D}_i(k)}{\simeq} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_i(R)}{\simeq} \quad \text{et} \quad G : \frac{\mathcal{D}_i(R)}{\simeq} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_i(k)}{\simeq}. \quad (8.3.3)$$

Théorème 141. *Les applications (8.3.3) sont bijectives, réciproques l'une de l'autre.*

On sait déjà que $G \circ F = \text{id}$, donc F est injective et G surjective.

Faisons quelques remarques générales. Soit M un R -module. On peut associer à M deux entiers : sa dimension comme k -espace vectoriel, et le rang de l'opérateur k -linéaire $\varepsilon : M \rightarrow M$. On notera

$$(d, r) = (\dim_k(M), \text{rg}(\varepsilon)).$$

Puisque $\varepsilon^2 = 0$, on a $\text{Im}(\varepsilon) \subset \text{Ker}(\varepsilon)$, ce qui implique $2r \leq d$. La catégorie $R\text{-Mod}$ est équivalente à la catégorie des k -espaces vectoriels munis d'un endomorphisme nilpotent f tel que $f^2 = 0$. Le théorème de réduction de Jordan dit alors que les entiers (d, r) classifient les classes d'isomorphisme de $R\text{-Mod}$. Un R -module est libre si et seulement si $d = 2r$. En effet, il est alors isomorphe à R^r par le théorème de Jordan. Un facteur direct d'un R -module libre est libre. En effet, si $M = M' \oplus M''$ est libre, alors $(d, r) = (d', r') + (d'', r'')$ avec des notations évidentes, ce qui montre que les inégalités $2r' \leq d'$ et $2r'' \leq d''$ sont des égalités.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Pour $\mathcal{D}_0(R)$, le résultat est clair car $F(k^n) = R^n$, donc F est surjective.

Pour $\mathcal{D}_1(R)$: Soit M un objet de $\mathcal{D}_1(R)$. L'action de \mathbb{F}_q induit une décomposition $M = M_0 \oplus M_1$ telle que $\alpha \in \mathbb{F}_q$ agit sur M_0 (resp. M_1) par multiplication par α (resp. $\bar{\alpha}$). Les facteurs M_0, M_1 sont des sous- R -modules libres. Par conséquent, la classe d'isomorphisme de M est entièrement déterminée par les dimensions de M_0 et M_1 . On a

$$M \otimes_R k = \frac{M}{\varepsilon M} = \frac{M_0}{\varepsilon M_0} \oplus \frac{M_1}{\varepsilon M_1}.$$

Ainsi, les dimensions de M_0, M_1 peuvent se lire sur $M \otimes_R k$, ce qui montre que G est injective.

Pour $\mathcal{D}_2(R)$: Soit $M = R^n$. Un accouplement R -bilinéaire parfait \langle, \rangle sur M est donné par une matrice antisymétrique B inversible de $GL_n(R)$. Si $B \in GL_n(k)$, alors $(M, \langle, \rangle) = F(k^n, \langle, \rangle)$, ce qui montre le résultat. Sinon, notons $B = B_1 + \varepsilon B_2$ avec $B_1, B_2 \in M_n(k)$. Soit $P = I_n + \varepsilon A$ avec $A \in M_n(k)$. Alors $P \in GL_n(R)$ et

$$PB^tP = B_1 + \varepsilon(B_2 + B_1^t A + AB_1).$$

Puisque $B_1 \in GL_n(k)$, il existe $A \in M_n(k)$ telle que $B_2 + B_1^t A + AB_1 = 0$. On en déduit le résultat.

Pour $\mathcal{D}_3(R)$: Soit $d \in \mathbb{F}_p^\times$ tel que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$ avec $\alpha^2 = -d$. Soit $(M, \cdot, \langle, \rangle)$ un objet de $\mathcal{D}_3(R)$. On peut supposer $M = R^n$. Soit $B \in GL_n(R)$ la matrice antisymétrique associée à \langle, \rangle et $A \in GL_n(R)$ la matrice de α . La condition de compatibilité est ${}^tABA = dB$. Si $A, B \in GL_n(k)$, alors on a le résultat. Sinon, soit $P \in GL_n(R)$. Cet automorphisme de M agit sur les couples (A, B) de la manière suivante :

$$(A, B) \xrightarrow{P} (P^{-1}AP, {}^tPBP).$$

D'après le cas de $\mathcal{D}_2(R)$, on peut supposer que $B \in GL_n(k)$. Posons $A = A_1 + \varepsilon A_2$ avec $A_1, A_2 \in M_n(k)$. On pose aussi $P = I_n + \varepsilon C$ avec $C \in M_n(k)$. Montrons qu'il existe $C \in M_n(k)$ tel que $P^{-1}AP \in M_n(k)$ et ${}^tPBP \in M_n(k)$. On a

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= A_1 + \varepsilon(A_2 + A_1C - CA_1) \\ {}^tPBP &= B + \varepsilon(BC + {}^tCB). \end{aligned}$$

On cherche donc C tel que $BC + {}^tCB = 0$ et $A_2 = CA_1 - A_1C$. La condition de compatibilité ${}^tABA = dB$ et la relation $A^2 = -d$ imposent

$$\begin{aligned} {}^tA_1BA_1 &= dB \\ {}^tA_2BA_1 + {}^tA_1BA_2 &= 0 \\ A_1^2 &= -d \\ A_1A_2 + A_2A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Soit $C' = A_2A_1$. Alors

$$\begin{aligned} BC' + {}^tC'B &= BA_2A_1 + {}^tA_1{}^tA_2B \\ (BC' + {}^tC'B)A_1 &= -dBA_2 + {}^tA_1{}^tA_2BA_1 \\ {}^tA_1(BC' + {}^tC'B)A_1 &= -d({}^tA_1BA_2 + {}^tA_2BA_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $A_1 \in GL_n(k)$, on en déduit $BC' + {}^tC'B = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} C'A_1 - A_1C' &= -dA_2 - A_1A_2A_1 \\ &= -dA_2 + A_2A_1^2 \\ &= -2dA_2. \end{aligned}$$

Donc en posant $C = -\frac{1}{2d}C'$, on a le résultat.

Bibliographie

- [BR94] Don Blasius and Jonathan D. Rogawski, *Zeta functions of Shimura varieties*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 525–571. MR 1265563 (95e :11051)
- [BT87] F. Bruhat and J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), no. 2, 141–195. MR 919421 (89b :20098)
- [Bül02] Oliver Bültel, *The congruence relation in the non-PEL case*, J. Reine Angew. Math. **544** (2002), 133–159. MR 1887893 (2003a :14036)
- [BW06] Oliver Bültel and Torsten Wedhorn, *Congruence relations for Shimura varieties associated to some unitary groups*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 2, 229–261. MR 2225042 (2007d :11066)
- [Con04] Brian Conrad, *Gross-Zagier revisited*, Heegner points and Rankin L -series, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, With an appendix by W. R. Mann, pp. 67–163. MR 2083211 (2005h :11121)
- [Del85] Pierre Deligne, *Le lemme de Gabber*, Astérisque (1985), no. 127, 131–150, Seminar on arithmetic bundles : the Mordell conjecture (Paris, 1983/84). MR 801921
- [FC90] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, vol. 22, Springer-Verlag, 1990.
- [Ful98] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 2, Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Gör00] U. Görtz, *On the Flatness of Models of Certain Shimura Varieties of Pel-type*, Universität zu Köln, 2000.
- [Gro66] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 28, 255. MR 0217086 (36 #178)

- [Gro74] Alexandre Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45 (Été, 1970). MR 0417192 (54 #5250)
- [Hai05] Thomas J. Haines, *Introduction to Shimura varieties with bad reduction of parahoric type*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 583–642. MR 2192017 (2006m :11085)
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157 (57 #3116)
- [Jac40] N. Jacobson, *A note on hermitian forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 264–268. MR 0001957 (1,325d)
- [Jan73] Gerald J. Janusz, *Algebraic number fields*, Academic Press [A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 55. MR 0366864 (51 #3110)
- [Kot92] Robert E. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444. MR 1124982 (93a :11053)
- [Kra75] Hanspeter Kraft, *Kommutative algebraische Gruppen und Ringe*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 455, Springer-Verlag, Berlin, 1975. MR 0393051 (52 #13862)
- [Mes72] William Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1972. MR 0347836 (50 #337)
- [Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378. MR 2192012 (2006m :11087)
- [Moo01] Ben Moonen, *Group schemes with additional structures and Weyl group cosets*, Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), Progr. Math., vol. 195, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 255–298. MR 1827024 (2002c :14074)
- [Moo04] ———, *Serre-Tate theory for moduli spaces of PEL type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 2, 223–269. MR 2061781 (2005e :11075)

- [Oor87] Frans Oort, *Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 165–195. MR 927980 (89c :14069)
- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink, *Period spaces for p -divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. MR 1393439 (97f :14023)
- [Sat63] Ichirô Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1963), no. 18, 5–69. MR 0195863 (33 #4059)
- [Vol10] Inken Vollaard, *The supersingular locus of the Shimura variety for $\mathrm{GU}(1, s)$* , Canad. J. Math. **62** (2010), no. 3, 668–720. MR 2666394 (2011j :14059)
- [VW11] Inken Vollaard and Torsten Wedhorn, *The supersingular locus of the Shimura variety of $\mathrm{GU}(1, n - 1)$ II*, Invent. Math. **184** (2011), no. 3, 591–627. MR 2800696 (2012j :14035)
- [Wal63] G. E. Wall, *On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups*, J. Austral. Math. Soc. **3** (1963), 1–62. MR 0150210 (27 #212)
- [Wed99] Torsten Wedhorn, *Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL-type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), no. 5, 575–618. MR 1710754 (2000g :11054)
- [Wed00] ———, *Congruence relations on some Shimura varieties*, J. Reine Angew. Math. **524** (2000), 43–71. MR 1770603 (2001j :11045)

Relation de congruence pour les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires $GU(n-1,1)$

Résumé

Blasius et Rogawski ont formulé une conjecture qui prévoit que l'action du Frobenius sur la cohomologie d'une variété de Shimura est annulée par un certain polynôme, à coefficients dans l'algèbre de Hecke. C'est l'analogue de la célèbre relation d'Eichler-Shimura pour la courbe modulaire. Dans cette thèse, on démontre cette conjecture pour les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires en signature $(n-1,1)$ quand n est impair.

Par ailleurs, on étudie certains aspects dans le cas particulier $n=3$. On montre explicitement la relation de congruence sur le lieu ordinaire. De plus, on étudie le graphe des cristaux supersinguliers et les relèvements d'isogénies en caractéristique nulle.

Résumé en anglais

Blasius and Rogawski have stated a conjecture saying that the action of the Frobenius element on the cohomology of a Shimura variety is annihilated by some polynomial with coefficients in the Hecke algebra. This is the analogue of the Eichler-Shimura congruence relation for the modular curve. In this thesis, we prove this conjecture for Shimura varieties associated to unitary groups in signature $(n-1,1)$ when n is odd.

We also investigate some particular aspects in the case $n=3$. We explicitly show the congruence relation on the ordinary locus. Further, we study the graph of supersingular Dieudonné crystals and liftings of isogenies to characteristic zero.